

NOŚNOŚĆ GRANICZNA POWŁOKI WALCOWEJ OBCIĄŻONEJ
LINIOWO-ZMIENNYM CIŚNIENIEM I SIŁĄ OSIOWĄ

WIESŁAW WOJEWÓDZKI, HENRYK STOLARSKI (WARSZAWA)

1. Wprowadzenie

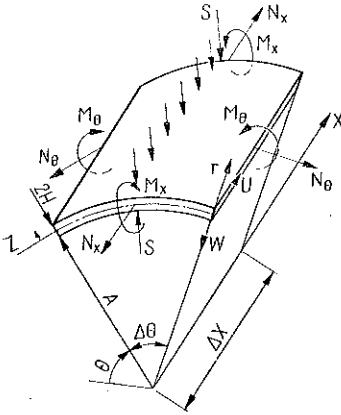
Zagadnieniu nośności granicznej powłok walcowych pod działaniem ciśnienia normalnego do powierzchni i siły osiowej poświęcono w literaturze kilka prac. E. T. ONAT [1] przyjmując kołowo-symetryczne warunki obciążenia i podparcia zbudował powierzchnię graniczną na podstawie warunku plastyczności Treski dla cienkiej, cylindrycznej powłoki pełnościennej, wykonanej z idealnie sztywno-plastycznego materiału. Korzystając z wyprowadzonej powierzchni plastyczności w pracy tej rozwiązano zagadnienie powłoki walcowej, obciążonej stałym ciśnieniem wewnętrznym i siłą osiową równomiernie rozłożoną wzdłuż krawędzi swobodnego brzegu. Drugi natomiast brzeg powłoki przyjęto jako sztywno utwierdzony. P. G. HODGE [2] wyprowadził równania powierzchni granicznej przy wykorzystaniu kryterium plastyczności Treski, przyjmując warstwową budowę ścianki powłoki. W pracy tej podano również, wykorzystując zbudowaną powierzchnię plastyczności, rozwiązanie powłoki walcowej poddanej działaniu stałego, równomiernego ciśnienia z siłą osiową i bez siły osiowej. D. C. DRUCKER i R. T. SHIELD [3] przedstawili rozwiązanie zagadnienia nośności granicznej zbiornika cylindrycznego, zakończonego dnem utworzonym z części powierzchni kulistej i toroidalnej. Obciążenie zbiornika stanowiło stałe ciśnienie. W rozwiązaniu wykorzystano uproszczone powierzchnie plastyczności opisane na dokładnej powierzchni granicznej podanej w pracy [1]. P. G. HODGE i J. PANARELLI w pracy [4] zastosowali kryterium plastyczności Hubera-Misesa oraz Treski do analizy zagadnienia powłoki walcowej, utwierdzonej na końcach obciążonej stałym ciśnieniem i siłą osiową.

Pewne informacje dotyczące wpływu siły podłużnej na nośność graniczną powłok walcowych zawierają prace [5 i 6]. Podstawowe wiadomości z teorii nośności granicznej konstrukcji podaje monograficzna praca [7]. Rozwiązania odnoszące się do powłok obrotowo-symetrycznych znaleźć można w pracach [8 i 9].

W niniejszej pracy rozpatrujemy zagadnienie nośności granicznej powłoki walcowej o krawędziach sztywno utwierdzonych, poddanej działaniu liniowo-zmiennego ciśnienia i siły osiowej. Przykładem takiego ustroju w zastosowaniach technicznych może być powłoka o brzegach utwierdzonych w sztywnych płytach z możliwością przesuwu, poddana działaniu równomiernego ciśnienia, którego wypadkowa na płyty równa jest wartości siły osiowej.

2. Założenia i podstawowe zależności

Przyjmujemy, że powłoka ma skończoną długość $2L$, promień A i grubość $2H$. Środek walcowego układu współrzędnych obieramy w środku powłoki. Ze względu na symetrię obciążenia względem płaszczyzny $X = 0$ rozpatrywać będziemy tylko połowę powłoki $0 \leq X \leq L$.



Rys. 1

Stan naprężenia w ścianie powłoki określony jest przez wypadkowe naprężenia $N_x, N_\theta, M_x, M_\theta$. Kinematykę powłoki określają składowe wektora prędkości przemieszczenia powierzchni środkowej powłoki: W w kierunku promieniowym i U w kierunku tworzącej (rys. 1).

Rozpatrywać będziemy powłoki wykonane z materiału sztywno-idealnie plastycznego. Jako kryterium plastyczności przyjmujemy warunek Treski. Zależność między polem naprężeń, a polem prędkości odkształceń określa prawo płynięcia stowarzyszone z przyjętym warunkiem plastyczności. Stosować będziemy również związki kinematyczne wyprowadzone na podstawie hipotezy Kirchhoffa o prostych normalnych.

Wprowadzimy następujące statyczne i geometryczne wielkości bezwymiarowe:

$$(2.1) \quad n_x = \frac{N_x}{N_0}, \quad n_\theta = \frac{N_\theta}{N_0}, \quad m_x = \frac{M_x}{M_0}, \quad m_\theta = \frac{M_\theta}{M_0},$$

$$p = \frac{PA}{N_0}, \quad f = \frac{F}{2\pi AN_0},$$

gdzie N_0 i M_0 jest to graniczna siła podłużna i graniczny moment zginający oraz

$$(2.2) \quad x = \frac{X}{L}, \quad z = \frac{Z}{H}, \quad w = \frac{W}{A}, \quad u = \frac{U}{L},$$

$$\kappa_x = \frac{M_0}{N_0} K_x, \quad \omega^2 = \frac{N_0 L^2}{2M_0 A}.$$

Składowe wektora obciążenia wynoszą:

$$(2.3) \quad P_x = 0, \quad P_r = |P|, \quad P_\theta = 0.$$

Korzystając z (2.1), (2.2) i (2.3), interesującym nas związkiem geometrycznym w przypadku małych przyrostów odkształceń oraz równaniom równowagi po wyeliminowaniu z nich siły poprzecznej nadajemy postać [7 i 8]

$$(2.4) \quad \lambda_x = u', \quad \lambda_\theta = -w, \quad \kappa_x = -\frac{w''}{2\omega^2}, \quad \kappa_\theta = 0,$$

$$\varepsilon_x = \lambda_x - 2z\kappa_x, \quad \varepsilon_\theta = \lambda_\theta,$$

$$n'_x = 0, \quad m''_x + 2\omega^2(n_\theta + p) = 0.$$

Przecinkiem oznaczyliśmy różniczkowanie względem x .

Z równania (2.4)₂ wynika, że

$$(2.5) \quad n_x = f \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq 1.$$

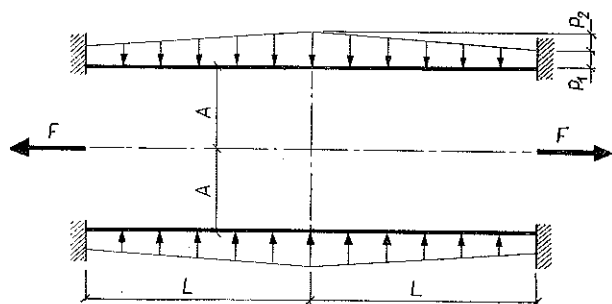
Rozpatrywać będziemy następujące przypadki:

$$A \quad -1 < f \leq -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} \leq f < 1;$$

$$B \quad f = -1, \quad f = 1;$$

$$C \quad -\frac{1}{2} \leq f \leq 0, \quad 0 \leq f \leq \frac{1}{2}.$$

Schemat statyczny rozważanej powłoki przedstawiono na rys. 2.



Rys. 2

3. Powierzchnia graniczna

W teorii cienkich powłok cylindrycznych obciążonych kołowo-symetrycznie mamy $\kappa_\theta = 0$ i moment obwodowy może być traktowany jako reakcja [8]; zatem warunek plastyczności jest funkcją $\Phi(n_x, n_\theta, m_x) = 0$. Do rozwiązania zagadnienia zastosujemy powierzchnię plastyczności wyprowadzoną w pracy [2] przy wykorzystaniu kryterium plastyczności Treski i przyjęciu warstwowej budowy ścianki powłoki (rys. 3a, b, c, d):

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \text{I}^\pm &: n_\theta = \pm 1, & \text{IV}^\pm &: -n_x - m_x = \pm 1, \\ \text{II}^\pm &: n_\theta - n_x = \pm 1, & \text{V}^\pm &: 2n_\theta - n_x - m_x = \pm 2, \\ \text{III}^\pm &: -n_x + m_x = \pm 1, & \text{VI}^\pm &: 2n_\theta - n_x + m_x = \pm 2. \end{aligned}$$

W przypadku powłoki o ściance pełnej o grubości $2H$ i granicy plastyczności materiału σ_0

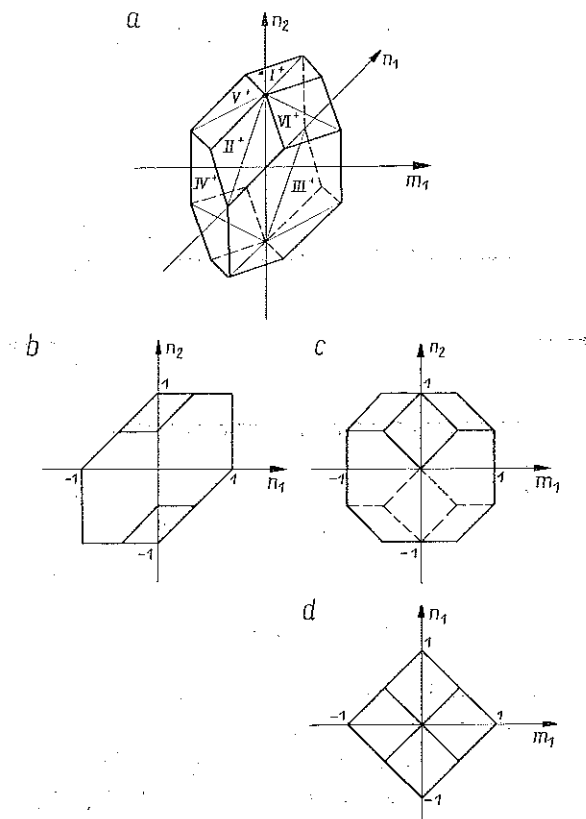
$$(3.2) \quad N_0 = 2\sigma_0 H, \quad M_0 = \sigma_0 H^2.$$

Dla powłoki warstwowej złożonej z dwóch cienkich warstw nośnych o granicy plastyczności materiału σ_{01} , każda grubości J , przedzielonych warstwą wypełniającą o grubości $2H_1$ odpowiednie wielkości wynoszą

$$(3.3) \quad N_0 = 2\sigma_{01} J, \quad M_0 = 2\sigma_{01} H_1 J.$$

Zatem dwie powłoki będą równoważne, jeżeli

$$(3.4) \quad \sigma_0 H = \sigma_{01} J, \quad H = 2H_1.$$



Rys. 3

4. Przypadek A

Dla wartości f określonych warunkami A przekrój powierzchni granicznej jest prostokątem (rys. 4a, b). W przypadku działania ciśnienia skierowanego do środka powłoki $\varepsilon_\theta = -w < 0$ i stan naprężenia w chwili uplastycznienia jest reprezentowany odcinkiem DE .

Dla $-1 < f \leq -1/2$

$$(4.1) \quad n_\theta = -1,$$

i różniczkowe równanie równowagi (2.4)₃ przedstawiamy w postaci

$$m_x'' = 2\omega^2 p_2 x - 2\omega^2 (p_1 + p_2 - 1).$$

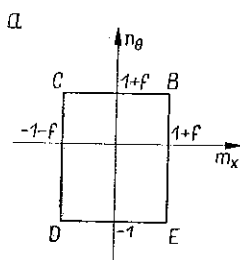
Całkując powyższe równanie i wykorzystując warunki brzegowe

$$(4.2) \quad m_x(0) = 1 + f, \quad m_x'(0) = 0, \quad m_x(1) = -1 - f,$$

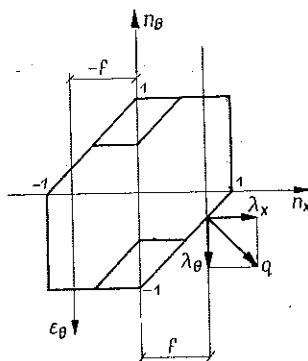
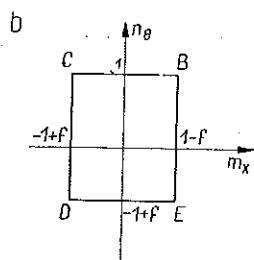
otrzymujemy

$$(4.3) \quad m_x = \frac{1}{3} \omega^2 p_2 x^3 - \omega^2 \left(\frac{2}{\omega^2} + \frac{2f}{\omega^2} + \frac{1}{3} p_2 \right) x^2 + 1 + f,$$

$$p_1 = 1 + \frac{2}{\omega^2} + \frac{2f}{\omega^2} - \frac{2}{3} p_2.$$



Rys. 4



Rys. 5

Ponieważ profil naprężeń jest reprezentowany bokiem (4.1) powierzchni granicznej, więc zgodnie ze stowarzyszonym prawem płynięcia i związkami (2.4)₁ współrzędne wektora prędkości odkształcenia muszą spełniać równania (rys. 5)

$$(4.4) \quad \bar{q} = (-w, u', -w''/2\omega^2) = \lambda (-1, 0, 0).$$

Stąd spełniając warunki brzegowe

$$(4.5) \quad w(0) = w_0, \quad w(1) = 0,$$

otrzymujemy

$$(4.6) \quad u = u_0, \quad w = w_0(1-x).$$

W punkcie $x = 0$ stan naprężenia jest reprezentowany przecięciem się boków

$$n_\theta = -1, \quad -n_x + m_x = 1;$$

zatem wektor prędkości odkształcenia nieskończenie blisko punktu $x = 0$ jest przedstawiony w postaci

$$(4.7) \quad \bar{q} = \lambda (-1, 0, 0) + \mu (0, -1, 1).$$

Z drugiej strony ze względu na nieciągłość w' w punkcie $x = 0$ otrzymujemy [8]

$$(4.8) \quad \bar{q} = \left(\frac{1}{\Delta x} \right) \left\{ 0, u \right\}, - \frac{w'}{2\omega^2}.$$

Symbol] oznacza skok rozpatrywanej wielkości. Przyrównując oba wyrażenia (4.7) i (4.8) i eliminując nieznanne parametry $\lambda \Delta x$, $\mu \Delta x$, otrzymujemy

$$(4.9) \quad u] = \frac{w']}{2\omega^2}.$$

Podobnie można pokazać, że osiowa prędkość przemieszczenia ma nieciągłość

$$(4.10) \quad u] = -\frac{w']}{2\omega^2}$$

dla $x = 1$. A więc uwzględniając (4.6) z zachowaniem symetrii widzimy, że

$$(4.11) \quad u = -\frac{w_0}{2\omega^2}, \quad w = w_0(1-x), \quad 0 < x < 1$$

i sztywne płyty, w jakich mogłyby być utwierdzona powłoka na końcach $x = 1$, poruszałyby się z prędkością

$$(4.12) \quad u_1 = -\frac{w_0}{\omega^2}.$$

Dla $+1/2 \leq f < 1$

$$(4.13) \quad n_\theta = -1 + f.$$

Korzystając z (2.4)₃ i warunków brzegowych

$$(4.14) \quad m'_x(0) = 0, \quad m_x(0) = 1 - f, \quad m_x(1) = -1 + f,$$

otrzymujemy

$$(4.15) \quad m_x = \frac{1}{3} \omega^2 p_2 x^3 - \omega^2 \left(\frac{2}{\omega^2} - \frac{2f}{\omega^2} + \frac{1}{3} p_2 \right) x^2 + 1 - f,$$

$$p_1 = \left(\frac{2}{\omega^2} + 1 \right) (1 - f) - \frac{2}{3} p_2.$$

Stan naprężenia w powłoce jest określony równaniem (4.13) warunku plastyczności, zatem postępując jak w zadaniu poprzednim otrzymujemy (rys. 5)

$$(4.16) \quad \bar{q} = \lambda(-1, 1, 0), \quad w = w_0(1-x), \quad 0 < x < 1, \quad u = \frac{w_0}{2} \left(2x - x^2 + \frac{1}{\omega^2} \right).$$

Uzyskane rozwiązania są kinematycznie dopuszczalne, ponieważ wektor plastycznego płynięcia ma wszędzie kierunek zewnętrznej normalnej do powierzchni granicznej oraz są spełnione kinematyczne warunki brzegowe. Warunkiem statycznej dopuszczalności rozwiązania jest spełnienie nierówności

$$(4.17) \quad \min m_x \leq m_x(x) \leq \max m_x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Funkcja m_x na końcach interesującego nas przedziału przyjmuje wartości graniczne. Ze względu na to, że jest to wielomianem trzeciego stopnia, ma ona najwyżej

dwa punkty ekstremalne, przy czym jeden jest w punkcie $x = x_1 = 0$. Warunkiem statycznej dopuszczalności jest zatem spełnienie jednej z dwu poniższych nierówności:

$$(4.18) \quad x_1 \geq 1, \quad x_2 \leq 0.$$

Uzasadnić to można w następujący sposób: jeżeli założymy, że punkt $x = x_2$ znajduje się w obszarze powłoki, a wartość momentu w tym punkcie nie przekracza wartości granicznej, to możemy stwierdzić, że styczna do krzywej $m_x(x)$ w tym punkcie przecina tę krzywą w punkcie znajdującym się w obszarze powłoki. Ponieważ funkcja $m_x(x)$ ma ciągłą pochodną, a więc pomiędzy tymi punktami musi leżeć punkt, w którym styczna do krzywej jest równoległa do poprzedniej, a wartość momentu jest ekstremalna. Byłoby to już trzecie ekstremum funkcji $m_x(x)$, podczas gdy mogą być tylko dwa. Wynika z tego, że jeżeli punkt $x = x_2$ znajduje się w obrębie powłoki, to wartość momentu w tym punkcie musi przekraczać określoną dla danego f rzędną graniczną. Jeżeli więc ma być spełniony warunek stanu granicznego, to musi być spełniona jedna z nierówności (4.18).

Dla $-1 < f \leq -1/2$ otrzymujemy

$$m'_x = \omega^2 p_2 x \left(x - \frac{2p_2 \omega^2 + 12f + 12}{3p_2 \omega^2} \right) = 0,$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{2p_2 \omega^2 + 12f + 12}{3p_2 \omega^2}.$$

Dla $p_2 > 0$

$$\frac{2p_2 \omega^2 + 12f + 12}{3p_2 \omega^2} \geq 1 \quad \text{lub} \quad \frac{2p_2 \omega^2 + 12f + 12}{3p_2 \omega^2} \leq 0,$$

$$f \geq -1 + \frac{p_2 \omega^2}{12}, \quad f \leq -1 - \frac{p_2 \omega^2}{6}.$$

Dla $p_2 < 0$

$$f \leq -1 + \frac{p_2 \omega^2}{12}, \quad f \geq -1 - \frac{p_2 \omega^2}{6}.$$

Obszar statycznej dopuszczalności rozwiązania jest więc określony przez nierówności

$$(4.19) \quad \begin{aligned} f &\geq -1 + \frac{p_2 \omega^2}{12} && \text{dla } p_2 > 0, \\ f &\geq -1 - \frac{p_2 \omega^2}{6} && \text{dla } p_2 < 0. \end{aligned}$$

Postępując analogicznie otrzymujemy dla $1/2 \leq f < 1$

$$(4.20) \quad \begin{aligned} f &\leq 1 - \frac{p_2 \omega^2}{12} && \text{dla } p_2 > 0, \\ f &\leq 1 + \frac{p_2 \omega^2}{6} && \text{dla } p_2 < 0. \end{aligned}$$

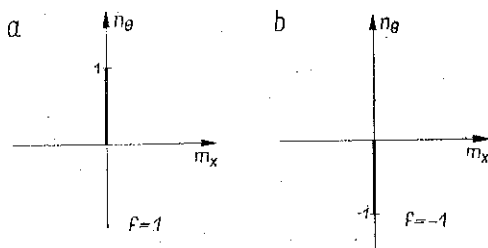
5. Przypadek B

Dla takich wartości f przekrój powierzchni granicznej płaszczyzną $n_x = f$ przedstawiono w układzie osi n_θ , n_x , (rys. 6a, b). Uwzględniając w równaniu równowagi (2.4)₃ $m_x = 0$ dla $f = \pm 1$ otrzymujemy

$$(5.1) \quad n_\theta = -p_1, \quad n_\theta = p_2 x - (p_1 + p_2).$$

Rozwiązanie to będzie statycznie dopuszczalne, jeżeli spełnimy następujące nierówności:

$$(5.2) \quad \begin{aligned} 0 \leq n_\theta(x) \leq 1 & \quad \text{dla } f = 1, \\ -1 \leq n_\theta(x) \leq 0 & \quad \text{dla } f = -1. \end{aligned}$$



Rys. 6

Ponieważ $n_\theta(x)$ jest funkcją liniową, zatem nierówności (5.2) będą spełnione na całej długości powłoki, jeżeli tylko warunek stanu granicznego spełnimy na końcach przedziału.

Dla $f = 1$

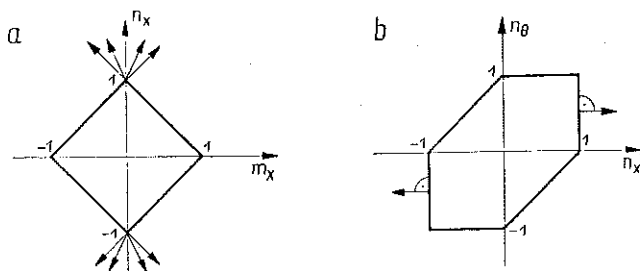
$$\begin{aligned} 0 \leq n_\theta(0) \leq 1, \quad 0 \leq n_\theta(1) \leq 1, \\ -p_2 \geq p_1 \geq -1 - p_2, \quad 0 \geq p_1 \geq -1, \end{aligned}$$

a więc ostatecznie otrzymujemy

$$(5.3) \quad \begin{aligned} -p_2 \geq p_1 \geq -1 & \quad \text{dla } p_2 > 0, \\ 0 \geq p_1 \geq -1 - p_2 & \quad \text{dla } p_2 < 0. \end{aligned}$$

Dla $f = -1$

$$(5.4) \quad \begin{aligned} 0 \leq p_1 \leq 1 - p_2 & \quad \text{dla } p_2 > 0, \\ -p_2 \leq p_1 \leq 1 & \quad \text{dla } p_2 < 0. \end{aligned}$$



Rys. 7

W rozpatrywanym tu przypadku powierzchnia graniczna ma punkty osobliwe (rys. 7a, b), w których wektor prędkości odkształcenia jest kombinacją liniową wektorów ograniczających, prostopadłych do sąsiednich odcinków powierzchni

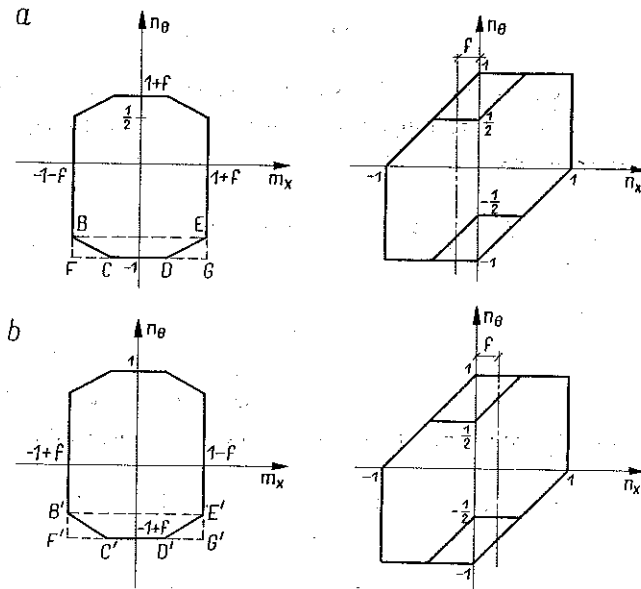
granicznej. Otrzymujemy zatem, wykorzystując również związki (2.4)₁ i symetrię, pole prędkości określone z dokładnością do stałej wielkości

$$(5.5) \quad \lambda_\theta = 0, \quad \lambda_x = u_0, \quad \kappa_x = 0, \\ u = \pm u_0 x, \quad w = 0, \quad \text{dla } f = \pm 1.$$

6. Przypadek C

W tym przypadku zagadnienie jest bardziej skomplikowane i trudno jest znaleźć dokładne rozwiązanie; można jednak z pewną dokładnością określić obszar, w którym to dokładne rozwiązanie się znajduje.

W wyniku przecięcia powierzchni granicznej otrzymujemy krzywą, która nie jest już prostokątem (rys. 8a, b).



Rys. 8

Można założyć, że pod wpływem działania ciśnienia zewnętrznego występują w ściance powłoki odkształcenia $\varepsilon_\theta < 0$. Wówczas stan naprężenia będzie reprezentowany łamaną $BCDE$ lub $B'C'D'E'$. Wynik otrzymany dla tej łamanej będzie leżał pomiędzy wynikami otrzymanymi dla warunku stanu granicznego przybliżonego prostymi BE i FG albo $B'E'$ i $F'G'$.

Rozwiązanie dla przybliżenia prostymi FG i $F'G'$ będzie takie jak dla $-1 < f \leq -1/2$ i $1/2 \leq f < 1$, jeżeli zakres poprawności tego rozwiązania rozszerzy się odpowiednio dla $-1/2 \leq f \leq 0$ i $0 \leq f \leq 1/2$. Będzie to zewnętrzna granica obciążenia granicznego. W celu określenia wewnętrznej granicy musimy znaleźć rozwiązanie dla przybliżenia określonego prostymi BE i $B'E'$.

Dla $-1/2 \leq f \leq 0$

$$(6.1) \quad n_0 = f - \frac{1}{2}.$$

Wprowadzając tę wartość do (2.4)₃ i uwzględniając warunki brzegowe

$$m'_x(0) = 0, \quad m_x(0) = 1+f, \quad m_x(1) = -1-f,$$

otrzymujemy

$$(6.2) \quad m_x = \frac{1}{3} \omega^2 p_2 x^3 - \omega^2 \left(\frac{2f}{\omega^2} + \frac{2}{\omega^2} + \frac{1}{3} p_2 \right) x^2 + 1+f,$$

$$p_1 = \left(\frac{2}{\omega^2} - 1 \right) f + \frac{2}{\omega^2} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} p_2.$$

Położenie ekstremalnych rzędnych otrzymamy rozwiązując równanie

$$m'_x(x) = 0.$$

Wobec tego, że funkcje (4.3)₁ i (6.2)₁ są identyczne, rozwiązanie jest statycznie dopuszczalne dla wartości f określonych przez (4.19). Prędkości przemieszczeń w tym przypadku określają wzory

$$(6.3) \quad u = \frac{w_0}{2} \left(x^2 - 2x - \frac{1}{\omega^2} \right), \quad w = w_0(1-x), \quad 0 < x < 1.$$

Dla $0 \leq f \leq 1/2$

$$(6.4) \quad n_0 = -\frac{1}{2}.$$

Podstawiając (6.4) do równania (2.4)₃ i korzystając z warunków brzegowych

$$(6.5) \quad m'_x(0) = 0, \quad m_x(0) = 1-f, \quad m_x(1) = -1+f,$$

otrzymujemy

$$(6.6) \quad m_x = \frac{1}{3} p_2 \omega^2 x^3 - \omega^2 \left(\frac{2}{\omega^2} - \frac{2f}{\omega^2} + \frac{1}{3} p_2 \right) x^2 + 1-f,$$

$$p_1 = \frac{2}{\omega^2} - \frac{2f}{\omega^2} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} p_2.$$

Statyczną dopuszczalność rozwiązania określają warunki (4.20), a pole prędkości przemieszczeń wzory

$$(6.7) \quad u = \frac{w_0}{2\omega^2}, \quad w = w_0(1-x), \quad 0 < x < 1.$$

Równania opisujące wewnętrzną granicę obszaru, w którym znajduje się dokładna krzywa granicznego obciążenia, są przydatne tylko wtedy, gdy granica, jaką opisują,

jest wypukła. W przeciwnym przypadku lepsze przybliżenie daje połączenie dwóch punktów leżących na znanej części dokładnej krzywej granicznej. Ponieważ w naszym przypadku ograniczenie dolne stanowią dwie proste o ujemnych tangensach kąta, jaki tworzą z dodatnią półosią f , rozwiązanie jest przydatne, gdy

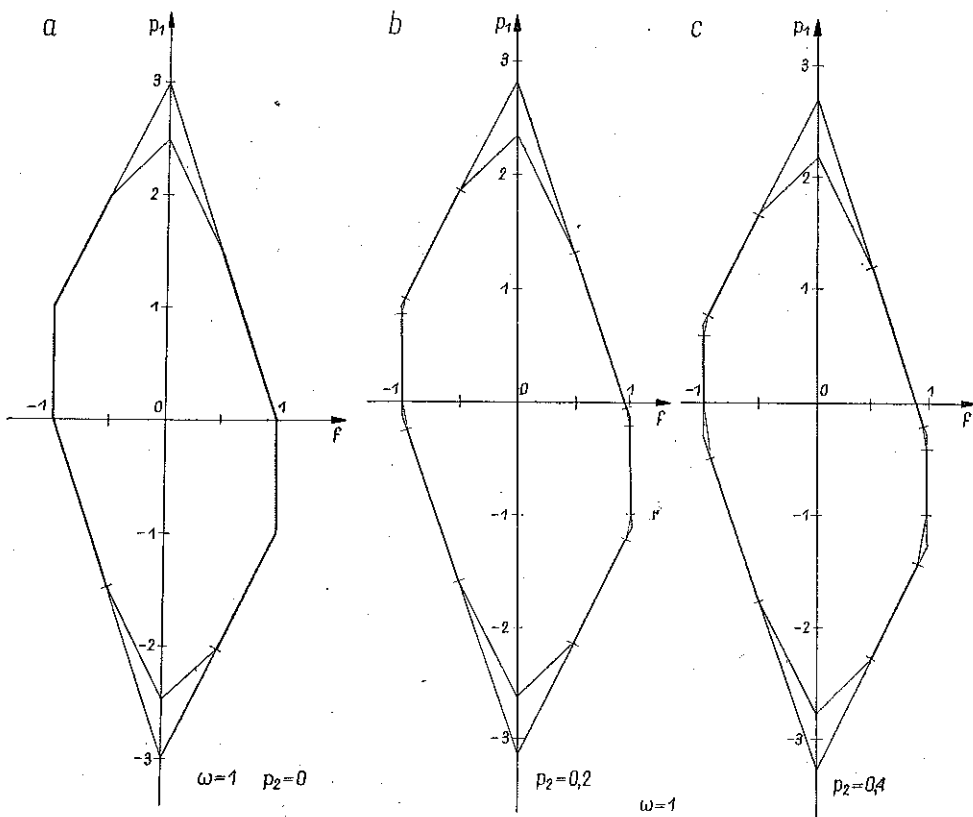
$$-\frac{2}{\omega^2} \leq \frac{2}{\omega^2} - 1;$$

stąd, uwzględniając sens geometryczny ω , otrzymujemy

$$(6.8) \quad 0 < \omega \leq 2.$$

7. Przykłady ilustrujące wpływ parametru charakteryzującego geometrię powłoki na dokładność określenia powierzchni granicznego obciążenia

Wyniki obliczeń dla dwóch wartości $\omega = 1$ i $\omega = 2$ zamieszczono w tablicy 1. Rysunki 9 (a, b, c, d, e) i 10 (a, b, c, d, e) przedstawiają odpowiednie krzywe graniczne, których równania podano w tablicy 1.



Rys. 9

Maksymalna różnica pomiędzy ograniczeniem zewnętrznym a wewnętrznym obszaru, w którym znajduje się dokładna krzywa graniczna, wynosi dla $p_2 = 0$

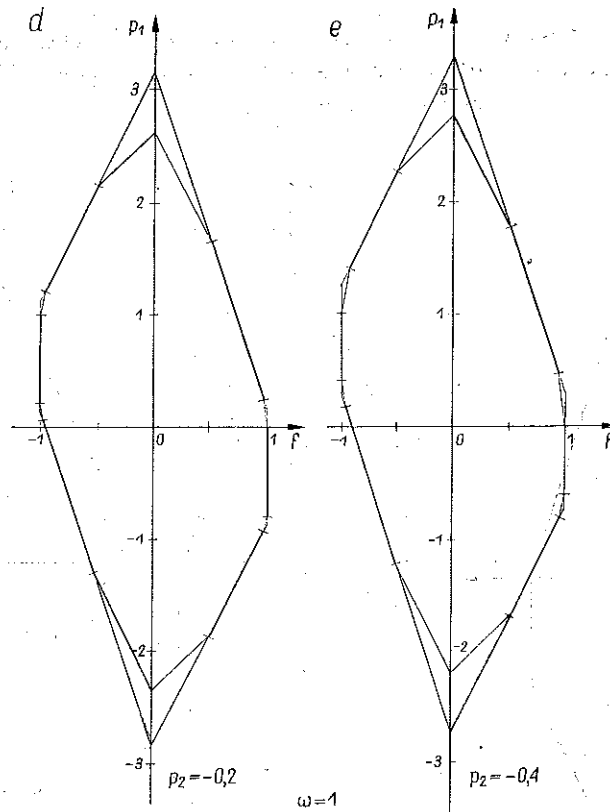
$$\Delta p_1 = \frac{1}{2} \quad \text{dla } \omega \leq 2,$$

$$\Delta p_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{\omega^2} \quad \text{dla } \omega \geq 2,$$

a odpowiednio maksymalny błąd względny jest równy

$$\frac{\Delta p_1}{\min p_1} = \frac{\omega^2}{4 + \omega^2} \quad \text{dla } \omega \leq 2,$$

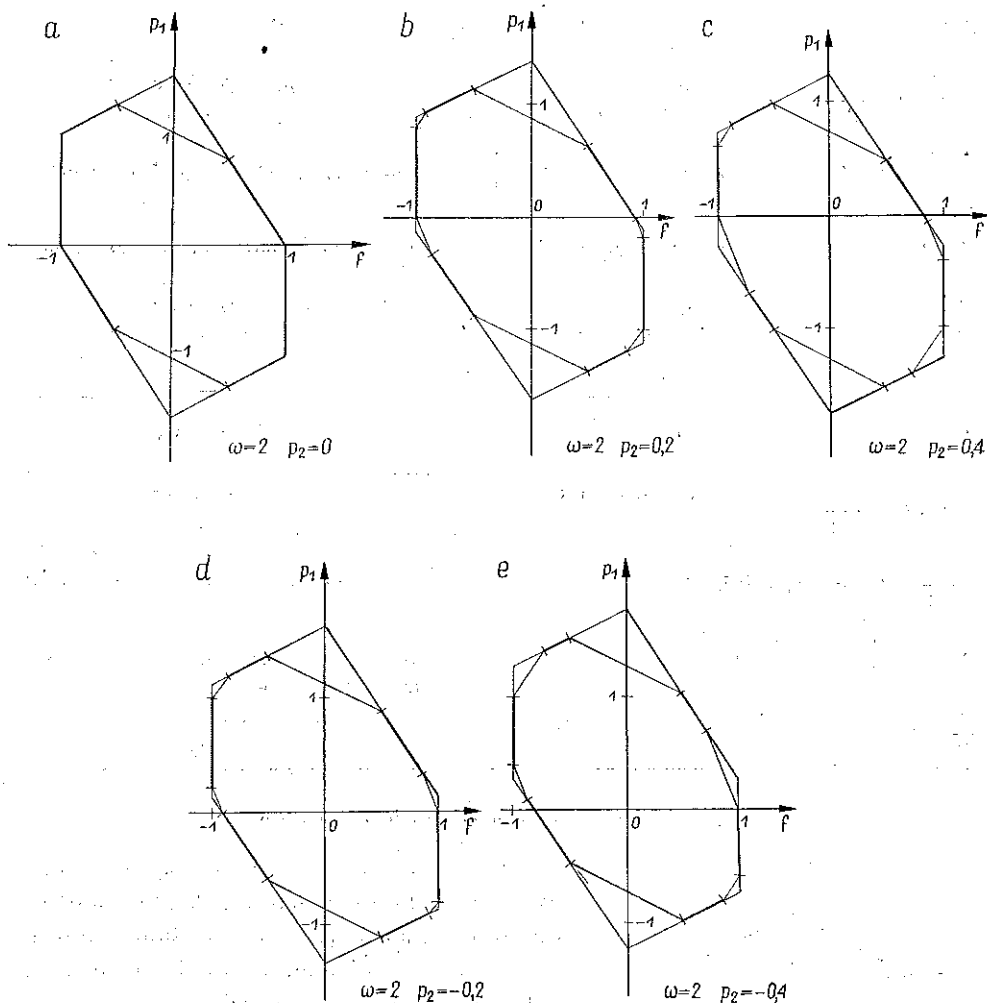
$$\frac{\Delta p_1}{\min p_1} = \frac{\omega^2 + 4}{3\omega^2 + 4} \quad \text{dla } \omega \geq 2.$$



Rys. 9

Otrzymane wyniki (rys. 9 i 10) wskazują, że dla obciążenia stałego ($p_2 = 0$) dla wszystkich wartości ω i tylko dla $-1/2 \leq f \leq 1/2$ krzywa graniczna nie jest wyznaczona w sposób dokładny (znajduje się ona w obszarze określonym przez granicę zewnętrzną i wewnętrzną). Natomiast dla pozostałych wartości f z przedziału

$-1 \leq f \leq 1$ i wszystkich ω krzywa granicznego obciążenia jest wyznaczona w sposób ścisły. Zgodnie z (6.8) dla $\omega \geq 2$ granicę wewnętrzną stanowi prosta łącząca dwa punkty leżące na znanej krzywej obciążenia. W przypadku obciążenia liniowo-zmiennego tworzą się dodatkowo obszary, w których nie jest znana ścisła krzywa obciążenia granicznego.



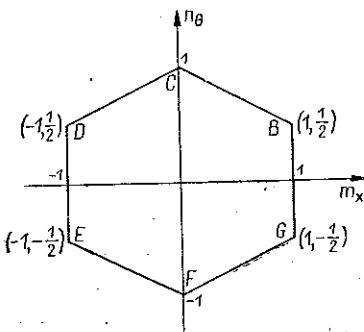
Rys. 10

Granice wewnętrzną otrzymano korzystając z warunku wypukłości krzywej obciążenia przez połączenie prostą dwóch punktów na znanej krzywej. Obszary te pojawiają się, gdy wartość siły osiowej f jest bliska ± 1 ; są one konsekwencją spełnienia nierówności (4.18). W miarę, gdy obciążenie normalne staje się coraz bardziej nierównomierne i wartość ω rośnie, obszary te powiększają się w kierunku malejącej bezwzględnej wartości siły osiowej.

Tablica 1

	$p_2 = 0$		$p_2 = 0,2$	
	Granica			
	zewnątrzna	wewnętrzna	zewnątrzna	wewnętrzna
	$\omega = 1$			
$f = -1$	$0 < p_1 < 1$		$0 < p_1 < 0,8$	
$-1 < f < \frac{1}{2}$	$p_1 = 2f + 3$ $f > -1$		$p_1 = 2f + 2,867$ $f > -0,9833$	
$-\frac{1}{2} < f < 0$	$p_1 = 2f + 3$	$p_1 = f + \frac{5}{2}$	$p_1 = 2f + 2,867$	$p_1 = f + 2,367$
$0 < f < \frac{1}{2}$	$p_1 = -3f + 3$	$p_1 = -2f + \frac{5}{2}$	$p_1 = -3f + 2,867$	$p_1 = -2f + 2,367$
$\frac{1}{2} < f < 1$	$p_1 = -3f + 3$ $f < 1$		$p_1 = -3f + 2,867$ $f < 0,9833$	
$\omega = 2$				
$f = -1$	$0 < p_1 < 1$		$0 < p_1 < 0,8$	
$-1 < f < -\frac{1}{2}$	$p_1 = 0,5f + 1,5$ $f > -1$		$p_1 = 0,5f + 1,367$ $f > -9,33$	
$-\frac{1}{2} < f < 0$	$p_1 = 0,5f + 1,5$	$p_1 = -0,5f + 1$	$p_1 = 0,5f + 1,367$	$p_1 = -0,5f + 0,867$
$0 < f < \frac{1}{2}$	$p_1 = -1,5f + 1,5$	$p_1 = -0,5f + 1$	$p_1 = -1,5f + 1,367$	$p_1 = -0,5f + 0,867$
$\frac{1}{2} < f < 1$	$p_1 = -1,5f + 1,5$ $f < 1$		$p_1 = -1,5f + 1,367$ $f < 0,933$	

8. Uściślenie wyników otrzymanych w punkcie 6



Rys. 11

Dla $-1/2 \leq f \leq 1/2$ w rozwiązaniu podanym poprzednio nie znamy dokładnej wartości obciążeń granicznych, a określony obszar, w którym te dokładne wartości znajdują się, jest dość duży, co prowadzić może do znacznych błędów. Korzystając z teorii o wypukłości krzywej obciążeń granicznych, można zmniejszyć obszar nieznanymi dokładnie obciążeniami, jeżeli rozwiążemy zagadnienie dla chociaż jednej, ustalonej wartości f z przedziału $(-1/2, 1/2)$. Przyjmujemy do dalszej analizy wartość $f = 0$.

Przekrój powierzchni plastyczności płaszczyzną $f = 0$ przedstawia rys. 11.

Tablica 1

$p_2 = 0,4$		$p_2 = -0,2$		$p_2 = -0,4$	
Granica					
zewnątrzna		wewnętrzna		zewnątrzna	
zewnątrzna		wewnętrzna		zewnątrzna	
$\omega = 1$					
$0 < p_1 < 0,6$		$0,2 < p_1 < 1$		$0,4 < p_1 < 1$	
$p_1 = 2f + 2,733$ $f \geq -0,9667$		$p_1 = 2f + 3,133$ $f \geq -0,967$		$p_1 = 2f + 3,267$ $f \geq -0,933$	
$p_1 = 2f + 2,733$	$p_1 = f + 2,233$	$p_1 = 2f + 3,133$	$p_1 = f + 2,633$	$p_1 = 2f + 3,267$	$p_1 = f + 2,767$
$p_1 = -3f + 2,733$	$p_1 = -2f + 2,233$	$p_1 = -3f + 3,133$	$p_1 = -2f + 2,633$	$p_1 = -3f + 3,267$	$p_1 = -2f + 2,767$
$p_1 = -3f + 2,733$ $f < 0,967$		$p_1 = -3f + 3,133$ $f < 0,967$		$p_1 = -3f + 3,267$ $f < 0,933$	
$\omega = 2$					
$0 < p_1 < 0,6$		$0,2 < p_1 < 1$		$0,4 < p_1 < 1$	
$p_1 = 0,5f + 1,233$ $f \geq -0,867$		$p_1 = 0,5f + 1,633$ $f \geq -0,867$		$p_1 = 0,5f + 1,767$ $f \geq -0,733$	
$p_1 = 0,5f + 1,233$	$p_1 = -0,5f + 0,733$	$p_1 = 0,5f + 1,633$	$p_1 = -0,5f + 1,133$	$p_1 = 0,5f + 1,767$	$p_1 = -0,5f + 1,267$
$p_1 = -1,5f + 1,233$	$p_1 = -0,5f + 0,733$	$p_1 = -1,5f + 1,633$	$p_1 = -0,5f + 1,133$	$p_1 = -1,5f + 1,767$	$p_1 = -0,5f + 1,267$
$p_1 = -1,5f + 1,233$ $f < 0,867$		$p_1 = -1,5f + 1,633$ $f < 0,867$		$p_1 = -1,5f + 1,767$ $f < 0,733$	

8.1. Pierwszy możliwy profil prędkości przemieszczenia. Założymy, że w płaszczyźnie symetrii prostopadłej do osi powłoki i na końcach utwierdzonych powstają okręgi przegubów plastycznych oraz że n_θ będzie wszędzie ujemne. Stan sił wewnętrznych będzie reprezentowany przez boki GF i FE warunku granicznego:

$$(8.1) \quad \begin{aligned} n_\theta &= \frac{1}{2} m_{x1} - 1 && \text{dla } 0 \leq x \leq x_0, \\ n_\theta &= -\frac{1}{2} m_{x2} - 1 && \text{dla } x_0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Przez x_0 oznaczono wartość x , gdzie $m_x = 0$.

Podstawiając (8.1) i wielkość $p = p_1 + p_2(1-x)$ do równania równowagi (2.4)₃, a następnie całkując otrzymujemy funkcję m_x zawierającą cztery stałe całkowania, wielkości ciśnienia p_1 i p_2 oraz wielkość x_0 . Do wyznaczenia tych wielkości dyspo-

ujemy następującymi sześcioma warunkami brzegowymi i warunkami ciągłości sił wewnętrznych:

$$(8.2) \quad \begin{aligned} m'_{x_1}(0) &= 0, & m_{x_1}(0) &= 1, & m_{x_1}(x_0) &= 0, \\ m_{x_2}(x_0) &= 0, & m'_{x_1}(x_0) &= m'_{x_2}(x_0), & m_{x_2}(1) &= -1. \end{aligned}$$

Przyjmujemy, że wielkość p_2 będzie reprezentować niewyznaczony parametr. Wynik powyższych operacji jest następujący:

$$(8.3) \quad \begin{aligned} p_1 &= p_2 \left[\frac{\omega x_0 - \sin \omega x_0}{\omega(1 - \cos \omega x_0)} - 1 \right] + \frac{2 - \cos \omega x_0}{2(1 - \cos \omega x_0)}, \\ \frac{2p_2}{\omega} \frac{3 - 3 \cos \omega x_0 - \omega x_0 \sin \omega x_0}{1 - \cos \omega x_0} - \frac{\sin \omega x_0}{1 - \cos \omega x_0} &= \\ &= 2p_2(1 - x_0) \frac{\operatorname{ch}(\omega - \omega x_0)}{\operatorname{sh}(\omega - \omega x_0)} - \left\{ 2p_2 \left[\frac{\omega x_0 - \sin \omega x_0}{\omega(1 - \cos \omega x_0)} - 1 \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\cos \omega x_0}{1 - \cos \omega x_0} \right\} \frac{1 - \operatorname{ch}(\omega - \omega x_0)}{\operatorname{sh}(\omega - \omega x_0)} - \frac{1}{\operatorname{sh}(\omega - \omega x_0)}, \\ m_{x_1} &= -\frac{2p_2}{\omega} \sin \omega x + \left[2p_2 \frac{\omega x_0 - \sin \omega x_0}{\omega(1 - \cos \omega x_0)} + \frac{1}{1 - \cos \omega x_0} \right] \cos \omega x + 2p_2 x - \\ &\quad - 2 \left[p_2 \frac{\omega x_0 - \sin \omega x_0}{\omega(1 - \cos \omega x_0)} + \frac{2 - \cos \omega x_0}{2(1 - \cos \omega x_0)} \right] + 2, \\ m_{x_2} &= \left\langle 2p_2(1 - x_0) \frac{\operatorname{ch} \omega}{\operatorname{sh}(\omega - \omega x_0)} - \frac{\operatorname{ch} \omega x_0}{\operatorname{sh}(\omega - \omega x_0)} + \right. \\ &\quad \left. + \left\{ 2p_2 \left[\frac{\omega x_0 - \sin \omega x_0}{\omega(1 - \cos \omega x_0)} - 1 \right] + \frac{\cos \omega x_0}{1 - \cos \omega x_0} \right\} \frac{\operatorname{ch} \omega - \operatorname{ch} \omega x_0}{\operatorname{sh}(\omega - \omega x_0)} \right\rangle \operatorname{sh} \omega x + \\ &\quad + \left\langle -2p_2(1 - x_0) \frac{\operatorname{sh} \omega}{\operatorname{sh}(\omega - \omega x_0)} + \frac{\operatorname{sh} \omega x_0}{\operatorname{sh}(\omega - \omega x_0)} - \right. \\ &\quad \left. - \left\{ 2p_2 \left[\frac{\omega x_0 - \sin \omega x_0}{\omega(1 - \cos \omega x_0)} - 1 \right] + \frac{\cos \omega x_0}{1 - \cos \omega x_0} \right\} \frac{\operatorname{sh} \omega - \operatorname{sh} \omega x_0}{\operatorname{sh}(\omega - \omega x_0)} \right\rangle \times \\ &\quad \times \operatorname{ch} \omega x - 2p_2 x + 2p_2 \frac{\omega x_0 - \sin \omega x_0}{\omega(1 - \cos \omega x_0)} + \frac{\cos \omega x_0}{1 - \cos \omega x_0}. \end{aligned}$$

Warunkiem statycznej dopuszczalności rozwiązania jest spełnienie nierówności

$$(8.4) \quad \begin{aligned} 0 \leq m_{x_1}(x) \leq 1 & \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq x_0, \\ -1 \leq m_{x_2}(x) \leq 0 & \quad \text{dla} \quad x_0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

W rozpatrywanym przypadku siła osiowa wynosi zero i osiowe przemieszczenie nie jest istotne. Otrzymujemy zatem korzystając z (2.4)₁ i (8.1) oraz stowarzyszonego prawa płynięcia

$$(8.5) \quad \begin{aligned} \bar{q} &= \left(-w, -\frac{w''}{2\omega^2} \right) = \lambda \left(-1, \frac{1}{2} \right) & \text{dla } 0 < x < x_0, \\ \bar{q} &= \lambda \left(-1, -\frac{1}{2} \right) & \text{dla } x_0 < x < 1. \end{aligned}$$

Eliminacja nieznanego parametru λ prowadzi do dwóch równań różniczkowych jednorodnych drugiego rzędu:

$$(8.6) \quad \begin{aligned} w_1'' + \omega^2 w_1 &= 0 & \text{dla } 0 < x < x_0, \\ w_2'' - \omega^2 w_2 &= 0 & \text{dla } x_0 < x < 1. \end{aligned}$$

Całkując powyższe równania i uwzględniając warunki ciągłości przemieszczeń i warunki brzegowe

$$(8.7) \quad w_1'(x_0) = w_2'(x_0), \quad w_1(x_0) = w_2(x_0) = w_0, \quad w_2(1) = 0,$$

otrzymujemy pole prędkości przemieszczeń określone z dokładnością do stałej wartości w_0 :

$$(8.8) \quad \begin{aligned} w_1 &= w_0 [\cos(\omega x_0 - \omega x) + \operatorname{ctgh}(\omega - \omega x_0) \sin(\omega x_0 - \omega x)], \\ w_2 &= w_0 \frac{\operatorname{sh}(\omega - \omega x)}{\operatorname{sh}(\omega - \omega x_0)}. \end{aligned}$$

Rozwiązania powyższe są kinematycznie dopuszczalne, jeśli spełniając kinematyczne warunki brzegowe wektor prędkości plastycznego płynięcia ma zawsze kierunek zewnętrznej normalnej do powierzchni granicznej. W szczególności to żądanie musi być spełnione w miejscu nieciągłości $w'(0)$, a więc otrzymujemy

$$(8.9) \quad w_1'(0) \leq 0, \quad w(x) \geq 0.$$

Ze względu na to, że określenie statycznej i kinematycznej dopuszczalności rozwiązania jest bardzo pracochłonne, gdyż wymaga żmudnych obliczeń numerycznych, ograniczymy się tylko do podania algorytmu.

Chodzi mianowicie o znalezienie takiego przedziału wartości ω , dla których spełnione byłyby nierówności (8.4) i (8.9). W tym celu korzystamy z równania (8.3)₂, z którego przy ustalonej wartości p_2 wyliczamy x_0 w funkcji ω . Następnie mając obliczone x_0 wyeliminujemy je z równań określających rozkład momentów i prędkości przemieszczeń. Badając dalej tylko wartości ekstremalne momentów i ugięć oraz $w_1'(0)$ możemy określić wartości ω spełniające jednocześnie nierówności (8.4) i (8.9). Jest to jednak schemat bardzo formalny, gdyż ogólnie określenie x_0 w funkcji ω z równania (8.3)₂ jest niemożliwe. W związku z tym przy ustalonym p_2 należy wprowadzać do (8.3)₂ kolejno różne wartości ω , przy czym określać dopiero parametr x_0 .

Przyjęte ω i obliczone x_0 należy wstawić do wzorów na m_x i w i zbadać, jak zachowują się funkcje w przedziale $0 \leq x_0 \leq 1$. Jeżeli spełnione będą nierówności (8.4) i (8.9), znaczy to, że przyjęta wartość ω leży w przedziale statycznej i kinematycznej dopuszczalności rozwiązania.

8.2 Drugi możliwy profil prędkości przemieszczenia Dla pewnych wartości ω istnieje możliwość powstania mechanizmu zniszczenia, w którym w płaszczyźnie symetrii nie powstaje okrąg przegubów plastycznych, lecz zachowana jest gładkość funkcji $w(x)$, czyli $w'(0) = 0$. Analiza podobna do przeprowadzonej w punkcie 8.1, z wykorzystaniem warunków

$$(8.10) \quad \begin{aligned} m'_{x_1}(0) &= 0, & m'_{x_1}(x_0) &= m'_{x_2}(x_0), \\ m_{x_1}(x_0) &= m_{x_2}(x_0) = 0, & m_{x_2}(1) &= -1, \\ w'_1(0) &= 0, & w_1(x_0) &= w_2(x_0) = w_0, \\ w'_1(x_0) &= w'_2(x_0), & w_2(1) &= 0, \end{aligned}$$

proceedzi do następujących wyników:

$$(8.11) \quad \begin{aligned} p_1 &= \left\{ 2\omega \left[\operatorname{tg} \omega x_0 - \frac{1 - \operatorname{ch}(\omega - \omega x_0)}{\operatorname{sh}(\omega - \omega x_0)} \right] \right\}^{-1} \times \\ &\quad \times \left\{ 2p_2 \left[\frac{2 \cos \omega x_0 - 1 + (x_0 - 1) \omega \sin \omega x_0}{\cos \omega x_0} \right] - \right. \\ &\quad \left. - 2p_2 \omega (1 - x_0) \operatorname{ctgh}(\omega - \omega x_0) - 2\omega \frac{1 - \operatorname{ch}(\omega - \omega x_0)}{\operatorname{sh}(\omega - \omega x_0)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega}{\operatorname{sh}(\omega - \omega x_0)} + 2\omega \operatorname{tg} \omega x_0 \right\}, \\ m_{x_1} &= -\frac{2p_2}{\omega} \sin \omega x + 2 \left\{ \frac{p_2}{\omega} \operatorname{tg} \omega x_0 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\cos \omega x_0} [p_2(x_0 - 1) - p_1 + 1] \right\} \cos \omega x + 2p_2 x - 2(p_1 + p_2 - 1), \\ m_{x_2} &= 2 \left[p_2 \frac{(1 - x_0) \operatorname{ch} \omega}{\operatorname{sh}(\omega - \omega x_0)} - (1 - p_1) \frac{\operatorname{ch} \omega - \operatorname{ch} \omega x_0}{\operatorname{sh}(\omega - \omega x_0)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\operatorname{ch} \omega x_0}{2 \operatorname{sh}(\omega - \omega x_0)} \right] \operatorname{sh} \omega x + 2 \left[(1 - p_1) \frac{\operatorname{sh} \omega - \operatorname{sh} \omega x_0}{\operatorname{sh}(\omega - \omega x_0)} - \right. \\ &\quad \left. - p_2 (1 - x_0) \frac{\operatorname{sh} \omega}{\operatorname{sh}(\omega - \omega x_0)} + \frac{\operatorname{sh} \omega x_0}{2 \operatorname{sh}(\omega - \omega x_0)} \right] \operatorname{ch} \omega x - \\ &\quad - 2p_2 x + 2(p_1 + p_2 - 1), \\ \operatorname{tg} \omega x_0 &= \operatorname{ctgh}(\omega - \omega x_0), \\ w_1 &= w_0 \frac{\cos \omega x}{\cos \omega x_0}, & w_2 &= w_0 \frac{\operatorname{sh}(\omega - \omega x)}{\operatorname{sh}(\omega - \omega x_0)}. \end{aligned}$$

Warunkiem statycznej i kinematycznej dopuszczalności rozwiązania jest spełnienie nierówności

$$(8.12) \quad \begin{aligned} 0 &\leq m_{x1}(x) \leq 1 && \text{dla } 0 \leq x \leq x_0, \\ -1 &\leq m_{x2}(x) \leq 0 && \text{dla } x_0 \leq x \leq 1, \\ w(x) &\geq 0 && \text{dla } 0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

W ten sposób można z pewną założoną z góry dokładnością określić przedział ω statycznej i kinematycznej dopuszczalności rozwiązania. Należy zauważyć, że teoretycznie ω może przyjmować wszystkie wartości z przedziału $[0, +\infty)$, jednak w praktyce inżynierskiej zwykle mamy ustaloną wartość z tego przedziału i analizę należy przeprowadzić tylko dla tej wartości ω .

8.3 Przykłady liczbowe. Rozwiążemy obecnie przykłady przyjmując wartości $\omega = 1, p_2 = 0; 0,2; -0,2$. Uzyskane rezultaty porównamy z wynikami podanymi w p. 6.

Założmy, że powstaje mechanizm zniszczenia rozpatrzony w p. 8.1. Jeżeli stwierdzimy, że rozwiązanie jest statycznie i kinematycznie dopuszczalne, założenie zostanie potwierdzone, w przeciwnym wypadku należy zbadać inny mechanizm.

Rozwiązanie dla $\omega = 1, p_2 = 0$ jest następujące. Równanie (8.3)₂ sprowadzimy do postaci

$$f_1(x_0) = \frac{1}{\text{sh}(1-x_0)} - \cos x_0 \text{ctgh}(1-x_0) - \sin x_0 = 0.$$

Rozwiązaniem numerycznym tego równania jest $x_0 = 0,70$. Pole momentów określone jest przez funkcje (8.3)_{3,4}:

$$\begin{aligned} m_{x1} &= 4,260 \cos x - 3,260, \\ m_{x2} &= -1,0461 \text{sh } x + 6,9399 \text{ch } x + 3,260. \end{aligned}$$

Położenie ekstremów funkcji m_x określimy z równania $m'_{x1} = -4,260 \sin x = 0$, $x = n\pi$, a więc w punkcie $x = 0$ znajdującym się na obszarze powłoki warunek jest spełniony, oraz z równania

$$m'_{x2} = -1,0461 \text{ch } x + 6,9399 \text{sh } x = 0, \quad x = 0,152.$$

Ekstremum występuje poza przedziałem ważności rozwiązania ($0,7 \leq x \leq 1$). Rozwiązanie jest więc statycznie dopuszczalne.

Pole prędkości przemieszczeń (8.8) jest następujące:

$$\begin{aligned} w_1 &= w_0 [\cos(x_0-x) + \text{ctgh}(1-x_0) \sin(x_0-x)], \\ w_2 &= w_0 \frac{\text{sh}(1-x)}{\text{sh}(1-x_0)}. \end{aligned}$$

Warunkiem kinematycznej dopuszczalności rozwiązania jest spełnienie nierówności (8.9). Otrzymujemy stąd

$$w'_1(0) = -1,9811w_0.$$

Drugi warunek (8.9) jest też spełniony, ponieważ w przedziałach dopuszczalności funkcji w_1 i w_2 argumenty występujących tam funkcji są dodatnie i mniejsze od 1, a więc dodatnie są również wartości w_1 i w_2 . Rozwiązanie jest zatem kinematycznie dopuszczalne.

Wartość obciążenia granicznego obliczona ze wzoru (8.3)₁ wynosi

$$p_1 = \frac{2 - \cos x_0}{2(1 - \cos x_0)} = 2,6258.$$

Rozwiązanie dla $\omega = 1$ i $p_2 = 0,2$ jest następujące:

$$f_2(x_0) = [1,2(1 - \cos x_0) - (0,4x_0 + 1) \sin x_0] \operatorname{sh}(1 - x_0) - \\ - [0,4(1 - x_0) \operatorname{ch}(1 - x_0) - 1](1 - \cos x_0) - \\ - [1,4 \cos x_0 + 0,4(x_0 - 1 - \sin x_0)] [\operatorname{ch}(1 - x_0) - 1] = 0.$$

Rozwiązanie numeryczne daje $x_0 = 0,69$,

$$m_{x1} = -0,4 \sin x + 4,4642 \cos x + 0,4x - 3,4642,$$

$$m_{x2} = -0,4801 \operatorname{sh} x - 2,2679 \operatorname{ch} x - 0,4x + 3,470,$$

$$m'_{x1} = -0,4 \cos x - 4,4642 \sin x + 0,4 = 0,$$

$$x_1 = 2,9628 + 2n\pi, \quad x_2 = 2n\pi, \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$m'_{x2} = -0,4801 \operatorname{ch} x - 2,2679 \operatorname{sh} x - 0,4 = 0, \quad x = -0,0335.$$

Rozwiązanie jest więc statycznie dopuszczalne, ponieważ ekstremum występuje poza przedziałami dopuszczalności funkcji m_{x1} i m_{x2} ; jest również kinematycznie dopuszczalne:

$$w'_1(0) = -1,9304 w_0, \quad w(x) \geq 0,$$

$$p_1 = 2,5321.$$

Rozwiązanie dla $\omega = 1$, $p_2 = -0,2$ jest następujące:

$$f_3(x_0) = [1,2(1 - \cos x_0) + (1 - 0,4x_0) \sin x_0] \operatorname{sh}(1 - x_0) - \\ - [-0,4(1 - x_0) \operatorname{ch}(1 - x_0) - 1](1 - \cos x_0) + \\ + [0,6 \cos x_0 - 0,4(x_0 - 1 - \sin x_0)] [\operatorname{ch}(1 - x_0) - 1] = 0.$$

Rozwiązanie numeryczne daje $x_0 = 0,70$,

$$m_{x1} = 0,4 \sin x + 4,1569 \cos x - 0,4x - 3,1569,$$

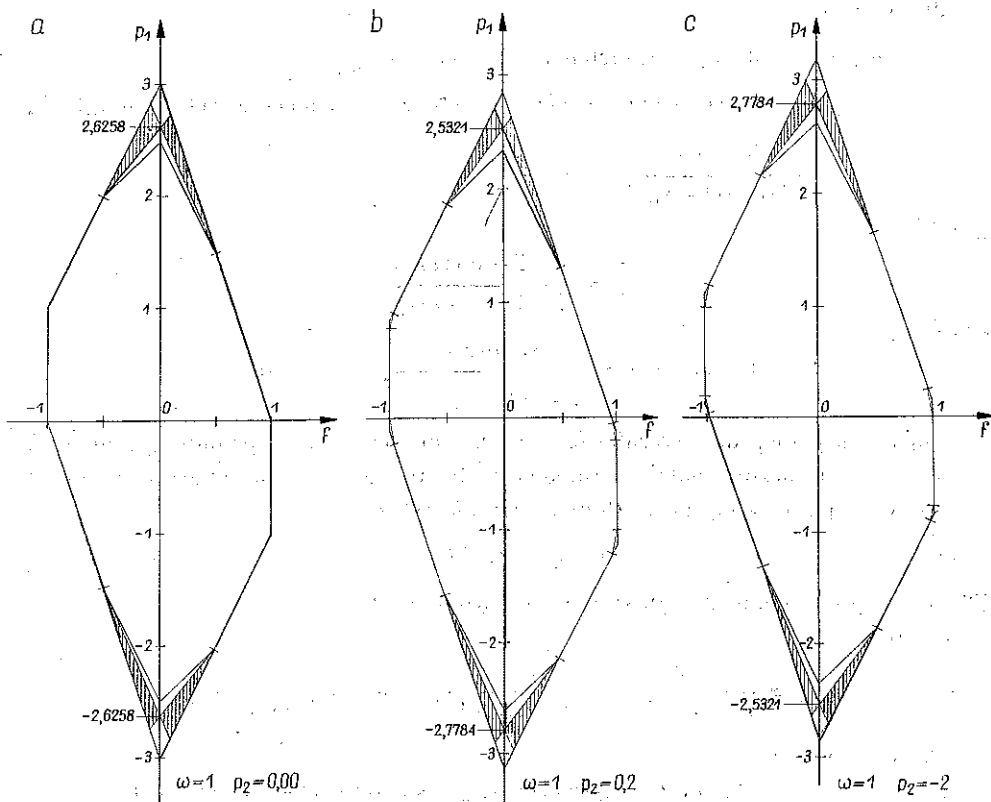
$$m_{x2} = -1,3659 \operatorname{sh} x - 1,9117 \operatorname{ch} x + 0,4x + 3,160,$$

$$m'_{x1} = 0,4 \cos x - 4,1569 \sin x - 0,4 = 0,$$

$$x_1 = 2,9498 + 2n\pi, \quad x_2 = 2n\pi, \quad n = 0, 1, \dots$$

W punkcie $x_2 = 0$ ($n = 0$) warunek stanu granicznego nie jest przekroczony, natomiast punkt $x_1 = 2,9498$ znajduje się poza powłoką:

$$m'_{x2} = -1,3659 \operatorname{ch} x - 1,9117 \operatorname{sh} x + 0,4 = 0, \quad x < 0.$$



Rys. 12

Rozwiązanie jest zatem statycznie dopuszczalne; jest ono też kinematycznie dopuszczalne:

$$w'_1(0) = -1,9811 w_0, \quad w(x) \geq 0,$$

$$p_1 = 2,7784.$$

Porównanie wyników przedstawiono na rys. 12a, b, c. Obszar zakreskowany przedstawia zmniejszone pole w porównaniu z polem określonym poprzednio, w którym znajduje się obecnie krzywa granicznego obciążenia.

9. Obciążenie równomierne

Przyjmując w otrzymanych wynikach $p_2 = 0$, otrzymujemy dla pierwszego mechanizmu zniszczenia:

dla $0 \leq x \leq x_0$

$$(9.1) \quad m_x = \frac{\cos \omega x - \cos \omega x_0}{1 - \cos \omega x_0},$$

$$w = w_0 [\cos \omega (x_0 - x) + \sin \omega (x_0 - x) \operatorname{ctgh} \omega (1 - x_0)];$$

dla $x_0 \leq x \leq 1$

$$(9.2) \quad m_x = - \{ \text{sh } \omega (1-x_0) [\text{ch } \omega (1-x) - \cos \omega x_0] - \\ - \text{sh } \omega (1-x) [\text{ch } \omega (1-x_0) - \cos \omega x_0] \} [\text{sh } (1-x_0) (1 - \cos x_0)]^{-1},$$

$$w = w_0 \frac{\text{sh } \omega (1-x)}{\text{sh } \omega (1-x_0)},$$

gdzie

$$(9.3) \quad p = \frac{1}{2} \frac{2 - \cos \omega x_0}{1 - \cos \omega x_0}, \\ \text{sh } \omega (1-x_0) = \frac{\sin \omega x_0}{\sqrt{2 \cos \omega x_0 + 1}}, \quad w_0 > 0.$$

Warunek statycznej dopuszczalności rozwiązania (8.4) jest spełniony, ponieważ m_x jest monotonicznie malejącą funkcją x dla $0 \leq x \leq 1$. Natomiast z warunku kinematycznej dopuszczalności (8.9) otrzymujemy, że

$$(9.4) \quad 0 \leq \omega \leq 1,649.$$

Dla drugiego mechanizmu zniszczenia otrzymujemy:

dla $0 \leq x \leq x_0$

$$(9.5) \quad m_x = \frac{\cos \omega x - \cos \omega x_0}{\cos \omega x_0 [2 \text{ch } \omega (1-x_0) - 1]}, \quad w = w_0 \frac{\cos \omega x}{\cos \omega x_0};$$

dla $x_0 \leq x \leq 1$

$$(9.6) \quad m_x = - \frac{2 \text{ch } \omega (1-x_0) \text{sh } \omega (x-x_0) + \text{sh } \omega (1-x) - \text{sh } \omega (1-x_0)}{\text{sh } \omega (1-x_0) [2 \text{ch } \omega (1-x_0) - 1]},$$

$$w = w_0 \frac{\text{sh } \omega (1-x)}{\text{sh } \omega (1-x_0)},$$

gdzie

$$\text{tg } \omega x_0 = \text{ctgh } \omega (1-x_0),$$

$$(9.7) \quad p = 1 + \frac{1}{2 [2 \text{ch } \omega (1-x_0) - 1]}, \quad w_0 > 0.$$

Rozwiązanie powyższe jest statycznie dopuszczalne dla $\omega > 1,649$, a kinematycznie dla $\omega > \pi/2$. Zatem (9.1) i (9.2) przedstawiają rozwiązanie zupełne dla ω spełniającego (9.4), a (9.5) i (9.6) dla $\omega > 1,649$.

Wyniki (9.1)–(9.7) są identyczne z wynikami uzyskanymi przez P. G. HODGE'A w pracy [2].

Dla $1/2 \leq f < 1$

$$(9.8) \quad m_x = (1-2x^2)(1-f), \quad n_\theta = -1+f, \quad n_x = f, \\ w = w_0(1-x), \quad u = \frac{w_0}{2} \left(2x^2 - x^2 + \frac{1}{\omega^2} \right), \\ p = \left(1 + \frac{2}{\omega^2} \right) (1-f).$$

Dla $-1 < f \leq -1/2$

$$(9.9) \quad \begin{aligned} m_x &= (1-2x^2)(1+f), & n_\theta &= -1, & n_x &= f, \\ w &= w_0(1-x), & u &= -\frac{w_0}{2\omega^2}, \\ p &= 1 + \frac{2}{\omega^2}(1+f). \end{aligned}$$

Dla $f = \pm 1$

$$(9.10) \quad \begin{aligned} m_x &= 0, & n_\theta &= -p, & n_x &= f, \\ w &= 0, & u &= \pm u_0 x. \end{aligned}$$

Rezultaty (9.8) – (9.10) są zgodne z podanymi w pracy [4].

Dla $0 \leq f \leq 1/2$

$$(9.11) \quad \begin{aligned} m_x &= (1-2x^2)(1-f), & n_\theta &= -\frac{1}{2}, & n_x &= f, \\ w &= w_0(1-x), & u &= \frac{w_0}{2\omega^2}, \\ p &= \frac{2}{\omega^2}(1-2f) + \frac{1}{2} \quad (\text{granica wewnętrzna}). \end{aligned}$$

Dla $-1/2 \leq f \leq 0$

$$(9.12) \quad \begin{aligned} m_x &= (1-2x^2)(1+f), & n_\theta &= f - \frac{1}{2}, & n_x &= f, \\ w &= w_0(1-x), & u &= \frac{w_0}{2} \left(x^2 - 2x - \frac{1}{\omega^2} \right), \\ p &= \left(\frac{2}{\omega^2} - 1 \right) f + \frac{2}{\omega^2} + \frac{1}{2} \quad (\text{granica wewnętrzna}). \end{aligned}$$

Granice zewnętrzną określają wzory (9.8) i (9.9), jeżeli zakres dopuszczalności tego rozwiązania rozszerzy się odpowiednio dla warunków $0 \leq f \leq 1/2$ i $-1/2 \leq f \leq 0$.

Literatura cytowana w tekście

1. E. T. ONAT, *The plastic collapse of shells under axially symmetrical loading*, Quart. Appl. Math., **13** (1955), 63 – 72.
2. P. G. HODGE, Jr., *The rigid-plastic analysis of symmetrically loaded cylindrical shells*, J. Appl. Mech., **21** (1954), 336 – 342.
3. D. C. DRUCKER and R. T. SHIELD, *Limit analysis of symmetrically loaded thin shells of revolution*, J. Appl. Mech., **26** (1959), 61 – 68.
4. P. G. HODGE, Jr., and J. PANARELLI, *Interaction curves for circular cylindrical shells according to the Mises or Tresca yield criterion*, J. Appl. Mech., **29** (1962), 375 – 380.
5. J. PANARELLI and P. G. HODGE, Jr., *Plastic analysis of cylindrical shells under pressure, axial load and torque*, Proc. 8th Midw. Mech. Conf., Cleveland, 1963.

6. P. G. HODGE, Jr., *Plastic design of a closed cylindrical structure*, J. Mech. Phys. Solids, 12, 1/1966.
7. Praca zbiorowa pod redakcją W. OLSZAKA, P. PERZYNY i A. SAWCZUKA, *Teoria plastyczności*, Warszawa 1965.
8. P. G. HODGE, Jr., *Limit analysis of rotationally symmetric plates and shells*, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New York 1963.
9. M. JANAS i J. A. KÖNIG, *Nośność graniczna powłok, przekrycia i zbiorniki*, Biblioteka Inż. i Bud., 16, Warszawa 1968.

Резюме

НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ,
ЗАГРУЖЕННОЙ ЛИНЕЙНО-ПЕРЕМЕННЫМ ДАВЛЕНИЕМ И ОСЕВОЙ СИЛОЙ

В работе решается вопрос несущей способности цилиндрической оболочки с жестко зашпеленными краями, подверженной действию линейно-переменному давлению и осевой силы. Применяется поверхность пластичности приведенную в работе [2], и выведенную на основе критерия пластичности Трески и принятию слоистой структуры стенки оболочки. Рассматриваются три случая, определяющие интервал изменчивости f : $-1 < f < -1/2$ и $1/2 < f < 1$, $f = \pm 1$, а также $-1/2 < f < 0$ и $0 < f < 1/2$. Определяются условия статической и кинематической допустимости решения и обсуждается влияние параметра ω , характеризующего геометрию оболочки и влияние неравномерности нагрузки, на точность определения кривых предельной нагрузки. Даются числовые примеры для значений $f = 0$ и $\omega = 1$, для иллюстрирования хода расчетов и способа уменьшения области, в которой находится точная кривая предельной нагрузки. В работе приводится ряд рисунков представляющих кривые и поверхности предельной нагрузки.

Принимая, в полученном решении $p_2 = 0$, получаются результаты для случая равномерной нагрузки, согласные с приведенными в работах [2, 4].

Summary

THE LIMIT LOAD OF A CYLINDRICAL SHELL UNDER THE ACTION
OF A LINEARLY VARIABLE PRESSURE AND AN AXIAL FORCE

The problem solved in the present paper is that of the limit load of a cylindrical shell with clamped edges, subject to the action of a linearly variable pressure and an axial force. The yield surface used is the surface described in Ref. 2, and derived on the grounds of the Tresca yield criterion for a layered wall. Three cases are considered, corresponding to three variability regions of the axial force f . These are $-1 < f < -1/2$ and $1/2 < f < 1$, $f = \pm 1$, $-1/2 < f < 0$ and $0 < f < 1/2$.

The conditions of static and kinematic admissibility of the solution are established. Other subjects of the discussion are the role of the parameter ω characterizing the geometrical form of the shell and the influence of the non-uniformity of the load on the accuracy of the curves of limit load obtained. Numerical examples are given for $f = 0$ and $\omega = 1$ in order to illustrate the computation procedure and the way in which the region containing the accurate curve of limit load can be reduced.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 19 maja 1969 r.