

## PRZESTRZENNE ZAGADNIENIA DYNAMICZNE OŚRODKÓW NIESPRĘŻYSTYCH

JÓZEF BEJDA (WARSZAWA)

### 1. Wstęp

Problem propagacji fal plastycznych i lepkoplastycznych o amplitudach przewyższających granicę plastyczności materiału cechuje się w ostatnich latach bardzo szybkim rozwojem dzięki intensywnym badaniom teoretycznym i eksperymentalnym, prowadzonym w różnych ośrodkach naukowych, o czym świadczy ilość ukazujących się publikacji oraz częstość różnego rodzaju kongresów, sympozjów, zjazdów i konferencji. Problem ten, zapoczątkowany przez DONNELLA [1] w r. 1930, został zupełnie zaniechany aż do lat 40-tych, kiedy to znowu został podjęty niezależnie przez wielu badaczy: KÁRMÁNA [2] oraz WHITE'A i GRIFFITHA [3] w USA, TAYLORA [4] w Anglii i RACHMATULINA [5] w Związku Radzieckim. Wszyscy wymienieni autorzy zakładając ogólną postać krzywej naprężenie-odkształcenie badali problem propagacji fal podłużnych w jednorodnym długim pręcie, wywołanych nagłym obciążeniem jednego końca pręta. Prace te powstawały w okresie drugiej wojny światowej; były więc okryte tajemnicą i zostały opublikowane dopiero po zakończeniu wojny. Od tego czasu nastąpił burzliwy rozwój dynamicznej teorii plastyczności. Oprócz oryginalnych prac ukazały się liczne prace przeglądowe [6, 7, 8, 9 i 10] oraz monografie [11, 12, 13, 14, 15 i 95]. Zawierają one bezcenną kompilację metod, rezultatów i danych bibliograficznych. Przegląd prac opracowany ostatnio przez P. S. SYMONDSA [16 i 17] zawiera porównanie różnych koncepcji teoretycznych i eksperymentalnych oraz ich krytyczną ocenę, obejmując całokształt zagadnień dynamicznych w ośrodkach niesprężystych aż do ostatnich lat. Dlatego też ograniczymy się do rozpatrzenia najbardziej podstawowych prac wyjaśniających podstawowe aspekty zagadnienia, niezbędne do analizy zagadnień przestrzennych.

Podstawowym problemem zbadanym szczegółowo przez KÁRMÁNA, TAYLORA i RACHMATULINA jest analiza nieskończenie długiego jednorodnego cylindra obciążonego stałą prędkością  $v$ . Przyjmowano następujące założenia upraszczające:

- a) efekty bezwładności poprzecznej zanedbuje się,
- b) naprężenie jest rozłożone równomiernie wzdłuż przekroju poprzecznego,
- c) krzywa naprężenie-odkształcenie nie zależy od prędkości odkształcenia.

Rozwiązanie określone jest przez kształt krzywej naprężenie-odkształcenie. Prędkość propagacji o amplitudzie  $\varepsilon_1$  jest dana zależnością

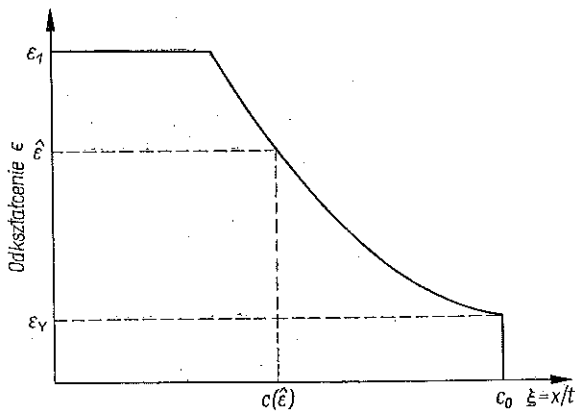
$$(1.1) \quad c = \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{d\sigma}{d\varepsilon}},$$

gdzie nachylenie krzywej naprężenie-odkształcenie jest określone dla danego  $\varepsilon = \varepsilon$ . W równaniu (1.1)  $\rho$  jest gęstością materiału,  $\sigma$  naprężeniem, a  $\varepsilon$  odkształceniem.

Rozwiązanie zależy tylko od jednej zmiennej niezależnej  $\xi = x/t$ , gdzie  $x$  jest odległością mierzoną od czoła uderzenia, a  $t$  oznacza czas. Schematyczne przedstawienie  $\varepsilon$  w zależności od  $\xi$  jest pokazane na rysunku 1. Wielkość  $c_0$  jest prędkością propagacji fal sprężystych w cienkich prętach, przy czym

$$(1.2) \quad c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

gdzie  $E$  oznacza moduł Younga. Odkształcenie  $\varepsilon_y$  odpowiada naprężeniu równemu granicy plastyczności  $\sigma_y$ .



Rys. 1

Charakterystycznym aspektem tego rozwiązania jest równomierny rozkład odkształcenia o amplitudzie  $\varepsilon_1$ , tzw. «plateau», dane następującym wzorem:

$$(1.3) \quad v_1 = \int_0^{\varepsilon_1} \left( \frac{1}{\rho} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right)^{1/2} d\varepsilon.$$

W zależności od tego, czy krzywa  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  jest skierowana wklęsłością, czy wypukłością do osi odkształcenia, mamy ciągłą zmianę prędkości propagacji fali odkształcenia lub też falę uderzeniową.

Teoria, która uwzględnia wpływ prędkości odkształcenia na zachowanie się dynamiczne materiału, była zaproponowana przez W. W. SOKOŁOWSKIEGO [18] dla ośrodka idealnie plastycznego i MALVERNA [19] dla ośrodka plastycznego ze wzmocnieniem. Opiera się ona na równaniu konstytutywnym [19], wiążącym prędkość odkształcenia  $\dot{\varepsilon}$ , prędkość naprężenia  $\dot{\sigma}$ , naprężenie  $\sigma$  i odkształcenie  $\varepsilon$ :

$$(1.4) \quad E\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma} + g(\sigma, \varepsilon),$$

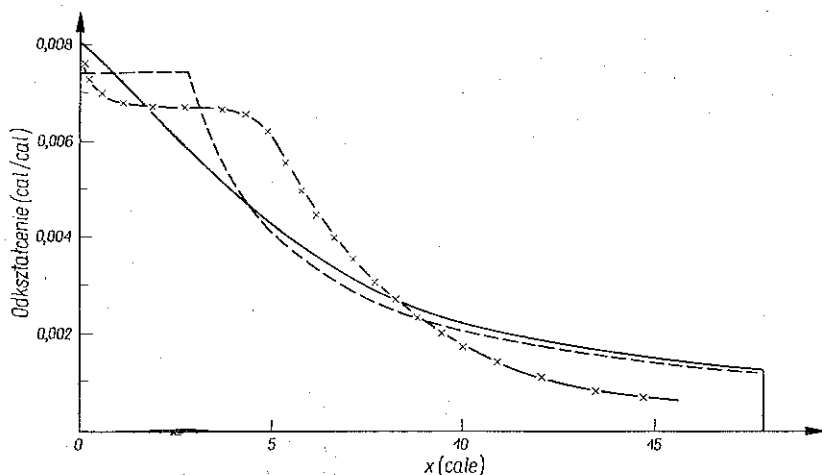
gdzie  $g(\sigma, \varepsilon)$  jest funkcją dowolną.

Rozwiązanie zagadnienia propagacji podłużnych fal w prętach, oparte na równaniu (1.4) różni się od rozwiązania Kármána-Rachmatulina w trzech podstawowych aspektach:

1) teoria uwzględniająca wpływ prędkości odkształcenia wykazuje wyraźny przyrost granicy plastyczności ponad jej wartość otrzymaną z próby statycznej;

2) jeśli pręt jest obciążony najpierw statycznie ponad granicę plastyczności, a następnie zaburzony dynamicznie falami o małej amplitudzie, to propagują się one z prędkością fal sprężystych, a nie według teorii Kármána-Rachmatulina z prędkością określoną wzorem (1.1);

3) teoria Malverna nie daje równomiernego rozkładu odkształcenia w otoczeniu uderzonego końca pręta («plateau»), jakie daje teoria bez wpływu prędkości i eksperyment (rys. 2).



Rys. 2

Najmniej istotny w efekcie okazał się problem istnienia «plateau», który swego czasu wywoływał najwięcej kontrowersji i uważany był jako główny defekt teorii Malverna. Przeprowadzone ostatnio bardziej dokładne obliczenia przez MALVERNA i EFRONA [20], KUKUDŻANOWA [21], WOODA i PHILIPSA [22], LEE [23] oraz na gruncie teorii dyslokacji przez TAYLORA [24] wykazały, że teoria Malverna-Sokołowskiego uwzględniająca wpływ prędkości odkształcenia jest w stanie opisać «plateau» zgodnie z wynikami eksperymentalnymi (zwłaszcza dla niezbyt wielkich obciążeń początkowych), które, jak wykazał LEE [23], powinny być właściwie interpretowane.

MALVERN wyjaśnia, że przyczyną rozbieżności między jego pierwszymi rezultatami i wynikami późniejszymi [20] była akumulacja błędów w metodzie różnic skończonych.

Rozbieżności przytoczone wyżej zainspirowały dalsze intensywne badania eksperymentalne propagacji fal podłużnych w prętach w celu sprawdzenia wyników obydwu teorii. Rezultaty doświadczeń KÁRMÁNA i DUWEZA [25], otrzymane dla obciążonych dynamicznie długich miedzianych prętów, wykazały dosyć dobrą, acz-

kolwiek niezupełną zgodność między mierzoną wielkością amplitudy odkształcenia («plateau»), a wartością otrzymaną ze wzoru (1.3). Rozbieżność wyników tłumaczono możliwością zależności krzywej naprężenie-odkształcenie od wpływu prędkości odkształcenia. Toteż wielu badaczy podjęło następnie próbę określenia wpływu prędkości dla różnych materiałów na drodze eksperymentalnej. Panuje ogólne przekonanie, że dla miękkiej stali granica plastyczności podnosi się znacznie wraz ze wzrostem prędkości odkształcenia. Dla materiałów nie przejawiających ściśle określonego punktu, w którym rozpoczyna się proces plastycznego płynięcia, niestety, nie ma tak ogólnej jednomyślności.

BELL [26] wykazał, że małe zaburzenia w prętach aluminiowych, przepiężonych statycznie ponad granicę plastyczności, propagują się z prędkością fal sprężystych. Taki sam rezultat otrzymał ALTER i CURTIS [27] dla prętów ołowianych przepiężonych dynamicznie. JOHNSON i CLARK [28] otrzymali krzywą dynamiczną  $\sigma = \sigma(\epsilon)$  dla wyżarzonego aluminium, która leży od 10 do 25% powyżej krzywej statycznej. HABIB [29] otrzymał identyczne rezultaty dla wyżarzonej miedzi.

Dalsze badania doświadczalne, jakie przeprowadzili STERNGLOSS i STUART [30], BELL i STEIN [31], BIANCHI [32], KOLSKI i DOUCH [33], DILLON [34], KOENIG i DILLON [35], CAMPBELL [36], KLEPACZKO [37], BARKER i inni [38] (por. również CRISTESCU [15], rozdz. III, § 9 oraz przegląd najnowszych osiągnięć otrzymanych na gruncie teorii dyslokacji, PERZYNA [39]) wykazują, że czoła fal małych zaburzeń we wstępnie przepiężonych próbkach propagują się z prędkością fali sprężystej. Wyniki te sugerują, że dla aluminium, miedzi i ołowiu równania konstytutywne służące do opisu propagacji fal plastycznych powinny zależeć od prędkości odkształcenia.

Do innych konkluzji doszedł Bell na podstawie własnych badań eksperymentalnych i jemu podobnych (por. przegląd tych zagadnień opracowany przez BELLA [40]) potwierdzonych ostatnio przez EFRONA i MALVERNA [96] oraz BERTHOLFA i KARNESA [98]. Twierdzi on, że prędkość odkształcenia nie jest czynnikiem decydującym w procesie dynamicznego odkształcenia plastycznego. Posługując się udoskonaloną techniką pomiarową, używając siatki dyfrakcyjnej wykazuje, że teoria plastyczności nie uwzględniająca wpływu prędkości opisuje doskonale propagację fal plastycznych, charakter odkształcenia w czasie całego procesu, a ponadto takie efekty jak maksimum odkształcenia, odciążenie, czas kontaktu i inne. Wykazał, że lepsze wyniki otrzyma się, jeśli zamiast zmierzonej krzywej statycznej (lub dynamicznej)  $\sigma = \sigma(\epsilon)$  wykorzysta się teoretyczną paraboliczną krzywą  $\sigma = \sigma(\epsilon)$ , otrzymaną na podstawie teorii dyslokacji przez TAYLORA [24]. Komentując konflikt między rezultatami powyższymi i otrzymanymi wcześniej [26] BELL wyjaśnia, że o ile tylko nałożone fale naprężenia są dostatecznie duże, aby zainicjować deformację plastyczną, to propagacja fal plastycznych jest zgodna z teorią niezależną od wpływu prędkości.

Reasumując należy podkreślić, że wyżarzone aluminium, które głównie w swych eksperymentach badał BELL, wykazuje bardzo znikomy efekt prędkości odkształcenia zwłaszcza przy dużych prędkościach, jakie mają miejsce przy obciążeniach uderzeniowych i wybuchowych. Zatem problem propagacji fal w tym materiale, a zwłaszcza ostateczny kształt zdeformowanej próbki, mogą być opisane adekwatnie

przez teorię plastyczności niezależną od wpływu prędkości w oparciu o pojedynczą krzywą dynamiczną, co potwierdziły również badania KOLSKIEGO i DOUCHA [33], MALVERNA i EFRONA [20] oraz innych.

Faktem bezspornym pozostaje nadal, że dla większości materiałów konstrukcyjnych zaobserwowano wyraźnie sprężystą prędkość propagacji fal małych zaburzeń. Nowe światło na metodykę badań eksperymentalnych rzuca opublikowana aktualnie praca YEW i RICHARDSONA [97].

Powyższe wyniki eksperymentalne były motywem do podjęcia w tym kierunku prac teoretycznych. RUBIN [41] zakładając fizykalne prawo Malverna w zlinearyzowanej formie wykazał, że prędkość małych zaburzeń w nieskończonym wstępnie przepiętym pręcie zgodna jest z jednowymiarową teorią Malverna. Analizując ściśle rozwiązanie asymptotyczne tego zagadnienia pokazał, że wielkość trwałego odkształcenia czoła zdeformowanego pręta zgodna jest z teorią nie uwzględniającą wpływu prędkości. Aby jednak otrzymać sprężystą prędkość propagacji fal na gruncie teorii plastyczności (nie uwzględniającej wpływu prędkości), wielu badaczy, zwolenników tej teorii, aproksymowało ciągłą krzywą naprężenie-odkształcenie linią łamaną o odcinkach prostych, mających nachylenie  $E_0$  (por. np. BELL i STEIN [31], DILLON [34], KOENIG i DILLON [35] i inni).

Niemal powszechnie sugerowano i spodziewano się, że problem propagacji małych zaburzeń zostanie wyjaśniony, jeśli w rozważaniach teoretycznych uwzględnimy efekt bezwładności poprzecznej oraz przyjmie pełny przestrzenny układ równań wyjściowych.

Przeprowadzona niżej analiza jest trójwymiarowa. Składa się zasadniczo z dwóch części. Pierwsza zawiera analizę propagacji fal harmonicznycy o małych amplitudach, w drugiej podano rozwiązanie zagadnień dynamicznych płaskiego stanu odkształcenia i naprężenia wykorzystując metodę różnic skończonych wzdłuż bicharakterystyk.

Problem propagacji infinitesimalnych fal harmonicznycy o małych amplitudach we wstępnie przepiętym cylindrycznym pręcie był analizowany dla materiału sprężystego i sprężysto-plastycznego przez HERMANA i MINDLINA [42] oraz HUNTERA i JOHNSONA [43], a dla materiału sprężysto-lepkoplastycznego przez BEJDĘ i WIERZBICKIEGO [44]. W powyższych pracach przyjmowano założenia upraszczające odnośnie rozkładu przemieszczeń wzdłuż promienia cylindra. Ściśle rozwiązanie tego zagadnienia dla obydwu typów materiału przeprowadzili WILLIAMS i MALVERN [45].

Analiza harmoniczna zagadnienia daje ogólne informacje odnośnie prędkości propagacji fal, wpływu lepkości, ocenę ważności teorii jednowymiarowej, krzywą dyspersji.

Istnieje pilna potrzeba otrzymania rozwiązań dynamicznych zagadnień teorii lepkoplastyczności w celu wyjaśnienia podstawowych zjawisk zachodzących w procesie deformacji plastycznej. Rozwiązań takich oczekuje również wiele dziedzin współczesnej techniki.

Z powodu nieliniowości równań rządzących deformacją plastyczną, gdy nie ma nadziei na otrzymanie rozwiązania ścisłego zagadnienia przestrzennego, a postęp

w technice obliczeniowej w wielu krajach osiągnął już taki poziom, że w zasadzie każdy problem brzegowy może być rozwiązany za pomocą maszyn cyfrowych, jedynie rozsądną drogą otrzymania rozwiązań wspomnianych wyżej zagadnień są metody numeryczne. BAŁTOW [46] proponuje kilka metod numerycznych, jakie mogą być z powodzeniem wykorzystane w teorii lepkoplastyczności. Wydaje się jednak, że metoda różnic skończonych wzdłuż bicharakterystyk jest najwłaściwszą do rozwiązywania zagadnień falowych w ośrodkach niesprężystych. Jej korzyść polega na tym, że otrzymuje się w bezpośredni sposób odpowiednie równania różnicowe w punktach brzegowych. Ponadto powierzchnie charakterystyczne są jednocześnie powierzchniami falowymi, zatem otrzymuje się dobrą ilustrację propagacji, odbicia i współdziałania fal. Pierwsze zastosowanie tej metody miało miejsce w dynamice gazów (BUTLER [47], BURNAT, KJELBASIŃSKI i WAKULICZ [48], RUSANOW [49]) oraz w hydrodynamice (RICHARDSON [50]). Ostatnio była stosowana w teorii sprężystości przez CLIFTONA [51], RECKERA [52], CHOU i KARPA [99] i MOCHE ZIV [100], w teorii plastyczności przez ESTRINA [53], CLIFTONA [54], BERTHOLFA i KARNESA [98], w teorii lepkoplastyczności przez BAŁTOWA [46, 55, i 101], BEJDĘ [56, 57, 58 i i 102] i MIHAILESCU [59] oraz przez SAUERWEINA [60] w mechanice ośrodków sypkich.

Efektywną w praktyce okazała się również metoda różnic skończonych przystosowana dla dużych odkształceń i różnych równań konstytutywnych, zaproponowana przez WILKINSA [61].

Jak wynika z analizy rezultatów eksperymentalnych i przeprowadzonych obliczeń numerycznych, równania teorii lepkoplastyczności (np. [62]) dobrze opisują zaobserwowane fakty eksperymentalne, uwzględniają odkształcenia plastyczne, prędkość odkształcenia i wzmocnienie materiału; w bezpośrednich obliczeniach numerycznych są one bezsprzecznie prostsze niż równania teorii plastyczności. Ponadto odnośnie analizy zbieżności i stateczności rozwiązania przybliżonego można opierać się na rezultatach otrzymanych dla teorii sprężystości (co jest nieporównywalnie łatwiejsze do wykonania), gdyż wyrazy dysypacyjne, występujące w równaniach teorii lepkoplastyczności, polepszają wyniki zbieżności.

Przez zagadnienia dynamiczne przestrzenne rozumie się w tej pracy takie zagadnienia, w których składowe przemieszczeń, odkształceń i naprężeń zależą od więcej niż jednej przestrzennej zmiennej niezależnej. Zatem wszystkie zagadnienia złożonego stanu naprężenia i odkształcenia, wprowadzające jedną zmienną przestrzenną, nie mieszczą się w ramach określonych tytułem tej pracy. Wymagają jednak, aby poświęcić im kilka słów z uwagi na zbieżności niektórych rezultatów otrzymanych dla tej teorii i teorii przestrzennej, ważność dla teorii otrzymanych rozwiązań i ich przyszłościowy kierunek badań. Będzie o nich wzmianka w rozdziale «fale płaskie». Z punktu widzenia matematycznego można zaliczyć je do zagadnień jednowymiarowych.

Przegląd wielu jednowymiarowych zagadnień brzegowych wykorzystujących płaską, cylindryczną lub sferyczną symetrię ośrodka i obciążenia przyłożonego do brzegu, metody ich rozwiązania i dyskusję tych metod można znaleźć odpowiednio w pracach HOPKINSA [63], PERZYNY i PIELORZ [64] i PIELORZ [65].

## 2. Przestrzenna analiza harmoniczna

2.1. Równania podstawowe. Propagacja fal osiowo-symetrycznych wzdłuż cylindrycznego pręta w układzie współrzędnych walcowych  $r, \theta, z$  opisana jest następującymi równaniami ruchu:

$$(2.1) \quad \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} \eta + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}$$

oraz

$$(2.2) \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} \eta = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}.$$

Na mocy symetrii zagadnienia wektory przemieszczenia i prędkości mają składowe tylko w kierunku osiowym  $z$ ,  $v_z = \partial u_z / \partial t$  i radialnym  $r$ ,  $v_r = \partial u_r / \partial t$ . Niezerowe składowe tensora prędkości odkształcenia

$$(2.3) \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} \eta, \quad \gamma_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right)$$

związane są następującymi równaniami ciągłości:

$$(2.4) \quad \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial r}, \quad \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial t} = \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial t} = \frac{v_r}{r} \eta,$$

$$\frac{\partial \gamma_{rz}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right),$$

a warunki brzegowe na pobocznicy walca  $r = a$  mają postać

$$(2.5) \quad \sigma_r = \tau_{rz} = 0.$$

Dla zagadnień brzegowych płaskiego stanu odkształcenia obowiązują te same równania (2.1) – (2.4) z tym, że należy w nich przyjąć  $\eta = 0$  zastępując  $r, z, \theta$  przez  $x, y, z$ .

2.2. Równania konstytutywne. Równania konstytutywne teorii lepkoplastyczności, opisujące materiał jednorodny, izotropowy, ściśliwy sprężyste i spełniający warunek plastyczności Hubera-Mizesa  $\sqrt{J_2} = k_0$ , gdzie  $J_2$  oznacza drugi niezmiennik dewiatora naprężenia, przyjmujemy w postaci [62]

$$(2.6) \quad \dot{e}_{ij} = \frac{1}{2\mu} \dot{s}_{ij} + \gamma < \Phi \left[ \frac{\sqrt{J_2}}{k_0} - 1 \right] > \frac{s_{ij}}{\sqrt{J_2}} \quad \text{dla} \quad \sqrt{s_2} \geq k_0,$$

$$\dot{\varepsilon}_{kk} = \frac{1}{3K} \dot{\sigma}_{kk}, \quad \text{dla} \quad \sqrt{J_2} < k_0,$$

gdzie  $e_{ij}$  i  $s_{ij}$  oznaczają odpowiednio prędkości dewiatora odkształcenia i naprężenia,  $\mu$  moduł ścinania,  $K$  moduł objętościowy;  $k_0$  jest granicą plastyczności przy czystym ścinaniu, a  $\gamma$  współczynnikiem lepkości.

Dla teorii plastyczności nie uwzględniającej prędkości odkształcenia przyjmujemy związki PRANDTLA-REUSSA [66]:

$$(2.7) \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu} \dot{s}_{ij} + \frac{1}{9K} \dot{\sigma}_{kk} \delta_{ij} + \frac{9}{4\bar{\sigma}^2} \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{d\bar{\sigma}} s_{km} \dot{s}_{km},$$

$$\kappa = \frac{d\sigma}{dA}, \quad A = \varepsilon_{kk}, \quad \bar{\sigma} = \sqrt{3J_2}, \quad d\varepsilon^p = \left[ \frac{2}{3} d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p \right]^{1/2}.$$

2.3. Analiza harmoniczna przybliżona. W celu dokonania analizy propagacji przyrostowych fal harmonicznycch o małej amplitudzie należy poczynić pewne założenia upraszczające:

1) zamiast równań konstytutywnych (2.6) korzystamy z równań HOHENEMSER-PRAGERA [67], które otrzymuje się z równań (2.6) zakładając liniową postać funkcji relaksacji; jest to w pełni uzasadnione, ponieważ rozpatrujemy tylko bardzo małe przyrosty naprężenia;

2) poszukujemy rozwiązań równań (2.1) – (2.7) w postaci rozwinięcia w szereg potęgowy wzdłuż promienia cylindra zachowując odpowiednio drugie lub trzecie potęgi  $r$  (por. MINDLIN i HERRMAN [42]);

$$(2.8) \quad \bar{u}_z = u_0(z, t) + r^2 u_2(z, t), \dots, \quad \tau_{rz} = rk_1(z, t) + r^3 k_3(z, t);$$

3) linearyzujemy warunek plastyczności w otoczeniu punktu  $P_0$  ( $\sigma_z = \sigma_0$ ,  $\sigma_r = \sigma_\theta = \tau_{rz} = 0$ ).

Ponieważ poszczególne składowe harmoniczne zmieniają się wskutek obciążenia w procesie deformacji, należy się tu kilka słów wyjaśnienia. Dla teorii lepkoplastyczności kryterium odciążenia jest takie, że jeśli stan początkowy jest quasi-statyczny, tzn. obciążenie przeprowadzone jest dostatecznie powoli, aby uniknąć efektów bezwładności, ale dostatecznie szybko, aby osiągnąć stan naprężenia przewyższający statyczną granicę plastyczności, to nałożone sinusoidalne zaburzenie o małej amplitudzie nie będzie powodowało odciążenia. W doświadczeniach jednak obserwuje się propagację impulsu, a nie poszczególnych składowych harmonicznycch. Należy więc dokonać syntezy poszczególnych harmonicznycch przez uogólnioną całkę Fouriera.

Dla teorii plastyczności cała procedura jest usprawiedliwiona, jeśli w materiale istnieje impuls przyrostu obciążenia i impuls ten może być przedstawiony w postaci uogólnionej całki Fouriera.

Przy powyższych założeniach metoda rozwiązania zagadnienia jest następująca ([43 i 44]): współczynniki rozwinięcia (2.8)  $u_0, \dots, k_3$  przedstawiamy w postaci

$$(2.9) \quad u_i = A_i \exp i\omega \left( t - \frac{z}{s(\omega)} \right),$$

gdzie  $A_i = A_i^0 \exp(-\eta z)$  dla teorii lepkoplastyczności i  $A_i = A_i^0$  dla teorii plastyczności. Przez podstawienie zdefiniowanych w (2.8) wyrażeń najpierw do równań ruchu i przyrównanie wyrażeń przy odpowiednich potęgach  $r$ , a następnie przez podstawienie do równań konstytutywnych i warunków brzegowych — otrzymujemy



podstawowy układ liniowych równań różniczkowych cząstkowych o stałych współczynnikach. Przyjmując ruch harmoniczny wprowadzamy wyrażenia (2.9) do otrzymanego podstawowego układu równań, a przyrównując wyznacznik utworzony ze współczynników przy niewiadomych  $A_i^0$  do zera otrzymujemy ostatecznie jedno równanie częstości dla teorii plastyczności i dwa równania dla teorii lepkoplastyczności (drugie równanie daje związek dla dyspersji lepkościowej) wiążące prędkość fazową  $v(x)$ , współczynnik lepkości  $\gamma(x)$  i częstość  $x$ , wyrażone we współrzędnych bezwymiarowych:

$$(2.10) \quad x = \frac{a\omega}{c_0}, \quad y = a\eta, \quad v = \frac{c}{c_0}, \quad \beta = \frac{aa}{c_0}, \quad a = \frac{\gamma E}{3k}.$$

Krzywe dyspersji dla obydwu teorii są pokazane na rysunkach 3–5.

**2.4. Analiza harmoniczna Williama-Malverna.** Wyniki analizy harmonicznej, otrzymane przez HUNTERA i JOHNSONA [43] nie spełniły pokładanych nadziei co do uwzględnienia efektów bezwładności poprzecznej i ruchu przestrzennego. Poprawiły wprawdzie znacznie wielkość propagacji fal plastycznych, ale w dalszym ciągu nawet maksymalna wartość prędkości fazowej, otrzymana z ich rozważań, nie przekraczała połowy  $c_0$ , którą to wartość obserwowano w doświadczeniach STERGLASSA-STUARTA [30], BIANCHIEGO [32] i innych. Przypuszczano, że powodem tych rozbieżności jest drugie założenie upraszczające punktu poprzedniego.

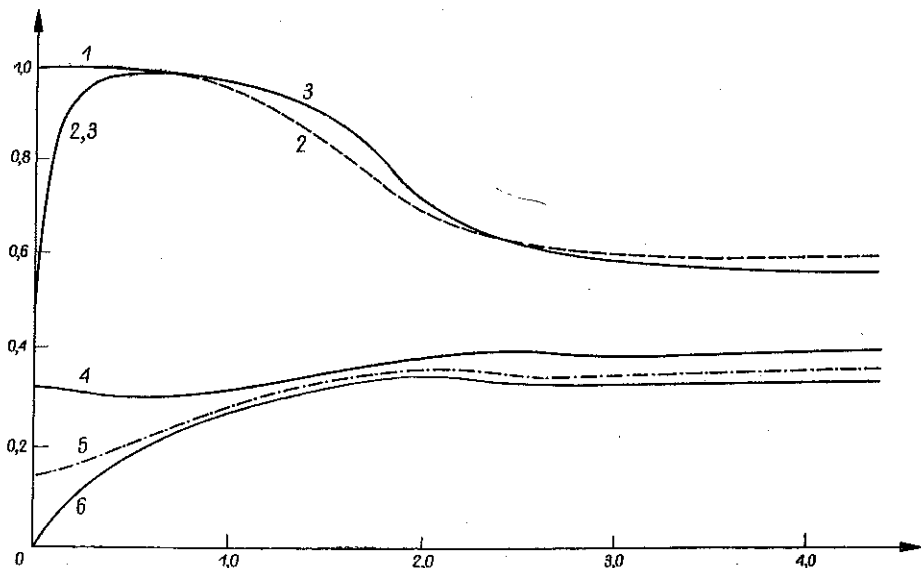
WILIAMS i MALVERN [45] stosując nieco odmienną metodę postępowania rozwiązali ten problem ściśle, tzn. nie przyjmując założenia drugiego. Autorzy zauważyli, że jeśli zlinearyzowane równania fizykałne Prandtla-Reussa zapisać dla aktualnego stanu naprężenia i dla stanu wstępnego przepiężenia, to równania konstytutywne dla małych przyrostów naprężenia, otrzymane jako różnica dwóch wyżej wspomnianych stanów, dają się bezpośrednio scałkować i odwrócić:

$$(2.11) \quad \bar{\sigma}_{11} = (\lambda + 2\mu\Phi)\bar{\Delta} + (2\mu - 6\mu\Phi)\bar{\varepsilon}_{11}, \quad \bar{\sigma}_{22} = (\lambda - \mu\Phi)\bar{\Delta} + 2\mu\bar{\varepsilon}_{22} + 3\mu\Phi\bar{\varepsilon}_{11}, \\ \bar{\sigma}_{ij} = 2\mu\bar{\varepsilon}_{ij} \quad \text{dla} \quad i \neq j.$$

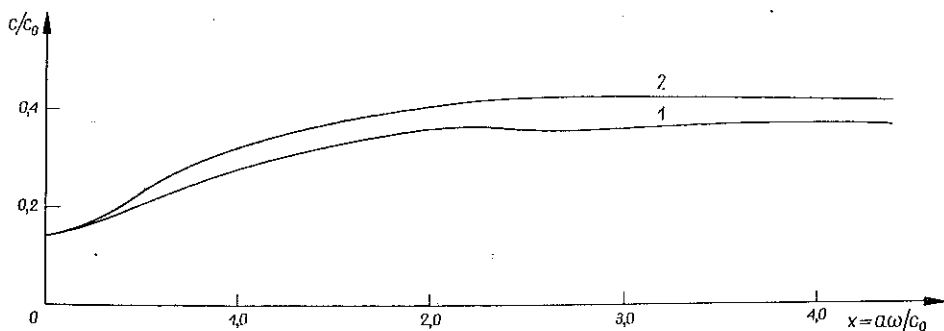
Otrzymane w ten sposób równania (2.11) mają postać analogiczną do równań klasycznej teorii sprężystości z pewnym rodzajem anizotropii określonej parametrem przepiężenia  $\Phi$ . Dalsza procedura rozwiązania jest analogiczna do postępowania Pochhammera-Chree.

W przypadku równań konstytutywnych teorii lepkoplastyczności napisanych po linearyzacji w formie przyrostowej okazuje się, że nie można ich bezpośrednio scałkować względem czasu tak jak w przypadku poprzednim. Udaje się tego dokonać dopiero po wyrażeniu wszystkich poszukiwanych funkcji w postaci (2.9) i wprowadzeniu ich do równań konstytutywnych dla przyrostów naprężenia. Otrzymane w ten sposób «przyrostowe» równania konstytutywne wraz z równaniami ruchu i warunkami brzegowymi również napisanymi w formie przyrostowej stanowią podstawowy układ równań prowadzący w sposób standardowy do równania częstości, które ma taką samą postać jak dla teorii plastyczności bez wpływu prędkości z tym, że teraz parametr  $\Phi$  oprócz stałych mechanicznych zależy również od częstości  $x$ .

2.5. Porównanie wyników i dyskusja rozwiązań. Interesujące jest porównanie krzywych dyspersji dla przedstawionych wyżej teorii Huntera-Johnsona, Bejdy-Wierzbickiego i Williama-Malverna, przyjmując dla nich jednakowe własności mechaniczne materiału. Obliczenia numeryczne przeprowadzono dla typowej miękkiej stali dla pręta o promieniu  $a = 1$  i współczynniku lepkości  $\gamma = 148/s$ , a wyniki w postaci wykresów przedstawiono na rys. 3.



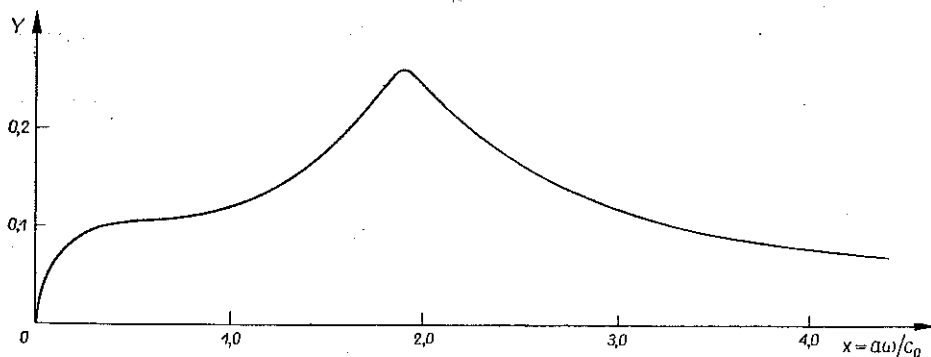
Rys. 3



Rys. 4

Krzywa 1 jest krzywą dyspersji fali sprężystej, otrzymanej przez Pochhammera-Chree. Krzywa 2 została obliczona według uproszczonej teorii Bejdy-Wierzbickiego dla materiału plastycznego z uwzględnieniem wpływu prędkości. Krzywa 3 wynika ze ścisłej teorii Williama-Malverna. Otrzymane również przez nich krzywe dyspersji 4, 5 i 6 dla materiału plastycznego są wyznaczone dla różnych poziomów przepięcia ( $c_0/c_p = 3, 7, \infty$ ), przy czym  $c_0/c_p = \infty$  reprezentuje jednoosiowe przepięcie

nie do punktu o zerowym module stycznym. Dla porównania teorii Huntera-Johnsona i Malverna-Wiliamsa na rys. 4 pokazano dwie krzywe dla  $c_0/c_p = 7$ , przy czym krzywa dolna jest krzywą 5 z poprzedniego wykresu, a krzywa 7 została wykreślona na podstawie uproszczonej teorii Huntera-Johnsona. Bezwymiarowy współczynnik tłumienia  $y$  jest wykreślony jako funkcja częstości  $x$  na rys. 5 w postaci jednej krzywej z tego powodu, że teoria ścisła i przybliżona dają w tym przypadku wynik identyczny. Zauważmy, że nawet dla  $x = 0$  z nie osiąga wartości równej zeru.



Rys. 5

Podsumujmy wyniki badań dotyczących propagacji trójwymiarowych przyrostowych fal harmonicznym w plastycznych i lepkoplastycznych długich prętach. Przede wszystkim należy podkreślić nieoczekiwanie bardzo dobrą zgodność rezultatów dla całego zakresu częstości otrzymanych dla materiału sprężysto-lepkoplastycznego według teorii ścisłej Wiliamsa-Malverna i przybliżonej Bejdy-Wierzbickiego. Dowodzi to słuszności przyjęcia założenia upraszczającego odnośnie rozkładu przemieszczeń i naprężeń wzdłuż promienia cylindra. Takiej zgodności nie otrzymuje się jednak dla nielepkkiej plastyczności. Jedynie w zakresie małych częstości wyniki się pokrywają, chociaż ogólny charakter krzywych dyspersji jest podobny. Ciekawe, że krzywa otrzymana według teorii przybliżonej leży powyżej krzywej Williamsa-Malverna dając w ten sposób lepszą zgodność z eksperymentem.

Analiza krzywych dyspersji pozwala określić zakres stosowalności elementarnej teorii propagacji fal. Dla obydwu, lepkiej i nielepkkiej teorii plastyczności jest on zawarty w niewielkim przedziale małych częstości w przybliżeniu w otoczeniu  $x = 0,75$ .

Krzywe dyspersji Huntera-Johnsona i Williamsa-Malverna wskazują, że dyspersja ma zasadniczy wpływ na propagację małych zaburzeń. Wykazano znaczny wzrost prędkości propagacji fal plastycznych ponad  $c_p$ , chociaż nie tak duży jak otrzymana eksperymentalnie prędkość  $c_0$ . Krzywe te różnią się całkowicie w kształcie od krzywej sprężystej Pochhammera-Chree. Dla  $a\omega/c_0 > 0,5$  krzywe te wykazują wzrost prędkości fazowej, co jest w kontraście z przypadkiem sprężystym. Poza tym krzywe dyspersji dla prędkości grupowej  $w_g = c(\omega) \left(1 - \frac{\omega}{c} \frac{dc}{d\omega}\right)^{-1}$  nie wykazują obszaru, w którym

$v_g$  szybko maleje wraz ze wzrostem  $\omega$ , jak to ma miejsce w odpowiednim przypadku sprężystym.

Zaobserwowano znaczny wpływ dyspersji lepkościowej, która dla małych częstości jest dominująca; począwszy od  $x = 0,5$  krzywa prędkości fazowej pokrywa się niemal zupełnie z krzywą Pochhammera-Chree.

Charakterystyczną cechą wyników otrzymanych w pracach [44 i 45] jest dążenie współczynnika tłumienia dla wysokich częstości do zera, co wskazuje na czysto sprężyste zachowanie się materiału sprężysto/lepkoplastycznego. Zachowanie się sprężysto/lepkoplastycznego pręta w zakresie niskich częstości jest w zupełnym kontraście z zachowaniem się pręta sprężystego. Prędkość fazowa dąży w tym przypadku do wartości bliskiej zeru, co implikowałoby, że w przepiężonym sprężysto/lepkoplastycznym pręcie nie mogą się propagować fale nieskończenie długie.

Reasumując, wyniki ostatnich badań eksperymentalnych oraz omówionych wyżej badań teoretycznych potwierdzają wnioski otrzymane z prac wcześniejszych, mianowicie że *obserwowane prędkości propagacji fal i charakter tych fal pokrywają się ściśle z rezultatami teorii lepkoplastyczności, a nie teorii plastyczności, nie uwzględniającej wpływu prędkości.*

Rezultaty przedstawionych tu rozważań teoretycznych nie wydają się być jeszcze w pełni wystarczające. Analiza sprężysto/lepkoplastycznych fal harmonicznych jest odzwierciedleniem raczej zjawisk zachodzących w ośrodku sprężystolepkim i nie pozwala dokładnie określić własności fal plastycznych w zakresie małych częstości jak również w zakresie wysokich częstości, gdzie jest analizą czysto sprężystą. Z drugiej strony krzywe dyspersji dla materiału sprężysto-plastycznego dają z dużym przybliżeniem spodziewany rezultat w zakresie niskich częstości, budzą natomiast wątpliwość w zakresie częstości wysokich. Nie został zbadany jeszcze bardzo istotny problem odciążania.

Problem rozwiązania przestrzennego zagadnienia dynamicznego z uwzględnieniem efektów bezwładności jest nadal problemem podstawowym zarówno dla teorii lepkoplastyczności jak i plastyczności.

**2.6. Fale płaskie.** Rozwiązanie problemu propagacji fal płaskich jest bardzo ważne zarówno dla analizy wyników teoretycznych jak i eksperymentalnych. W zagadnieniu propagacji fal w prętach występują zawsze w stopniu większym lub mniejszym efekty bezwładności poprzecznej, których pominięcie prowadzi do teorii przybliżonej, a uwzględnienie nie daje możliwości ich oceny, ponieważ występują łącznie z efektami prędkości odkształcenia. Problem fal płaskich pozostaje problemem jednoosiowym, a jednocześnie nie wprowadza żadnych uproszczeń dotyczących ruchu poprzecznego. Daje się ponadto łatwo realizować eksperymentalnie przez nagłe obciążenie powierzchni dużej płyty równomiernym ciśnieniem bądź przez zderzenie dwóch płyt wykonanych z tego samego materiału.

Ogólną analizę teoretyczną płaskich fal plastycznych przeprowadzili CRAGGS [68] i MANDEL [69]. Ich wyniki zawierają jako szczególne przypadki rezultaty otrzymane wcześniej przez WOODA, MORLANDA, FOWLESA i innych (por. CRISTESCU [15], rozdz. VII).

Craggs rozważał charakterystyki fal płaskich, niosące infinitesimalne nieciągłości naprężenia i odkształcenia, jakie mogą się propagować w ośrodku plastycznym. Otrzymał wyrażenia pozwalające określić możliwe prędkości propagacji czoł tych fal w ośrodku plastycznym, podlegającym warunkowi plastyczności Hubera-Misesa i przyrostowej teorii plastycznego płynięcia Prandtla-Reussa. Wykazano, że istnieją dwa różne rodzaje fal. Przy ogólnych warunkach początkowych naprężeniowych każda fala zawiera falę dylatacyjną i dystorsyjną, przy czym każda z nich propaguje się z prędkością fali szybkiej  $\lambda_1$  i wolnej  $\lambda_2$  spełniając następującą nierówność:

$$(2.12) \quad c_1^2 \geq \lambda_1^2 \geq c_2^2 \geq \lambda_2^2.$$

Symbole  $c_1$  i  $c_2$  oznaczają tu odpowiednio prędkość propagacji sprężystej fali dylatacyjnej i sprężystej fali ścinania.

MANDEL analizując trójwymiarowe zagadnienie propagacji fal plastycznych w ośrodku nieograniczonym w szczególnym przypadku wzmocnienia izotropowego otrzymał takie same nierówności jak Craggs.

Craggs rozważał również szczególny jednoosiowy przypadek przyrostowych fal naprężenia, propagujących się w kierunku przepiężenia  $\sigma_{11}$ . Dwie prędkości  $c_1$  i  $c_2$  odpowiadają kolejno prędkości fali podłużnej i sprężystej prędkości fali ścinania.

Przeprowadźmy dla tego przypadku analizę przyrostowych fal harmonicznym, analogiczną do przeprowadzonej w p. 2.3—2.5. W tym przypadku fale są od siebie niezależne i równania ruchu w przemieszczeniach mają postać

$$(2.13) \quad \begin{aligned} (\lambda + 2\mu - 4\mu\Phi) \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial x^2} &= \rho \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial t^2}, \\ \mu \frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial x^2} &= \rho \frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial t^2}, \quad \mu \frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Zatem dla sprężysto-plastycznych fal płaskich propagujących się w kierunku  $x$  fale poprzeczne propagują się z prędkością  $c_2$ , natomiast fale podłużne z prędkością

$$c = [(\lambda + \mu - 4\mu\Phi)]^{1/2} \text{ zmieniając się od } c_1 = \left[ \left( \lambda + \frac{2\mu}{\rho} \right) \right]^{1/2} \text{ przy } \Phi = 0 \text{ do } c = \left( \frac{K}{\rho} \right)^{1/2} \text{ przy } \Phi = \frac{1}{3}. \text{ Wyniki te pokrywają się z rezultatami Craggsa.}$$

Interesującym jest, że dla teorii lepkoplastyczności fale podłużne w kierunku jednoosiowego przepiężenia są dyspersyjne nawet dla ośrodka nieograniczonego. Dla stałej wartości  $u_x$  rozwiązaniem równania ruchu jest  $\bar{u}_x = u_x \exp [i\omega(t - \gamma x)]$  pod warunkiem, że

$$[(\lambda + 2\mu - 4\mu\Phi) - \rho c^2] u_x = 0.$$

Stąd dla  $u_x \neq 0$

$$c^2 = \frac{1}{\rho} [\lambda + 2\mu - 4\mu\Phi].$$

Ponieważ  $c = \omega/\gamma_1$ , gdzie  $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_1 - i\tilde{\gamma}_2$ , przeto prędkość fazowa i współczynnik lepkości określone są bezpośrednio przez wzory

$$(2.14) \quad \left(\frac{c}{c_1}\right)^2 = \frac{2 \left[ \left(1 - \frac{4}{3} n_2^2\right)^2 + \omega^2 \psi^2 \right]}{\left(1 - \frac{4}{3} n_2^2 + \omega^2 \psi^2\right) + \left[ \left(1 - \frac{4}{3} n_2^2 + \omega^2 \psi^2\right)^2 + \frac{16}{9} n_2^4 \omega^2 \psi^2 \right]^{1/2}},$$

$$c_1 \psi \tilde{\gamma}_2 = \frac{\frac{2}{3} n_2^2 \omega^2 \psi^2}{\left(1 - \frac{4}{3} n_2^2\right) + \omega^2 \psi^2} \frac{c}{c_1},$$

gdzie

$$\psi = \frac{\kappa^2}{2\mu\gamma}, \quad n^2 = \frac{c_2^2}{c_1^2} = (1 - 2\nu)/2(1 - \nu), \quad \tilde{\gamma}_2 = \eta.$$

Z powyższych wzorów wynika bezpośrednio, że  $c$  zmienia się monotonicznie od  $c = (K/\rho)^{1/2}$  przy  $\omega = 0$  do  $c_1 = [(\lambda + 2\mu)/\rho]^{1/2}$ , gdy  $\omega \rightarrow \infty$ , podczas gdy współczynnik lepkości  $\eta$  rośnie od zera do

$$\eta \rightarrow \frac{2\mu\gamma}{3c_1} \left( \frac{1-2\nu}{1-\nu} \right),$$

gdy  $\omega \rightarrow \infty$ .

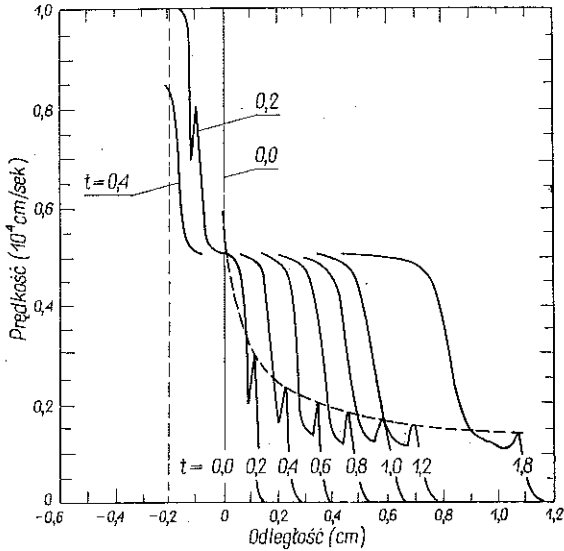
Na podstawie mikrodynamicznej teorii plastyczności TAYLOR [24] (por. także GILMAN [70]) przeprowadził interesujące badania teoretyczne i eksperymentalne propagacji fal płaskich, powstałych w wyniku zderzenia się z prędkością  $v_0$  dwóch płyt o różnej grubości, wykonanych z tego samego materiału. Do obliczeń numerycznych TAYLOR przyjmował równanie konstytutywne, uwzględniające wpływ prędkości odkształcenia, zaproponowane przez GILMANA [71] i sprawdzone przez siebie eksperymentalnie dla żelaza Armco, w następującej postaci:

$$(2.15) \quad \dot{\epsilon}^p = bv^*(N_0 + M\epsilon_p) e^{-(D + H\epsilon_p)} \sigma_s,$$

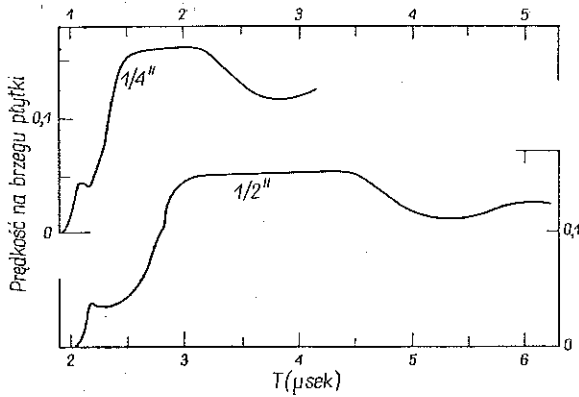
gdzie  $\sigma_s$  oznacza maksymalne naprężenie styczne,  $b$  wektor Burgersa równy  $2,5 \times 10^{-8}$  cm,  $v$  końcową prędkość dyslokacji równą  $3,2 \times 10^{-5}$  cm/s,  $N_0$  początkową gęstość dyslokacji wynoszącą  $10^6$  dysl/cm<sup>2</sup>;  $M$  jest stałym mnożnikiem równym  $10^{11}$  dysl/cm<sup>2</sup>,  $D$  charakterystycznym naprężeniem «włęczonym» (drag stress) równym 12,0 kilobarów, a  $H$  współczynnikiem wzmocnienia wynoszącym 4,1 kilobarów.

Otrzymane wykresy profili prędkości jako funkcje czasu i długości płyty są pokazane na rys. 6 i 7. Zaobserwowano i policzono charakterystyczne efekty, jakie zachodzą w dynamicznym procesie deformacji plastycznej, np. formujące się przy krawędzi uderzenia płyty charakterystyczne «plateau» odkształcenia, relaksację plastyczną oraz zmianę granicy plastyczności w zależności od grubości płyty (rys. 8). Wykazano dużą zgodność wyników eksperymentalnych i teoretycznych. Pokładane więc przez BELLA nadzieje w dynamicznej teorii dyslokacji nie spełniły się.

Problem propagacji płaskich fal naprężenia, wprowadzający więcej niż jedną składową stanu naprężenia, ale jedną zmienną niezależną przestrzenną, różni się w sposób zasadniczy od problemu jednowymiarowego. Przede wszystkim musi być brany pod uwagę pełny układ równań konstytutywnych. Występuje więcej niż jedna fala, które są na ogół związane ze sobą. Pojawia się więc bardzo trudny problem ich współdziałania, odbicia i odciążania.



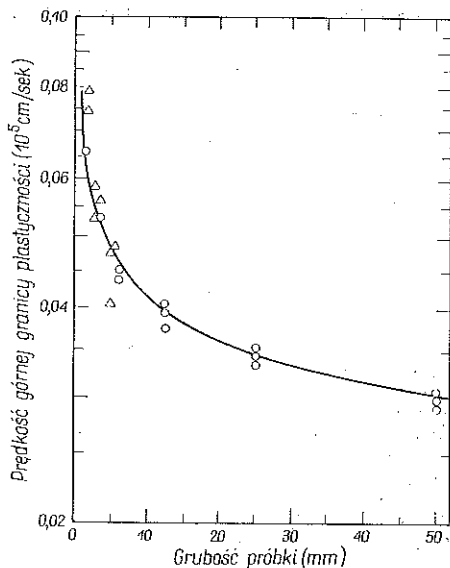
Rys. 6



Rys. 7

W ostatnich latach zainteresowanie tymi zagadnieniami znacznie wzrosło. Wymienić tu należy między innymi prace CRISTESCU [72 i 73] RACHMATULINA [74], KUKUDŻANOWA [75] i NIKITINA [76]. Duży dorobek w tej dziedzinie osiągnięty został w kraju dzięki pracom BEJDY [77 i 78], KALISKIEGO, NOWACKIEGO i WŁO-

DARCZYKA [79, 80 i 81], NOWACKIEGO [82 i 83], WŁODARCZYKA [84]. Fale podłużno-poprzeczne rozważane były również przez BLEICHA i NELSONA [85], CLIFTONA [86], VITIELLA i CLIFTONA [87]. Podwójne fale ścinania były przedmiotem badań FONGA [88] i TINGA [89]. W ostatniej pracy została przeprowadzona ścisła analiza współdziałania dwu lub więcej fal uderzeniowych spotykających się w jednym punkcie.



Rys. 8

### 3. Przestrzenna analiza numeryczna

Równania (2.1) – (2.4), (2.6) lub (2.7) opisujące deformację ośrodków sprężysto/lepkoplastycznych i sprężysto-plastycznych w warunkach obciążeń dynamicznych w płaskim i osiowo-symetrycznym stanie odkształcenia stanowią układ równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu typu hiperbolicznego

$$(3.1) \quad u_t + A^x u_x + A^y u_y + B = 0,$$

gdzie macierze  $A^x$  i  $A^y$  są rzeczywiste. W przypadku ośrodka sprężysto/lepkoplastycznego macierze  $A^x$  i  $A^y$  zależą

tylko od współrzędnych  $x, y, t$  i układ (3.1) jest semi-liniowy; w przypadku ośrodka sprężysto-plastycznego macierze te, a zatem i prędkości propagacji fal, zależą od rozwiązania  $u$ , lecz nie od pochodnych  $u$  i układ jest quasi-liniowy.

Dzięki hiperboliczności równań (3.1) i symetrii macierzy  $A^x$  i  $A^y$  ułatwiona jest analiza zjawiska rozprzestrzeniania się fal naprężenia. Podstawowym problemem, który jest stosunkowo dobrze zbadany i nie nastęrcza wielkich trudności matematycznych, jest analiza prędkości propagacji fal słabych nieciągłości. Matematyczna teoria propagacji powierzchni charakterystycznych i fal słabych nieciągłości została opracowana dla równań różniczkowych wspomnianego wyżej typu przez COURANTA [90], a następnie adoptowana i stosowana przez ESTRINA [53] i CLIFTONA [54] do ośrodków sprężysto-plastycznych, przez CLIFTONA [51] i RECKERA [52] do ośrodków sprężystych, przez BALTOWA [46] i BEJDĘ [58] do ośrodków sprężysto/lepkoplastycznych. W celu właściwej interpretacji i porównania wyników otrzymanych w powyższych pracach niezbędna jest krótka charakterystyka podstawowych wyjściowych założeń upraszczających, przyjmowanych w poszczególnych teoriach.

ESTRIN [53] rozważał równania Prandtla-Reussa opierając się na warunku plastyczności Hubera-Misesa, wyrażonym przez funkcje  $\chi$  i  $\varphi$ , spełniające tożsamościowo zależności  $\sigma_{xx} = k/2\chi - \cos 2\varphi$ ,  $\sigma_{yy} = k(2\chi + \cos 2\varphi)$ ,  $\tau_{xy} = k \sin 2\varphi$  i prawie płynięcia  $\dot{\epsilon}_{ij} = \lambda \partial f / \partial \sigma_{ij}$ . W przypadku płaskiego stanu odkształcenia i warunku Hubera-Misesa przy  $\nu = 1/2$  występuje naprężenie  $\sigma_{zz}$ , które zostało niewłaściwie określone przez ESTRINA. Dla  $\nu = 1/2$  warunek plastyczności upraszcza



się, a  $\sigma_{zz}$  przyjmuje wartość  $(1/2)(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ . Fakt ten prowadzi bezpośrednio do nieściśliwości ośrodka. ESTRIN chcąc uwzględnić ściśliwość materiału przyjmował jej liniową postać  $\dot{\epsilon}_{xx} + \dot{\epsilon}_{yy} = (1/2K)(\dot{\sigma}_{xx} + \dot{\sigma}_{yy})$ . Związek wiążący pierwsze niezmienniki trójwymiarowych tensorów prędkości odkształcenia i naprężenia zachodzi tylko wtedy, gdy  $\sigma_{zz} = b(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ , gdzie  $b$  jest wielkością stałą. Związek ten na ogół nie jest spełniony, a zatem stała  $b$  nie może być stałą materiałową.

Przyjęte w pracy [56] założenie Allena-Southewalla mówiące, że w płaskim stanie odkształcenia prędkość odkształcenia w kierunku osi  $z$  jest równa zeru, a ponadto jego części sprężysta  $\dot{\epsilon}_z^e$  i lepkoplastyczna  $\dot{\epsilon}_z^p$  są jednocześnie równe zeru oraz założenie, że materiał jest nieściśliwy — prowadzi do podobnego typu niekonsekwencji. Z przyrównania do zera sprężystej i lepkoplastycznej części prędkości odkształcenia w kierunku  $z$  wynika, że naprężenie  $\sigma_{zz}$  nie jest jednoznacznie określone. W zakresie odkształceń sprężystych

$$\sigma_{zz} = (-2\mu + 3K)(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}),$$

a dla odkształceń lepkoplastycznych mamy

$$\sigma_{zz} = 1/2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}).$$

Składowa  $\sigma_{zz}$  jest jednoznacznie określona jedynie w przypadku  $\mu = 0$ , co pociąga za sobą warunek nieściśliwości ośrodka.

Próbę uniknięcia wspomnianych wyżej niekonsekwencji przedstawiono w pracy [54]. Wykorzystanie warunku plastyczności Treski przy założeniu, że  $\sigma_{zz}$  jest średnim naprężeniem głównym prowadzi do układu równań, w którym współczynniki zależą tylko od stałych materiałowych. Nie mniej w dalszym ciągu teoria ta, chociaż nie sprzeczna, nakłada, jak zobaczymy później, dosyć silne ograniczenia. Żąda się by naprężenie  $\sigma_{zz}$  było średnim naprężeniem głównym, a wielkość  $k$ , oznaczająca granicę plastyczności przy czystym ścinaniu, była odpowiednio mała.

Dołączenie równania konstytutywnego określającego  $\sigma_{zz}$  do wyjściowego układu równań, jak to uczyniono w pracach [46 i 58], nie nakłada żadnych dodatkowych ograniczeń na naprężenie  $\sigma_{zz}$ , które, traktowane jako zmienna zależna, jest otrzymane z rozwiązania pełnego układu równań wyjściowych.

W ośrodku sprężysto/lepkoplastycznym, jak wynika z analizy propagacji powierzchni charakterystycznych  $\Phi(x, y, t) = \text{const}$ , z każdego punktu zaburzenia  $x, y, t$  propagują się dwa rodzaje fal w postaci charakterystycznych stożków kołowych opisanych równaniem

$$(3.2) \quad [\Phi_t^2 - c_1^2(\Phi_x^2 + \Phi_y^2)] [\Phi_t^2 - c_2^2(\Phi_x^2 + \Phi_y^2)] \Phi_t^2 = 0,$$

w którym dwa pierwsze wyrazy odpowiadają propagacji fal dylatacyjnych i fal ścinania z prędkościami równymi odpowiednio

$$(3.3) \quad c_1 = \left[ \frac{3K + 4\mu}{3\rho} \right] \quad \text{i} \quad c_2 = \left[ \frac{\mu}{\rho} \right]^{1/2}$$

Ostatni czynnik  $\Phi_t^2$  występujący w równaniu (3.2) nie przedstawia żadnego sensu fizycznego. BAŁTOW [46] interpretuje go jako zdegenerowane stożki charak-

terystyczne, sprowadzające się do osi  $t$  o równaniu  $x = \text{const}, y = \text{const}$ . Oznaczałoby to, że niektóre wielkości nie mogą się propagować w ośrodku sprężysto/lepkoplastycznym (propagują się z prędkością  $c = 0$ ). Okazuje się jednak [54], że wprowadzając niekiedy odpowiedni układ wielkości zmiennych niezależnych, na przykład w przypadku sprężystym, prędkości  $u$  i  $v$  oraz dylatację i obrót — podstawowy układ równań mający teraz postać:

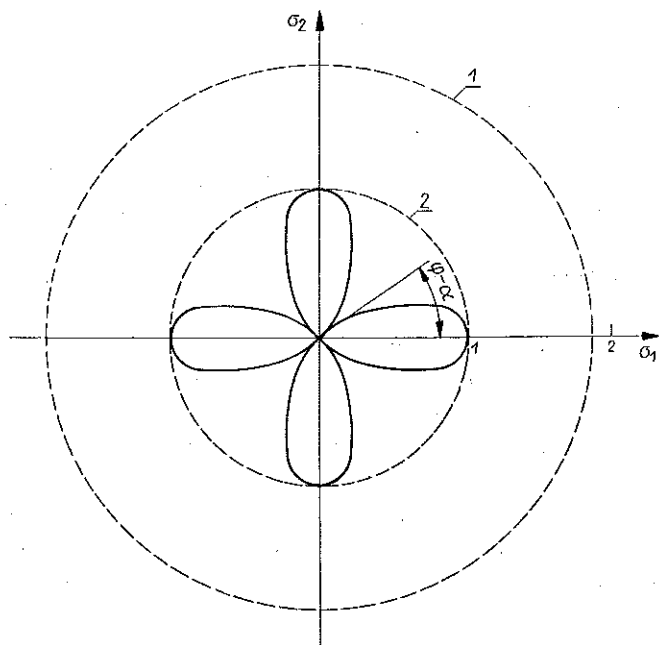
$$(\lambda + 2\mu) \theta_x - \mu \Omega_y = \rho u_t,$$

$$(\lambda + 2\mu) \theta_y + \mu \Omega_x = \rho v_t,$$

$$u_x + v_y = \theta_t,$$

$$v_x - u_y = \Omega_t$$

proceedzi do równania charakterystycznego, odpowiadającego równaniu (3.2), w którym wyrazy w postaci  $\Phi_i^2$  nie występują.



Rys. 9

Należy podkreślić, że powierzchnie słabych nieciągłości (fale naprężeń i odkształceń) w ośrodku sprężysto/lepkoplastycznym propagują się z prędkościami fal sprężystych. Założenie Allena-Southwella poczynione w pracy [56], jak się okazuje, nie ma wpływu na prędkość propagacji fal. Matematycznie tłumaczy się to tym, że nieliniowe wyrazy występujące w równaniach konstytutywnych, opisujące efekty plastyczne i lepkie nie wchodzą do analizy powierzchni charakterystycznych.

Prędkość propagacji fal w sprężysto-plastycznym ośrodku rozważanym przez ESTRINA [53] wyraża się następującym wzorem:

$$(3.4) \quad D = \pm \sqrt{\frac{c_1^2 + c^2}{2}} \pm \sqrt{\frac{(c^2 + c_1^2)^2}{4} - c^2 c_1^2 \cos^2 2(\varphi - a)},$$

gdzie  $c = \sqrt{2k/ph}$ ,  $c_1 = \sqrt{2k/ph_1}$ ,  $h = 2k/K$ ,  $h_1 = 2k/G$ , a  $a$  oznacza kąt między kierunkiem normalnej do rzutu powierzchni charakterystycznej  $\Phi = \text{const}$  na płaszczyznę  $t = \text{const}$  i osią  $x$ .

Jak wynika ze wzoru (3.4), przedstawionego wykreślnie na rys. 9, mamy dwie krzywe odpowiadające dwom typom fal. Ich cechą charakterystyczną jest to, że zależą one od kierunku propagacji i kierunku głównego naprężenia normalnego  $\varphi$ . Przy  $\varphi - a = 0$  fale te propagują się odpowiednio z prędkością fali dylatacyjnej  $c_1 = \sqrt{K/\rho}$  i fali ścinania  $c_2 = \sqrt{G/\rho}$ . Należy zauważyć, że fale dylatacyjne słabo zależą od kierunku propagacji. Reprezentująca je na rys. 9 krzywa zewnętrzna prawie zupełnie nie różni się od okręgu koła, który przedstawia prędkość propagacji sprężystych i sprężysto/lepkoplastycznych fal dylatacyjnych. Natomiast prędkość fali ścinania bardzo mocno zależy od kąta  $\varphi - a$  i w szczególności jest równa zero dla kierunku głównego naprężenia stycznego. Sprężyste fale ścinania reprezentowane są przez okrąg koła o promieniu  $\sqrt{G/\rho}$ , oznaczony na rysunku linią przerywaną.

Zmodyfikowana teoria Cliftona uwzględniająca wzmocnienie materiału oraz opierająca się na założeniu, że  $\sigma_{zz}$  jest średnim naprężeniem głównym, daje następujące wyrażenie na prędkość propagacji fal słabych nieciągłości:

$$(3.5) \quad c^2 = \frac{D \pm D^2 - GH}{H},$$

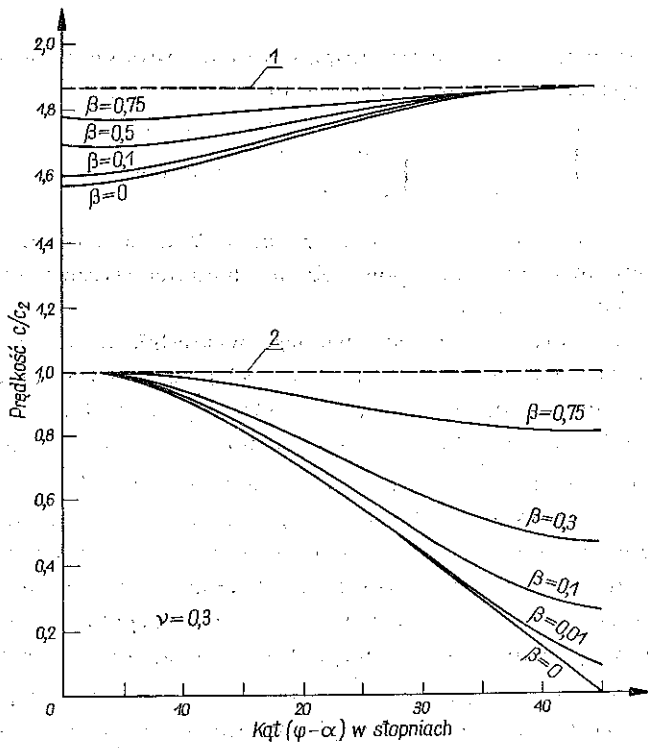
gdzie

$$D = (1 - \nu) \left[ (1 - \beta) + \frac{1}{2} (1 + \nu) \beta \left( \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} + 1 \right) \right],$$

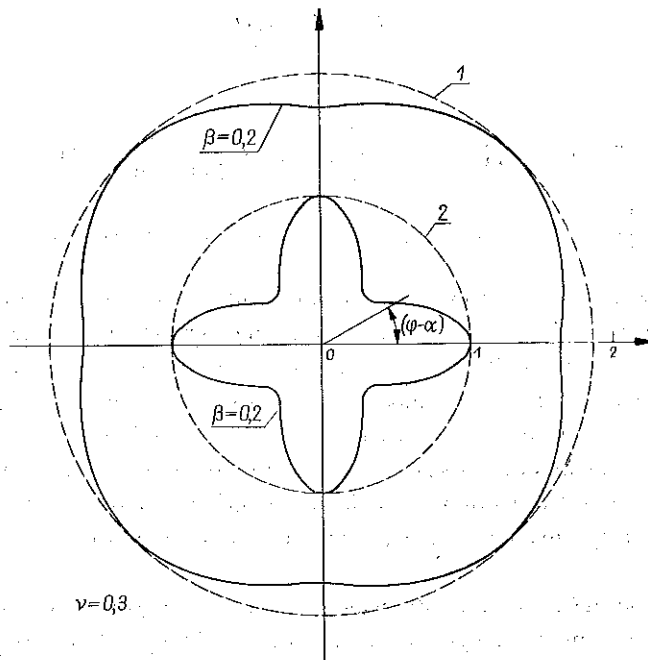
$$G = (1 - 2\nu) \left[ (1 - \beta) + \frac{1}{2} (1 + \nu) \beta \right], \quad H = (1 - \beta) \cos^2 2(\varphi - a) + (1 - \nu^2) \beta.$$

Łatwo zauważyć, że podobnie jak w przypadku rozważanym przez ESTRINA prędkość propagacji fal zależy od kierunku maksymalnych naprężeń głównych i kierunku propagacji fal. Wpływ wzmocnienia i ściśliwości materiału, scharakteryzowany odpowiednio przez parametry  $\beta$  i  $\nu$ , jest pokazany na rys. 10, a we współrzędnych biegunowych przy ustalonym  $\nu = 0,3$  i  $\beta = 0,2$  na rys. 11. Warunek  $\beta = 0$  odpowiada idealnej plastyczności,  $\beta = 1$  przypadkowi sprężystemu. Zwróćmy uwagę, że przy uwzględnieniu wzmocnienia materiału prędkości propagacji dylatacyjnych fal plastycznych różnią się wyraźnie od odpowiednich prędkości sprężystych.

Należy tu podkreślić, że fale odpowiadające na rys. 10 górnej rodzinie krzywych nie są na ogół falami dylatacyjnymi, a fale odpowiadające dolnej rodzinie nie są falami ścinania. Można je nazwać za CRAGGSEM [68] odpowiednio falami «szybkimi» i «wolnymi». Prędkość propagacji fal szybkich jest równa prędkości fal dylatacyj-



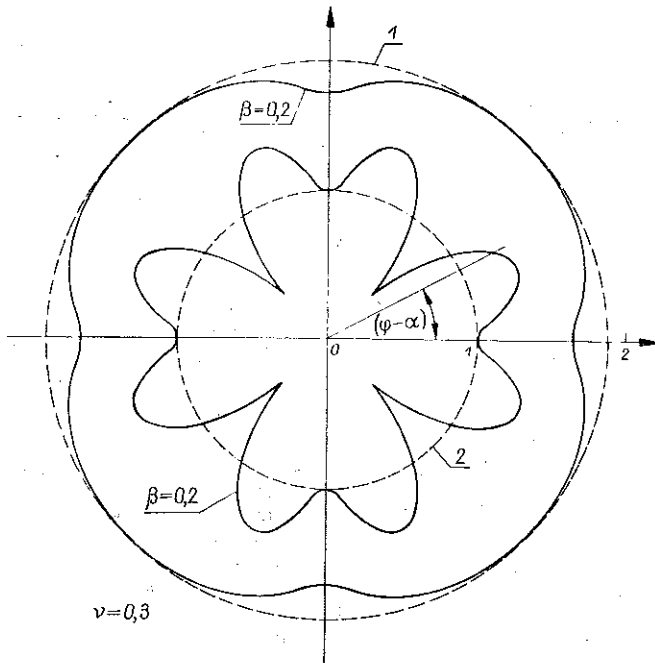
Rys. 10



Rys. 11

nych tylko dla  $\varphi - \alpha = \pi/4$ , a prędkość propagacji fal wolnych jest równa prędkości fali ścinania dla  $\varphi - \alpha = 0$ .

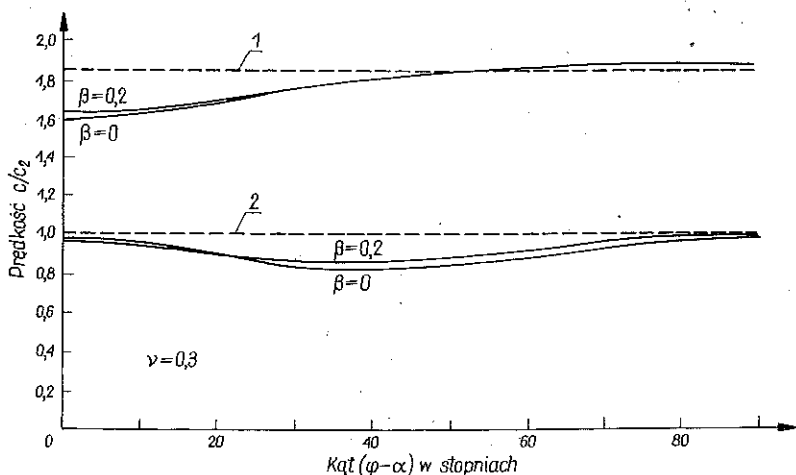
Rysunek 10 wykazuje, że dla wartości  $\beta$  mniejszych niż 0,20 efekty wzmocnienia mogą być dla fal szybkich prawie pominięte, a dla fal wolnych są istotne jedynie, gdy  $\varphi - \alpha$  zbliża się do  $\pi/4$ . Wynik ten na pierwszy rzut oka może wydawać się paradoksalny, ponieważ w jednowymiarowej teorii cienkich prętów prędkość propagacji jest proporcjonalna do pierwiastka  $\beta$ . Nie można jednak porównywać prędkości fali wewnątrz ośrodka z prędkością propagacji impulsu w cienkim przecię, gdzie obowiązują założenia 2.1, 2.2 i 2.3, o których wspominaliśmy na wstępie, a ponadto propagującym się czołom fal obydwu rodzajów towarzyszą odbicia od brzegu swobodnego.



Rys. 12

Interesujące jest również zanalizowanie stożków charakterystycznych, reprezentujących fale naprężenia, propagujące się w ośrodku plastycznym i lepkoplastycznym. Przecięcie się lokalnego stożka charakterystycznego, wychodzącego z punktu  $t_0, x_0, y_0$  z płaszczyzną  $t = t_0 - k$  jest przedstawione we współrzędnych biegunowych na rys. 12. Widoczny jest wewnętrzny i zewnętrzny stożek odpowiadający odpowiednio falom wolnym i szybkim. Dla fal sprężystych i sprężysto/lepkoplastycznych stożki te są dokładnie stożkami kołowymi. Należy podkreślić, że prędkości plastycznych fal ścinania dla pewnych wartości kąta  $\varphi - \alpha$  są większe od prędkości sprężystych. Również, jak widać z rys. 13 reprezentującego przypadek, gdy  $\sigma_{zz}$  jest maksymalnym bądź minimalnym naprężeniem głównym, prędkość propagacji fal szybkich w kierunku średniego naprężenia głównego jest nieco większa od sprę-

zycznej prędkości propagacji fali dylatacyjnej. Ten nieoczekiwany rezultat nie zgadza się z wynikami CRAGGSA [68], HILLA [91] i MANDELA [69], którzy wykazali że prędkości fal szybkich i wolnych są ograniczone przez prędkości sprężyste  $c_1$  i  $c_2$  [por. nierówność (2.12)]. BELL [92] na podstawie wyników eksperymentalnych również zaobserwował przypadki, kiedy fale plastyczne propagują się z prędkością przewyższającą  $c_1$ . Obecnie trudno jest podać jakiegokolwiek rozsądne wyjaśnienie tych rozbieżności. Można będzie tego dokonać, kiedy będziemy dysponowali większą ilością badań teoretycznych i eksperymentalnych.



Rys. 13

Równania (3.1) mogą być rozwiązane metodą różnic skończonych wzdłuż bicharakterystyk. Metoda ta w przypadku trzech i więcej zmiennych niezależnych różni się w sposób zasadniczy od dobrze znanej metody charakterystyk dla dwóch zmiennych niezależnych, polegającej na sprowadzeniu równań różniczkowych cząstkowych do układu równań różniczkowych zwyczajnych wzdłuż charakterystyk. Metoda charakterystyk nie daje się bezpośrednio przenieść na przypadek przestrzenny, ponieważ równania różniczkowe wzdłuż bicharakterystyk zawierają różniczkowanie w więcej niż jednym kierunku. Opracowana i opisana szczegółowo w pracach [54 i 58] metoda różnic skończonych dla dynamicznej teorii plastyczności i lepkoplastyczności, polegająca na wprowadzeniu różnic skończonych wzdłuż bicharakterystyk, chociaż na pierwszy rzut oka może wydawać się skomplikowana, okazała się efektywna w praktyce. Opiera się ona głównie na metodzie różnicowej opracowanej przez BUTLERA [47] dla zagadnienia brzegowego mieszanego o trzech zmiennych niezależnych, przeznaczonej do rozwiązywania zagadnień brzegowych gazodynamiki. Polega ona na wyeliminowaniu w punkcie  $t_0, x_0, y_0$ , w którym nieznanne funkcje i ich pochodne należy określić, przez liniową kombinację równań wzdłuż wybranych bicharakterystyk wszystkich pochodnych tych funkcji. Otrzymane w rezultacie schematy różnicowe wyższego rzędu okazały się identyczne z zaproponowanymi przez LAXA i WENDROFFA [93] dla układu liniowych równań różniczkowych cząstkowych.

Obliczenia numeryczne dla miękkiej stali oraz aluminium zostały przedstawione odpowiednio w pracach [58 i 54].

Istotny w metodzie numerycznej problem dowodu zbieżności we wspomnianych wyżej pracach został oparty na fizykalnych przesłankach energetycznych. Otrzymanie ścisłych matematycznych warunków zbieżności, których definicje zostały zebrane w [65], dla równań typu (3.1) z mieszanymi warunkami brzegowymi jest problemem trudnym i nadal otwartym. W literaturze matematycznej ostatnio poświęca mu się coraz więcej uwagi (por. bibliografię zawartą w [57]).

Zaproponowana ostatnio przez MAGOMEDOWA i CHOŁODOWA [94] metoda różnic skończonych wzdłuż bicharakterystyk w oparciu o wartości i wektory własne z przeznaczeniem do zagadnień przestrzennych gazodynamiki jest o wiele prostsza od metody Butlera i może być bezpośrednio zaadoptowana do dynamicznych zagadnień teorii plastyczności i lepkoplastyczności.

#### Literatura cytowana w tekście

1. L. H. DONNELL, *Longitudinal wave transmission and impact*, Trans. ASME, 52, 1930.
2. Th. KÁRMÁN, *On the propagation of plastic deformation in solids*, NDRC Report No A-29, OSRD No 365, 1942.
3. M. P. WHITE and LE VAN GRIFFIS, *The permanent strain in a uniform bar due to longitudinal impact*, J. Appl. Mech., 14 (1947).
4. G. I. TAYLOR, *The plastic wave in a wire extended by an impact load*, The scientific papers of G. I. Taylor, vol. 1, Mechanics of Solids, University Press, Cambridge 1958.
5. X. A. РАХМАТУЛИН, *О распространении волны разгрузки вдоль стержня переменного предела упругости*, ПММ, 3, 10 (1946).
6. H. G. HOPKINS, *Dynamic nonelastic deformations of metals*, Appl. Mech. Reviews, 14 (1961).
7. J. W., CRAGGS, *Elastic waves in «Progress in Solid Mechanics» 2 (1961)*.
8. N. CRISTESCU, *European contributions to dynamic loading and plastic waves*, Plasticity, Proc. 2nd Symposium on Naval Structural Mechanics, 1960.
9. H. KOLSKY, *Stress waves in solids*, J. Sound and Vibration, 1, 1964.
10. P. PERZYNA, *Fundamental problems in viscoplasticity*, Advances in Applied Mechanics, 9, (1966).
11. H. KOLSKY, *Stress waves in solids*, Clarendon Press, Oxford, Second Edition, Dover Publ., N.Y. 1963.
12. W. GOLDSMITH, *Impact*, E. Arnold Ltd., London 1960.
13. X. A. РАХМАТУЛИН, Ю. А. ДЕМЯНОВ, *Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках*, Москва 1961.
14. S. KALISKI i inni, *Drgania i fale*, PWN, Warszawa 1966.
15. N. CRISTESCU, *Dynamic Plasticity*, North Holland Publishing Company, Amsterdam 1967.
16. P. S. SYMONDS, *Survey of progress in plastic wave propagation in solid bodies*, Brown University, Final Report, 1967.
17. P. S. SYMONDS, *Survey of methods of analysis for plastic deformation of structures under dynamic loading*, Div. of Engrg, Brown University, 1967.
18. В. В. СОКОЛОВСКИЙ, *Распространение упруго-вязко-пластических волн в стержнях*, ДАН СССР, 60, 5, 1948.
19. L. E. MALVERN, *The propagation of longitudinal waves of plastic deformation in a bar of material exhibiting a strain-rate effect*, Tech. Rep., A11/39, Brown University, 1949.
20. L. E. MALVERN and L. EBERON, *Stress wave propagation and dynamic testing*, Tech. Rep., 1, Michigan State University, 1964.
21. В. Н. КУКУДЖАНОВ, *Распространение упруго-пластических волн в стержне с учетом скорости деформации*, Вычислительный Центр Академии Наук СССР, Москва 1967.

22. E. R. WOOD and A. PHILLIPS, *On the theory of plastic waves propagation in a bar*, J. Mech. Phys. Solids, 15, 4, 1967.
23. E. H. LEE, *Wave propagation in anelastic materials*, I.U.T.A.M. Colloq. Deformation and flow of solids, 1956.
24. J. W. TAYLOR, *Dislocations dynamics and dynamic yielding*, J. Appl. Phys., 10, 36 (1965).
25. Th. KÁRMÁN and P. DUVEZ, *The propagation of plastic deformation in solids*, J. Appl. Phys., 21 (1950).
26. J. F. BELL, *Propagation of plastic waves in prestressed bars*, Tech. Rep. no 5, The John Hopkins University, Baltimore 1951.
27. B. E. K. ALTER and C. W. CURTIS, *Effect of strain rate on the propagation of a plastic strain pulse along a lead bar*, J. Appl. Phys., 27 (1956).
28. J. E. JOHNSON, D. S. WOOD and D. S. CLARK, *Dynamic stress-strain relations for annealed 2S aluminum under compressional impact*, J. Appl. Mech., 20, Trans. ASME, 75, 1953.
29. E. T. HABIB, *A method of making high-speed compression tests on small copper cylinders*, J. Appl. Mech., 15, Trans. ASME, 75, 1953.
30. E. J. STERNGLASS and D. A. STUART, *An experimental study of the propagation of transient longitudinal deformations in elastoplastic media* J. Appl. Mech., 20 (1953).
31. J. F. BELL and A. STEIN, *The incremental loading wave in the prestressed plastic field*, J. de Mécanique, 1 (1962).
32. G. BIANCHI, *Some experimental and theoretical studies on the propagation of longitudinal plastic waves in a strain-rate dependent material*, Proc. I.U.T.A.M., Symposium on Stress waves in anelastic solids, H. KOLSKY and W. PRAGER, Eds, Springer, Berlin 1964.
33. H. KOLSKY and L. S. DOUCH, *Experimental studies in plastic wave propagation*, J. Mech. Phys. Solids, 10 (1962).
34. O. W. DILLON Jr, *Waves in bars of mechanically unstable materials*, J. Appl. Mech., 33 (1966).
35. M. J. KENIG and O. W. DILLON Jr., *Shock waves produced by small stress increments in annealed aluminum*, ASME, 66-WA/APM-3.
36. J. D. CAMPBELL, *An investigation of the plastic behavior of metal rods subjected to longitudinal impact*, J. Mech. Phys. Solids, 1 (1953).
37. J. KLEPACZKO, *Strain rate history effects for polycrystalline aluminium and theory of intersections*, J. Mech. Phys. Solids, 16 (1968).
38. L. M. BARKER, C. D. LUNDERGAN, W. HERMAN, *Dynamic response of aluminum*, J. Appl. Phys., 35 (1964).
39. P. PERZYNA, *On physical foundations of viscoplasticity*, Prace IPPT PAN, no 28, 1968.
40. J. F. BELL, *The dynamic plasticity of metals at high strain rates and experimental generalisation. Behavior of Materials under Dynamic Loading*, ASME Symposium, 1965.
41. R. J. RUBIN, *Propagation of longitudinal deformation waves in a prestressed rod of material exhibiting a strain-rate effect*, J. Appl. Phys., 25 (1954).
42. R. D. MINDLIN and G. HERRMAN, *A one-dimensional theory of compressional waves in elastic rods*, Proc. First US Nat. Congr. Appl. Mech. ASME, New York 1952.
43. S. C. HUNTER and I. A. JOHNSON, *The propagation of small amplitude elastic-plastic waves in prestressed cylindrical bars*, *Stress waves in anelastic solids*, Proc. I.U.T.A.M. Symposium, Providence 1963, Springer, 1964.
44. J. BEJDA and T. WIERZBICKI, *Dispersion of small amplitude stress waves in prestressed elastic, viscoplastic cylindrical bars*, Quart. Appl. Math., 24, (1966).
45. R. A. WILLIAMS and L. E. MALVERN, *Harmonic dispersion analysis of incremental waves in uniaxially prestressed plastic and viscoplastic bars, plates and unbounded media*, J. Appl. Mechanics, 1, 36 (1969).
46. A. BAŁTOW, *The plane problem for elastic/viscoplastic bodies*, Arch. Mech. Stos., 2, 18 (1966).
47. D. S. BUTLER, *The numerical solution of hyperbolic systems of partial differential equations in three independent variables*, Proc. Roy. Soc. London, A255, 1962.



48. M. BURNAT, A. KIELBASIŃSKI and A. WAKULICZ, *The method of characteristics for a multi-dimensional gas flow*, Arch. Mech. Stos., 3, 16 (1964).
49. W. W. RUSANOW, *Difference method of constant direction*, Arch. Mech. Stos., 6, 20 (1968).
50. D. J., RICHARDSON, *The solution of two-dimensional hydrodynamic equations by the method of characteristics*, Methods in Computational Physics, 3, Academic Press, 1964.
51. R. J. CLIFTON, *A difference method for plane problems in dynamic elasticity*, Quart. Appl. Math., 1, 25 (1967).
52. W. W. RECKER, *A numerical solution of three-dimensional problems in dynamic elasticity*, Ph. D. Thesis. Department of Civil Engineering, Carnegie Mellon University, 1967.
53. М. И. ЕСТРИН, *Об уравнениях динамики сжимаемой пластической среды*, ДАН СССР, 1, 135, (1960).
54. R. J. CLIFTON, *Analysis of dynamic deformation of elastic/plastic solids under conditions of plane strain*, Ph. D. Thesis, Carnegie Institute of Technology, Pittsburg, Pennsylvania 1963.
55. А. Балтов, *Плоское напряженное состояние упруго/визкопластических тел*, Механика Сплошных Средж Изд. БАН, София 1968.
56. J. WEJDA, *Rozwiązanie problemu propagacji płaskich dwuwymiarowych fal naprężenia w ośrodku sprężysto/lepkoplastycznym przy założeniu Allena-Southwella*, Prace IPPT PAN, No 34, 1968.
57. J. WEJDA, *A difference method for plane problems of dynamic viscoplasticity*, in «Partial Differential Equations and Waves», ed. M. FROISART, Springer, 1969.
58. J. WEJDA, *Propagation of two-dimensional stress waves in elastic/viscoplastic material*, Proc. 12-th International Congress of Applied Mechanics, ed. M. HETENY, Springer, 1969, oraz Technical Report No 2, Division of Engineering, Brown University, Providence, R.I., September 1968.
59. M. MIHAILESCU, *The quasilinear constitutive equations in the case of plane waves*, in press.
60. H. SAUERWEIN, *Anisotropic waves in elastoplastic soils*, Inter. J. Engrg. Sci., 5 (1967).
61. M. L. WILKINS, *Calculations of elastic-plastic flow*, Methods in Computational Physics, 3, Academic Press, 1964.
62. P. PERZYNA, *The constitutive equations for rate sensitive plastic materials*, Quart. Appl. Math., 20 (1963).
63. H. G. HOPKINS, *The method of characteristics and its application to the theory of stress waves in solids*, Engineering Plasticity, editors J. HEYMAN and F. A. LECKIE, Cambridge University Press, 1968.
64. P. PERZYNA and A. PIELORZ, *Discussion of methods of approximate solution of wave problem on an inelastic medium*, Arch. Mech. Stos., 1, 19 (1967).
65. A. PIELORZ, *Porównanie metod przybliżonego rozwiązywania problemów falowych w ośrodkach niespreżystych*, Praca doktorska, IPPT PAN, 1969.
66. R. HILL, *The mathematical theory of plasticity*, Clarendon Press, Oxford 1950.
67. K. HOHENEMSER and W. PRAGER, *Über die Ansätze der Mechanik Isotroper Continua*, Zeitschr. angew. Math. Mech., 12 (1932).
68. J. W. CRAGGS, *The propagation of infinitesimal plane waves in elastic-plastic materials*, J. Mech. Phys. Solids, 5 (1967).
69. J. MANDEL, *Ondes plastiques dans un milieu indefini à trois dimensions*, J. Méc. 1 (1962).
70. J. J. GILMAN, *Dislocation dynamics and the response of materials to impact*, Appl. Mech. Revies, 8, 21 (1968).
71. J. J. GILMAN, *A microdynamics of plastic flow at constant stress*, J. Appl. Phys., 36 (1965).
72. Н. Кристеску, *Некоторые замечания относительно распространения пластических волн в пластинках*, ПММ, 4, 19 (1955).
73. Н. Кристеску, *О распространении упруго-пластических волн при сложном нагружении*, ПММ, 6, 23 (1959).
74. X. A. Рахматулин, *О распространении упруго-пластических волн в случае сложного состояния напряжений*, ПММ, 6, 22 (1958).

75. В. Н. Кукуджанов, *Распространение цилиндрических ударных волн напряжения в пластинке за пределом текучести*, Труды МФТИ, 3, 1959.
76. Л. В. НИКИТИН, *Распространение поперечных упруго-вязко-пластических волн в балках и пластинках*, Инж. Сб., 30, 1960.
77. J. BEJDA, *The method of successive approximation applied to the wave problem of elastic/viscoplastic beams*, Arch. Mech. Stos., 6, 17 (1965).
78. J. BEJDA, *The wave problem of elastic/viscoplastic beams*, J. Méc. 6 (1966).
79. S. KALISKI, W. K. NOWACKI and E. WŁODARCZYK, *Plane biwaves in an elastic-visco-plastic semi-space*, Proc. Vibr. Probl., 2, 8 (1967).
80. S. KALISKI, W. K. NOWACKI and E. WŁODARCZYK, *Propagation of plane loading and unloading biwaves in an elastic-visco-plastic semi-infinite body. P. I-Theory, P. II-Numerical analysis*, Proc. Vibr. Probl., 3, 8 (1967).
81. S. KALISKI, W. K. NOWACKI and E. WŁODARCZYK, *The influence of straining hardening in the problem of propagation of plane loading and unloading biwaves in elastic-visco-plastic semi-infinite body*, Proc. Vibr. Probl. 4, 8 (1967).
82. W. K. NOWACKI, *Zastosowanie biliniowej teorii plastyczności do zagadnień propagacji fal podłużno-poprzecznych w półprzestrzeni*, Prace IPPT PAN, nr 12, 1968.
83. W. K. NOWACKI, *Unloading wave in an elastic-plastic half-space*, Arch. Mech. Stos., 21 (1969).
84. W. WŁODARCZYK, *Rozprzestrzenianie się i odbicie jedno i dwuwymiarowych fal naprężenia w ośrodkach plastycznych*, Praca habilitacyjna, WAT 1969.
85. H. H. BLEICH and I. NELSON, *Plane waves in an elastic-plastic half-space due to combined surface pressure and shear*, J. Appl. Mech., 33 (1966).
86. R. J. CLIFTON, *An analysis of combined longitudinal and torsional plastic waves in a thin-walled tube*, Fifth US National Congress of Applied Mechanics, June 1966.
87. D. L. VITIELLO and R. J. CLIFTON, *The numerical solution of a problem in the propagation of plastic waves of combined stresses*, Brown University Technical Report nr 4, 1967.
88. J. T. FONG, *Elastic-plastic wave in a half-space of a linearly work-hardening material for coupled shear loadings*, T. R., no 161, Div. of Engrg. Mech., Stanford University, 1966.
89. T. C. T. TING, *Interaction of shock waves due to combined two shear loadings*, T.R. No 180, Div. of Engrg. Mech., Stanford University, 1968.
90. R. COURANT and D. HILBERT, *Partial Differential Equations*, Interscience Publishers, New York-London 1962.
91. R. HILL, *Acceleration waves in solids*, J. Mech. Phys. Solids, 10 (1962).
92. J. F. BELL, *An experimental study of instability phenomena in the initiation of plastic waves in long rods*, Symposium on the Mechanical Behavior of Materials under Dynamic Loads, Springer, 1969.
93. P. D. LAX and B. WENDROFF, *Difference schemes with high order of accuracy for solving hyperbolic equations*, Comm. Pure Appl. Math., 17 (1964).
94. К. М. Магомедов, А. С. Холодов, *О построении разностных схем для уравнений гиперболического типа на основе характеристических соотношений*, Ж. Выч. Мат. и математ. физики, № 2, 9 (1969).
95. Х. А. Рахматулин, Я. У. Саатов, П. Ф. Сабодаш, И. Г. Филипов, *Двумерные задачи по неустановившемуся движению сжимаемых сред*, Ташкент 1969.
96. L. EFRON and L. E. MALVERN, *Electromagnetic velocity transducer studies of plastic waves in aluminum bars*, Exp. Mechanics, vol. 9, No 6, 1969.
97. C. H. YEW and H. A. RICHARDSON, Jr., *The strain-rate effect and the incremental plastic wave in copper*, Exp. Mechanics, vol. 9, No 8, 1969.
98. L. D. BERTHOLF and C. H. KARNES, *Axisymmetric elastic plastic wave propagation in 6061-T6 aluminum bars of finite length*, J. Appl. Mechanics, vol 36, No 3, 1969.
99. P. C. CHOU and R. R. KARP, *Two-dimensional dynamics elasticity problems by the numerical method of characteristics*, Proc. Army Symp. on Solid Mechanics, September 1968.

100. MOCHЕ ZIV, *Two-spatial dimensional elastic wave propagation by the theory of characteristics*, Int. J. Solid Structures, vol. 5, No 10, 1969.
101. Д. Каларов, А. Балтов, *Динамические проблемы вязкопластических сред в температурном поле*, Конференция Прикладной Механики, Букарешт, 23—27 июня, 1969.
102. J. WEJDA, *Propagation of plane and axially symmetric two-dimensional elastic-viscoplastic waves*, Conference of Applied Mechanics, Bucarest, June 23—27, 1969.

## Резюме

## ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НЕУПРУГИХ СРЕД

В работе проводится критический анализ распространения упруго-пластических и упруго-вязкопластических волн напряжения. Для двумерных задач теории пластичности и вязкопластичности представлено гармонический анализ и анализ, базирующийся на теории распространения волн слабых разрывов. Получены интересные заключения относительно скорости распространения упругих, упруго-пластических и упруго-вязкопластических волн. На основе теории гармонических волн, бихарактеристик и дислокации подробно рассмотрено задачу плоских волн.

## Abstract

## SPATIAL DYNAMIC PROBLEMS OF INELASTIC MEDIA

In the paper the problem of waves propagation in elastic-plastic and elastic/viscoplastic material is critically analysed and discussed. The harmonic analysis and the analysis based on the propagation of weak discontinuities for two-dimensional plasticity and viscoplasticity is given. Some interesting observations and conclusions concerning the velocity of elastic, elastic-plastic, and elastic/viscoplastic waves are obtained. In particular the problem of plane waves on the basis of harmonic, bicharacteristics and dislocation theory is discussed.

ZAKŁAD MECHANIKI OSRODKÓW CIĄGLYCH  
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI  
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

*Praca została złożona w Redakcji dnia 20 czerwca 1969 r.*