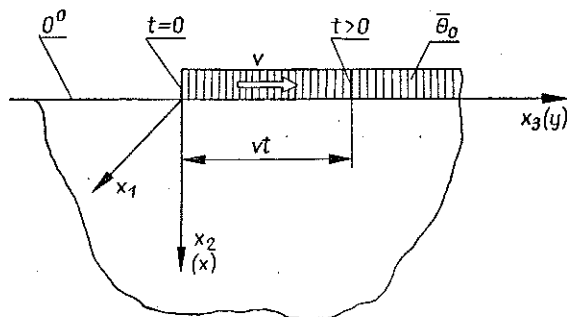


NIESTACJONARNE POLE TEMPERATURY W PÓLPRZESTRZENI
W PRZYPADKU RUCHOMEGO OGRZANIA NA BRZEGU

TADEUSZ ROŻNOWSKI (WARSZAWA)

Komunikat dotyczy niestacjonarnego rozkładu temperatury w półprzestrzeni w przypadku nagłego ogrzania półnieskończonej części płaszczyzny ograniczającej

$x_2 = 0$ w chwili $t = 0$ do stałej temperatury θ_0 przy jednoczesnym przesuwaniu się przyłożonego ogrzania ze stałą prędkością v w dodatnim kierunku osi x_3 , co schematycznie przedstawia rys. 1. Części powierzchni swobodnych ciała znajdujące się poza obszarem bezpośredniego oddziaływania źródeł ciepła są utrzymywane w temperaturze zera w każdej chwili t .



Rys. 1

W bezwymiarowym układzie współrzędnych x, y oraz czasu τ równanie przewodnictwa przedstawimy w postaci

$$(1) \quad \left(\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \bar{\theta}(x, y; \tau) = 0, \quad 0 < x < \infty, |y| < \infty, 0 < \tau < \infty,$$

gdzie

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Opisany wyżej warunek początkowy i brzegowy wyrażają związki

$$(2) \quad \begin{aligned} \bar{\theta}(x, y; 0) &= 0, \quad 0 \leq x < \infty, |y| < \infty; \\ \bar{\theta}(0, y; \tau) &= \eta(y - w\tau), \quad |y| < \infty, 0 < \tau < \infty. \end{aligned}$$

Wprowadzono następujące oznaczenia: x_1, x_2, x_3 i t są to odpowiednio współrzędne prostokątne położenia i czas, $\theta(x_2, x_3; t)$ funkcja temperatury wewnątrz

półprzestrzeni, b odcinek odniesienia, θ_0 temperatura odniesienia np. dana w warunkach brzegowych i współrzędne bezwymiarowe

$$x = \frac{x_2}{b}, \quad y = \frac{x_3}{b}, \quad \tau = \frac{\kappa_0 t}{b^2},$$

$$w = \frac{bv}{\kappa_0}, \quad \bar{\theta}(x, y; \tau) = \frac{\theta(x_2, x_3; t)}{\theta_0}$$

oraz funkcja

$$\eta(y - w\tau) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } y > w\tau, \\ 0, & \text{jeśli } y < w\tau. \end{cases}$$

Do rozwiązania równania (1) z warunkami (2) zastosujemy transformację wykładniczą Fouriera względem zmiennej y i transformację Laplace'a względem zmiennej τ .

W obszarze podwójnie przetransformowanym otrzymamy rozwiązanie zagadnienia w postaci

$$(3) \quad \hat{\hat{\theta}}^*(x, a; p) = \sqrt{2\pi} \delta_+(a) e^{-x(a^2+p)^{1/2}} \frac{1}{p} \left(1 + \frac{iaw}{p - iaw} \right),$$

gdzie występuje delta Heisenberga:

$$(4) \quad \delta_+(a) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \delta(a) - \frac{1}{2\pi ia}$$

Odwrotną transformację Laplace'a równania (3) możemy wyrazić za pomocą następującego splotu znanych funkcji

$$(5) \quad \hat{\hat{\theta}}(x, a; \tau) = \sqrt{2\pi} \delta_+(a) \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[e^{-x(a^2+p)} \frac{1}{p} \right] + \right. \\ \left. + iaw \left(\mathcal{L}^{-1} \left[e^{-x(a^2+p)^{1/2}} \frac{1}{p} \right] * \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{p - iaw} \right] \right) \right\},$$

gdzie

$$(6) \quad \mathcal{L}^{-1} \left[e^{-x(a^2+p)^{1/2}} \frac{1}{p} \right] = \frac{1}{2} \left[e^{-x\alpha} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}} - a\sqrt{\tau} \right) + \right. \\ \left. + e^{\alpha x} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}} + a\sqrt{\tau} \right) \right] = \frac{1}{2} t^+(x, a; \tau),$$

$$(7) \quad \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{p - iaw} \right] = e^{iaw\tau}$$

Podstawiając (6) i (7) do (5) i wykonując pewne przekształcenia otrzymamy:

$$(8) \quad \hat{\hat{\theta}}(x, a; \tau) = \sqrt{2\pi} \delta_+(a) \left\{ \frac{1}{2} t^+(x, a; \tau) + \frac{iaw}{2} \int_0^\tau t^+(x, a; t) e^{iaw(\tau-t)} dt \right\}.$$

Równanie (8) po wykonaniu odwrotnej transformacji Fouriera przyjmuje postać

$$(9) \quad \bar{\theta}(x, y; \tau) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}}\right) - \frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a} t^+(x, a; \tau) e^{-iax} da - \\ - \frac{w}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\tau} t^+(x, a; t) e^{ia[w(\tau-t)-y]} da dt,$$

a wynik końcowy

$$(10) \quad \bar{\theta}(x, y; \tau) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}}\right) + \bar{\theta}_1(x, y; \tau) - \bar{\theta}_2(x, y; \tau).$$

We wzorze (10) wprowadzono oznaczenie

$$(11) \quad \bar{\theta}_1(x, y; \tau) = \pm \frac{x}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{x^2 + (y-s)^2} e^{-\frac{x^2 + (y-s)^2}{4\tau}} - \frac{1}{x^2 + (y+s)^2} e^{-\frac{x^2 + (y+s)^2}{4\tau}} \right] ds,$$

w którym znak plus odnosi się do półprostej $y > 0$, a znak minus do półprostej $y < 0$, oraz

$$(12) \quad \bar{\theta}_2(x, y; \tau) = \frac{w}{\pi} x \int_0^{\tau} \frac{1}{x^2 + [w(\tau-t) - y]^2} e^{-\frac{x^2 + [w(\tau-t) - y]^2}{4\tau}} dt.$$

Określona funkcja temperatury (10) stanowi rozwiązanie sformułowanego wyżej zagadnienia, ponieważ spełnia równanie (1) oraz warunki (2).

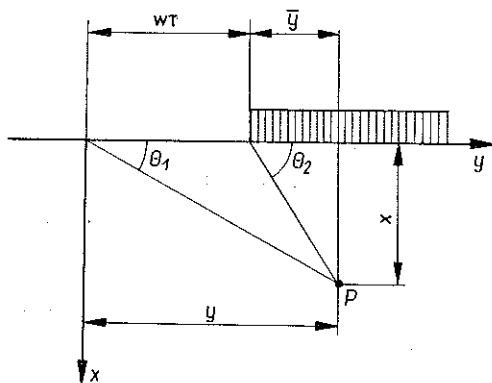
W. JAUNZEMIS i E. STERNBERG w pracy [1] zastosowali wyniki J. B. ROSSERA do wyrażenia $\bar{\theta}_1(x, y; \tau)$ [por. wzór (11)] w postaci szeregów nieskończonych, dogodnych do obliczeń numerycznych. Opierając się na ich wynikach można wykazać, że całka $\bar{\theta}_2(x, y; \tau)$, [por. wzór (12)] posiada również reprezentację szeregową.

W tym celu wprowadzimy nowe zmienne i oznaczenia [rys. 2]

$$(13) \quad \bar{y} = (y - w\tau), \quad \bar{s} = w\tau, \quad u = \frac{\bar{y} + \bar{s}}{2\sqrt{\tau}}$$

oraz

$$(14) \quad \xi_1 = \frac{y}{2\sqrt{\tau}}, \quad \xi_2 = \frac{\bar{y}}{2\sqrt{\tau}}, \\ \eta_1 = \operatorname{tg} \theta_1 = \frac{x}{y}, \quad \eta_2 = \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{x}{\bar{y}}.$$



Rys. 2

Równanie (12) w nowym układzie współrzędnych przyjmie postać

$$(15) \quad \bar{\theta}_2(x, y; \tau) = \frac{1}{\pi} [\mathcal{D}(\xi_1, \eta_1) - \mathcal{D}(\xi_2, \eta_2)],$$

gdzie

$$(16) \quad \mathcal{D}(\xi_i, \eta_i) = \eta_i \xi_i \exp(-\eta_i^2 \xi_i^2) \int_0^{\xi_i} \frac{1}{\eta_i^2 \xi_i^2 + u^2} \exp(-u^2) du, \quad i = 1, 2.$$

Zgodnie z wynikami J. B. Rossera całka określona $\mathcal{D}(\xi_i, \eta_i)$ wyraża się przez iterowaną całkę błędu

$$(17) \quad \Phi(\zeta, m) = \int_0^{\zeta} \exp(-m^2 v^2) \int_0^v \exp(-u^2) du dv,$$

przy czym

$$(18) \quad \mathcal{D}(\zeta, m) = \frac{\pi}{2} - \text{arc tg } m - 2m \Phi(\zeta, m).$$

Biorąc pod uwagę (17) i (18) końcowy wynik przekształcenia wyrażenia (15) przyjmie postać

$$(19) \quad \bar{\theta}_2(x, y; \tau) = \frac{2}{\pi} \{\eta_2 \Phi(\xi_2, \eta_2) - \eta_1 \Phi(\xi_1, \eta_1)\} + \frac{1}{\pi} [\Theta_2 - \Theta_1],$$

$$y \neq 0, \quad y \neq w\tau.$$

Ze wzoru (19) wynika, że $\bar{\theta}_2$ ma wspomnianą reprezentację szeregową, jeśli rozwinie my w szereg funkcję wykładniczą występującą we wzorze (17).

Gdy $y = 0$ lub $y = w\tau$, to po przejściu do granicy we wzorze (19) otrzymamy

$$(20) \quad \lim_{y \rightarrow 0} \bar{\theta}_2(x, y; \tau) = \bar{\theta}_2(x, 0; \tau) = -\frac{2}{\pi} \bar{\eta} \Phi(\xi, \bar{\eta}) + \frac{1}{\pi} \Theta$$

oraz

$$(21) \quad \lim_{y \rightarrow w\tau} \bar{\theta}_2(x, y; \tau) = \bar{\theta}_2(x, w\tau; \tau) = -\frac{2}{\pi} \bar{\eta} \Phi(\xi, \bar{\eta}) + \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \Theta,$$

gdzie

$$\bar{\eta} = \text{tg } \Theta = \frac{x}{w\tau}, \quad \xi = \frac{w}{2} \sqrt{\tau}.$$

Wykorzystano tutaj pewne własności funkcji Φ przedstawione w pracy [1].

Reasumując nasze rozważanie podamy parę wniosków:

1. Zbadamy przypadek szczególny, gdy prędkość pola ciepła występującego w naszym warunku brzegowym zmierza do zera. Otrzymamy wówczas rozwiązanie

загаднення dotyczącego nieciągłego ogrzania brzegu, niezależnego od czasu. Funkcja temperatury (10) przyjmie w tym przypadku postać

$$(22) \quad \bar{\theta}(x, y; \tau)|_{w=0} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}}\right) + \bar{\theta}_1(x, y; \tau).$$

Widzimy, że wpływ prędkości na rozkład temperatury, opisany za pomocą wzoru (10), określa składnik $\bar{\theta}_2(x, y; \tau)$, tj. funkcja (12).

2. Rezultat w postaci (10) może być wykorzystany do rozwiązania bardziej złożonych zagadnień. Między innymi w przypadku nagłego pojawienia się ruchomego ogrzania powierzchni o temperaturze θ_0 na części brzegu długości $2b$ rozwiązanie możemy wyrazić w formie

$$(23) \quad \bar{T}(x, y; \tau) = \bar{\theta}^{(2)} - \bar{\theta}^{(1)},$$

gdzie $\bar{T}(x, y; \tau)$ oznacza temperaturę w półprzestrzeni, gdy na brzegu przesuwa się pole ciepła o szerokości 2, przy czym

$$\bar{\theta}^{(1)} = \bar{\theta}(x, y-1; \tau),$$

$$\bar{\theta}^{(2)} = \bar{\theta}(x, y+1; \tau).$$

Literatura cytowana w tekście

1. W. JAUNZEMIS, E. STERNBERG, *Transient thermal stresses in a semi-infinite slab*, J. Appl. Mech., March 1960.
2. W. NOWACKI, *Thermoelasticity*, Pergamon Press, London 1962.
3. T. ROŻNOWSKI, *The plane problem of thermoelasticity with a moving boundary condition*, Arch. Mech. Stos., 5, 21 (1969).

Резюме

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ, С ПОДВИЖНЫМ НАГРЕВОМ НА КРАЮ

В работе рассматривается нестационарное распределение температуры в полупространстве, половина поверхности которого внезапно нагрета подвижным полем температуры до постоянного значения, после чего этот нагрев передвигается с постоянной скоростью. Применяя технику интегральных преобразований и метод решения, согласно с предыдущими работами автора, определяется температура в полуплоскости, в виде функции, из которой непосредственно вытекает представление в виде рядов, выраженное формулами (22) и (23) в работе [1].

Исследуются некоторые особые случаи и возможность использования, полученных зависимостей при решении задач, с более сложной формой краевых условий, представлены в работах [2] и [3].

Summary

NONSTATIONARY TEMPERATURE FIELD IN A HALF-SPACE
WITH MOVING HEATING AT THE EDGE

In this paper the nonstationary distribution of temperature is considered in a semi-space one half of whose free surface was suddenly heated by a moving field of heat to a constant temperature, after which the heating moves with a constant velocity. Using the technique of integral transformations and the method of solution according to the author's previous papers, the temperature in the semi-space is determined in the form of a function, from which the series representation results directly expressed by the formulae (22) and (23) in [1].

Some particular cases are investigated, and the possibility of utilizing the relationships obtained for solving problems with more complex boundary conditions are presented in [2] and [3].

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 czerwca 1969 r.
