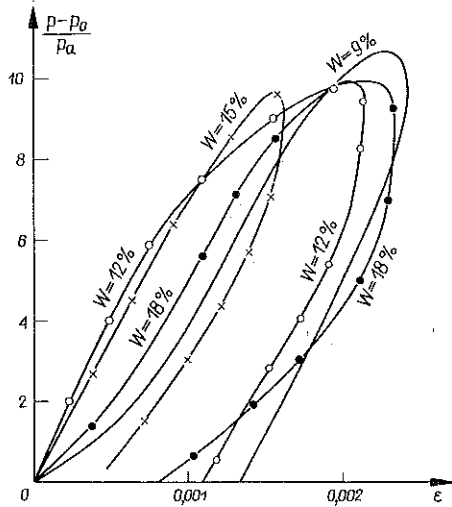
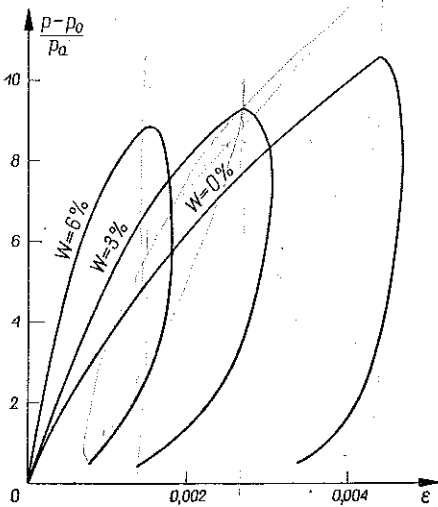


WPLYW LINIOWO SPRĘŻYSTEGO ODCIĄŻENIA NA PARAMETRY RUCHU
SZTYWNEJ PŁYTY SPOCZYWAJĄCEJ NA SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYM GRUNCIE

EDWARD WŁODARCZYK (WARSZAWA)

1. Wstęp

Masywna płyta, spoczywająca na sprężysto-plastycznym gruncie, obciążona z góry ciśnieniem impulsowym, generuje w podłożu płaskie fale obciążenia i odciążenia słabej nieciągłości. Fale obciążenia stanowią znany układ fal Riemanna. Natomiast problem płaskiej fali odciążenia w ośrodku sprężysto-plastycznym ze sprężystym odcieżeniem dla dowolnych warunków brzegowych pozostaje nadal otwarty. Istnieje kilka szczególnych przypadków (por. [1] str. 46 i 47), dla których można skonstruować zamkniętą postać fali odcieżenia z uwzględnieniem sprężystego odcieżenia.



Rys. 1

Dość szeroką gamę interesujących i ważnych praktycznie problemów fali odcieżenia rozwiązano w postaci zamkniętej na gruncie modelu ze sztywnym odcieżeniem [2 - 4]. Między innymi w oparciu o ten model w [3] zbadano dość szczegółowo problem ruchu sztywnej płyty spoczywającej na sprężysto-plastycznym gruncie i obciążonej ciśnieniem impulsowym.

Charakterystyka $\sigma = \sigma(\epsilon)$ ze sztywnym odciążeniem dobrze aproksymuje fizyko-mechaniczne własności piaszczystych gruntów powietrzno-suchych. W gruntach tych odkształcenia sprężyste w strefie odciążenia są nieznaczne (rys. 1a).

Odmienne zachowują się grunty wilgotne. Przy odciażaniu wykazują one dość duże odkształcenia sprężyste (rys. 1b). Aproksymowanie takich gruntów charakterystyką $\sigma = \sigma(\epsilon)$ ze sztywnym odciążeniem budzi obiekty co do adekwatności z rzeczywistością otrzymanych na tej drodze parametrów ruchu płyty (obiektu).

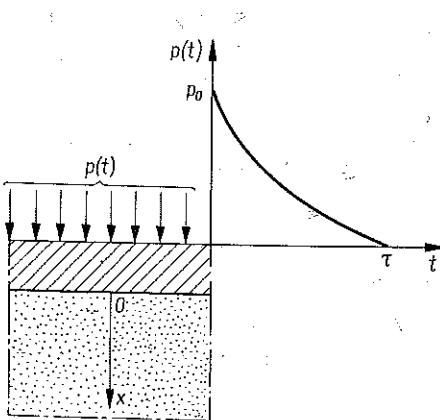
Próba ścisłego rozwiązania tego zagadnienia na gruncie modelu Prandtla ze sprężystym odciążeniem prowadzi do nieliniowych równań różniczkowych, nie nadających się do obliczeń numerycznych. Okazuje się jednak, że jeżeli ciśnienie pod płytą na odcinku obciążenia, otrzymane ze ścisłego rozwiązania, aproksymować linią schodkową, to można rozwiązać *explicite* problem odciażenia. Zagęszczając «schodki», możemy praktycznie otrzymać zamknięte rozwiązanie problemu. Konstrukcją takiego rozwiązania i pełną analizą parametrów ruchu płyty zajmiemy się w niniejszej pracy.

W pracy w punkcie drugim formułujemy problem, a w trzecim rozwiązujemy go *explicite*. Pracę kończymy analizą numeryczną problemu, którą zamieszczamy w punkcie czwartym. Badamy tutaj wpływ współczynnika sprężystego odciażenia μ_2 na parametry ruchu obiektu.

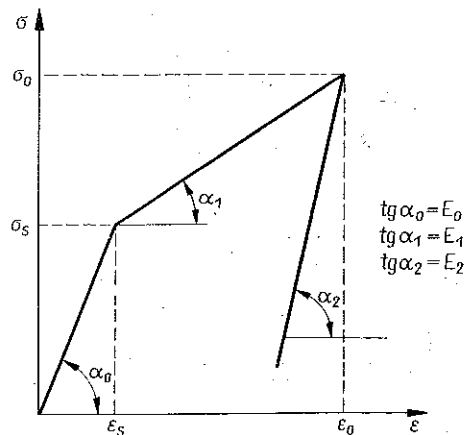
2. Sformułowanie problemu

Zbadamy jednowymiarowy ruch nieodkształcalnej płyty, spoczywającej na sprężysto-plastycznym gruncie i obciążonej z góry ciśnieniem impulsowym (rys. 2).

Związek fizyczny $\sigma = \sigma(\epsilon)$, opisujący własności sprężysto-plastyczne ośrodka, aproksymujemy modelem Prandtla (rys. 3).



Rys. 2



Rys. 3

Rozwiązanie konstruujemy we współrzędnych Lagrange'a, przy czym oś x kierujemy w głąb ośrodka (rys. 3).

Sformułowany wyżej problem w sposób jednoznaczny opisują następujące równania i warunki graniczne:

zasady zachowania masy i impulsu

$$(2.1) \quad \frac{\partial}{\partial x}(x+u) = \frac{\rho_0}{\rho} \quad \text{lub} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon,$$

gdzie $\varepsilon = (\rho_0/\rho) - 1$ oraz

$$(2.2) \quad \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x};$$

związki fizyczne: a) w strefie obciążenia

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \sigma &= E_0 \varepsilon, & \text{jeśli} \quad |\sigma| \leq \sigma_s, \\ \sigma &= E_0 \varepsilon_s + E_1 (\varepsilon - \varepsilon_s), & \text{jeśli} \quad |\sigma| > \sigma_s; \end{aligned}$$

b) w strefie odciążenia

$$(2.4) \quad \sigma = \sigma_0 - E_2 (\varepsilon_0 - \varepsilon);$$

warunki graniczne

$$(2.5) \quad u(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = 0$$

oraz

$$(2.6) \quad \sigma(0, t) = m \frac{\partial v(0, t)}{\partial t} - p(t).$$

Równania (2.1)–(2.4) można zastąpić równoważnym układem różniczkowych równań zwyczajnych wzdłuż charakterystyk.

Mianowicie dla $dx = \pm a(\sigma) dt$ otrzymujemy

$$(2.7) \quad d\sigma = \pm \rho_0 a(\sigma) dv$$

lub

$$(2.8) \quad v = \pm \frac{1}{\rho_0} \int_0^\sigma \frac{d\sigma_1}{a(\sigma_1)} + C^\pm,$$

przy czym w strefie obciążenia mamy

$$(2.9) \quad a(\sigma) = \begin{cases} a_0 = \sqrt{\frac{E_0}{\rho_0}}, & \text{jeśli} \quad |\sigma| \leq \sigma_s; \\ a_1 = \sqrt{\frac{E_1}{\rho_0}}, & \text{jeśli} \quad |\sigma| > \sigma_s; \end{cases}$$

natomiast w strefie odciążenia mamy

$$(2.10) \quad a(\sigma) = a_2 = \sqrt{\frac{E_2}{\rho_0}}.$$

3. Konstrukcja rozwiązania problemu

A. *Strefa obciążenia*. Jak już wspomnieliśmy we wstępie, płyta równomiernie obciążona ciśnieniem nagle przyłożonym i następnie malejącym z upływem czasu generuje w podłożu fale obciążenia słabej nieciągłości (reakcja pod płytą narasta stopniowo od zera do określonej, maksymalnej wartości i maleje następnie). Ze względu na model Prandtla strefę obciążenia wypełniają dwa układy fal Riemanna: fale sprężyste propagujące się z prędkością a_0 i fale plastyczne rozchodzące się z prędkością a_1 . Obraz falowy w strefie obciążenia pokazujemy na rys. 4.

Analityczne rozwiązanie problemu w strefie obciążenia kształtuje się w następujący sposób:

Obszar I. Jest to obszar zmiennych odkształceń sprężystych. Wykorzystując zatem związki wzdłuż charakterystyk (2.8), po uwzględnieniu wzoru (2.9) i warunku brzegowego (2.6), otrzymujemy

$$\sigma_1(x, t) = -h_0 e^{-h_0 \left(t - \frac{x}{a_0}\right)} \int_0^{t - \frac{x}{a_0}} p(\xi) e^{h_0 \xi} d\xi, \quad (3.1)$$

$$v_1(x, t) = \frac{1}{m} e^{-h_0 \left(t - \frac{x}{a_0}\right)} \int_0^{t - \frac{x}{a_0}} p(\xi) e^{h_0 \xi} d\xi,$$

gdzie $h_0 = \rho_0 a_0 / m$.

Obszar II. Jest to obszar stałych odkształceń sprężystych; w związku z tym mamy

$$\sigma_2(x, t) = -\sigma_s = \text{const}, \quad (3.2)$$

$$v_2(x, t) = v_s = \frac{1}{m} e^{-h_0 t s} \int_0^{t s} p(\xi) e^{h_0 \xi} d\xi = \frac{\sigma_s}{\rho_0 a_0} = \text{const}.$$

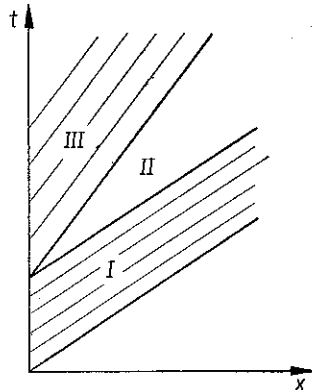
Obszar III. Ośrodek wchodzi tutaj w stan odkształceń plastycznych, w którym propaguje się układ fal Riemanna ze stałą prędkością a_1 (model Prandtla). Postępując podobnie jak w obszarze I otrzymujemy następujące wzory na pole naprężeń i prędkości:

$$\sigma_3(x, t) = -e^{-h_1 \left(t - \frac{x}{a_1}\right)} \left[h_1 \int_{t s}^{t - \frac{x}{a_1}} p(\xi) e^{h_1 \xi} d\xi + \sigma_s e^{h_1 t s} \right], \quad (3.3)$$

$$v_3(x, t) = \frac{\sigma_s}{\rho_0 a_0} - \frac{\sigma_s}{\rho_0 a_1} + \frac{1}{\rho_0 a_1} e^{-h_1 \left(t - \frac{x}{a_1}\right)} \left[h_1 \int_{t s}^{t - \frac{x}{a_1}} p(\xi) e^{h_1 \xi} d\xi + \sigma_s e^{h_1 t s} \right],$$

gdzie $h_1 = \rho_0 a_1 / m$.

Przyjmując we wzorach (3.1) i (3.3) $x = 0$ otrzymujemy prędkość, z jaką porusza się płyta w strefie obciążenia oraz zmianę w czasie ciśnienia przekazywanego przez płytę na grunt. Dla przykładu na rys. 5 pokazujemy zmianę ciśnienia pod płytą



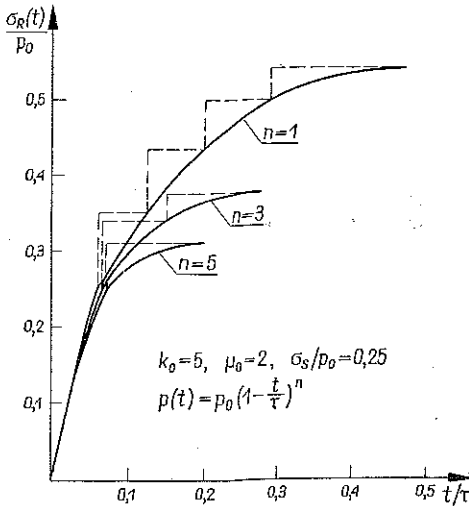
Rys. 4

w strefie obciążenia dla kilku wartości parametru n , przy zewnętrznym obciążeniu zmniejszającym się wg prawa

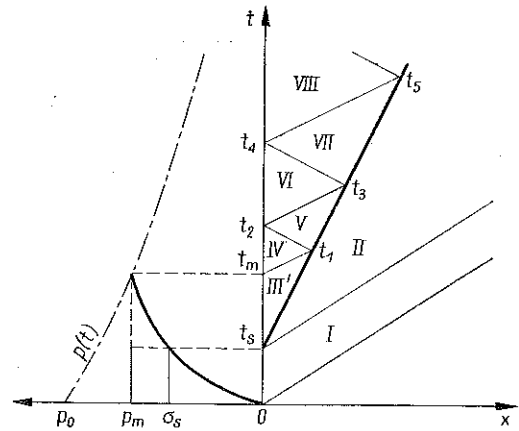
$$(3.4) \quad p(t) = \begin{cases} p_0 \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^n, & \text{jeśli } t \leq \tau, \\ 0, & \text{jeśli } t > \tau. \end{cases}$$

B. *Strefa odciążenia.* Problem fali odciążenia rozwiążemy w sposób przybliżony. Przybliżenie polegać będzie na aproksymacji rzeczywistego ciśnienia pod płytą, na odcinku obciążenia, linią schodkową (rys. 5). Taka aproksymacja prowadzi do wyników po stronie bezpiecznej dla danej konstrukcji oraz umożliwia skonstruowanie zamkniętej postaci rozwiązania problemu odciążenia. Zagęszczając «schodki» praktycznie możemy otrzymać ściśle, zamknięte rozwiązanie rozpatrywanego problemu. W celu uproszczenia rachunków rozważania ograniczymy do aproksymacji jednoschodkowej. W przypadku obciążenia «wieloschodkowego» rozwiązanie konstruuje się w analogiczny sposób.

Falowy obraz rozwiązania dla aproksymacji jednoschodkowej ma postać pokazaną na rys. 6. Fala odciążenia jest tutaj początkowo falą słabej nieciągłości i propaguje się z prędkością a_2 (odcinek $t_m - t_1$ na rys. 6), a po osiągnięciu frontu fali



Rys. 5



Rys. 6

plastycznej silnej nieciągłości pokrywa się z nią. Znając *explicite* postać frontu fali odciążenia nie mamy istotnych trudności w rozwiązaniu problemu odciążenia. I tak w obszarze III' przy aproksymacji jednoschodkowej propagują się fale Riemanna niosąc stałe naprężenia i prędkości o wartościach

$$(3.5) \quad \sigma_3(x, t) = -p_m, \quad v_3(x, t) = (1 - \mu_0) \frac{\sigma_s}{\rho_0 a_0} + \frac{p_m}{\rho_0 a_1},$$

gdzie $\mu_0 = a_0/a_1$.

Wykorzystując następujące związki wzdłuż charakterystyk:

$$(3.6) \quad \sigma = \pm \rho_0 a_2 v + C^\pm$$

i warunek brzegowy (2.6) oraz dynamiczny warunek zgodności na froncie fali odciążenia $x = a_1(t - t_s)$

$$(3.7) \quad \sigma_0 + \sigma_s = -\rho_0 a_1 (v_0 - v_s)$$

otrzymamy w obszarach o numerach parzystych, tj. dla

$$(3.8) \quad \begin{aligned} 0 \leq x \leq a_1(t - t_s), \quad t_{2n-2} \leq t \leq t_{2n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \\ t_{2n} = 2 \frac{\mu_2 t_{2n-2} - t_s}{\mu_2 - 1} - t_{2n-2}, \quad t_0 = t_m, \quad \mu_2 = \frac{a_2}{a_1}, \end{aligned}$$

następujące rekurencyjne wzory na pole naprężeń i prędkości:

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \sigma_{2n+2}(x, t) &= \frac{1}{2} \left[\sigma_{p2n+2} \left(t - \frac{x}{a_2} \right) + (1 - \mu_2) \sigma_{02n+1} \left(\frac{1}{1 + \mu_2} t_s + \frac{\mu_2}{1 + \mu_2} t + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{1 + \mu_2} \frac{x}{a_1} \right) + (1 - \mu_0) \frac{\mu_2}{\mu_0} \sigma_s - \rho_0 a_2 v_{p2n+2} \left(t - \frac{x}{a_2} \right) \right], \\ v_{2n+2}(x, t) &= \frac{1}{2\rho_0 a_2} \left[-\sigma_{p2n+2} \left(t - \frac{x}{a_2} \right) + (1 - \mu_2) \sigma_{02n+1} \left(\frac{1}{1 + \mu_2} t_s + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\mu_2}{1 + \mu_2} t + \frac{1}{1 + \mu_2} \frac{x}{a_1} \right) + (1 - \mu_0) \frac{\mu_2}{\mu_0} \sigma_s + \rho_0 a_2 v_{p2n+2} \left(t - \frac{x}{a_2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Natomiast w obszarach o numerach nieparzystych, tj. dla

$$(3.10) \quad \begin{aligned} 0 \leq x \leq a_1(t - t_s), \quad t_{2n-1} \leq t \leq t_{2n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \\ t_{2n+1} = \frac{\mu_2 t_{2n-1} - t_s}{\mu_2 - 1}, \end{aligned}$$

mamy

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \sigma_{2n+3}(x, t) &= \frac{1}{2} \left[\sigma_{p2n+2} \left(t - \frac{x}{a_2} \right) + (1 - \mu_2) \sigma_{02n+3} \left(\frac{1}{1 + \mu_2} t_s + \frac{\mu_2}{1 + \mu_2} t + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{1 + \mu_2} \frac{x}{a_1} \right) + (1 - \mu_0) \frac{\mu_2}{\mu_0} \sigma_s - \rho_0 a_2 v_{p2n+2} \left(t - \frac{x}{a_2} \right) \right], \\ v_{2n+3}(x, t) &= \frac{1}{2\rho_0 a_2} \left[-\sigma_{p2n+2} \left(t - \frac{x}{a_2} \right) + (1 - \mu_2) \sigma_{02n+3} \left(\frac{1}{1 + \mu_2} t_s + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\mu_2}{1 + \mu_2} t + \frac{1}{1 + \mu_2} \frac{x}{a_1} \right) + (1 - \mu_0) \frac{\mu_2}{\mu_0} \sigma_s + \rho_0 a_2 v_{p2n+2} \left(t - \frac{x}{a_2} \right) \right], \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.12) \quad \sigma_{p2n+2}(t) = -\rho_0 a_2 v_{p2n+2}(t) + (1 - \mu_2) \sigma_{02n+1} \left(\frac{1}{1 + \mu_2} t_s + \frac{\mu_2}{1 + \mu_2} t \right) + (1 - \mu_0) \frac{\mu_2}{\mu_0} \sigma_s,$$

$$v_{p2n+2}(t) = v_{p2n-2}(t_{2n-2}) e^{-\frac{\rho_0 a_2}{m}(t-t_{2n-2})} +$$

$$(3.13) \quad + \frac{1}{m} \int_{t_{2n-2}}^t \left[p(\xi) + (1 - \mu_2) \sigma_{02n+3} \left(\frac{1}{1 + \mu_2} t_s + \frac{\mu_2}{1 + \mu_2} \xi \right) + (1 - \mu_0) \frac{\mu_2}{\mu_0} \sigma_s \right] e^{-\frac{\rho_0 a_2}{m}(t-\xi)} d\xi,$$

$$\sigma_{02n+3}(t) = \frac{1}{1 + \mu_2} \left[(1 - \mu_0) \frac{\mu_2}{\mu_0} \sigma_s + \sigma_{p2n+2} \left(\frac{1}{\mu_2} t_s + \frac{\mu_2 - 1}{\mu_2} t \right) - \rho_0 a_2 v_{p2n+2} \left(\frac{1}{\mu_2} t_s + \frac{\mu_2 - 1}{\mu_2} t \right) \right],$$

przy czym

$$(3.14) \quad \sigma_{03}(t) = -p_m, \quad v_{p0}(t_0) = (1 - \mu_0) \frac{\sigma_s}{\rho_0 a_0} + \frac{p_m}{\rho_0 a_1},$$

$$h_0 e^{-h_0 t_s} \int_0^{t_s} p(\xi) e^{h_0 \xi} d\xi = \sigma_s \rightarrow t_s,$$

$$(3.15) \quad h_1 e^{-h_1 t_m} \int_{t_s}^{t_m} p(\xi) e^{h_1 \xi} d\xi - p(t_m) + \sigma_s e^{-h_1(t_m-t_s)} = 0 \rightarrow t_m,$$

$$p_m = \sigma_s e^{-h_1(t_m-t_s)} + h_1 e^{-h_1 t_m} \int_{t_s}^{t_m} p(\xi) e^{h_1 \xi} d\xi \rightarrow p_m.$$

Za pomocą zamieszczonych wyżej rekurencyjnych wzorów możemy w sposób jednoznaczny określić pole naprężeń i prędkości w trójkącie $t_s K t_{K+1}$ (rys. 7). Współrzędne końca fali odciążenia określamy z

$$(3.16) \quad \sigma_{02n+3}(t_K) = -\sigma_s \rightarrow t_K, \quad x_K = a_1(t_K - t_s),$$

x_K oznacza głębokość, do której ośrodek pod płytą odkształci się w sposób trwały. Natomiast dla $x > x_K$ w gruncie propagują się tylko fale sprężyste.

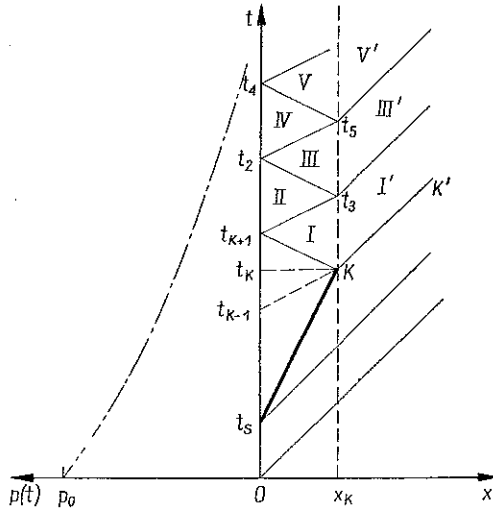
Rozwiązanie problemu w obszarach położonych powyżej charakterystyk $K - t_{K+1}$ i $K - K'$, wychodzących z końca fali odciążenia (rys. 7), kształtuje się następująco. Wykorzystując, podobnie jak poprzednio, związki wzdłuż charakterystyk, a zamiast dynamicznego warunku zgodności — warunki ciągłości pola naprężeń i prędkości na granicy $x = x_K$, otrzymamy w obszarach o numerach nieparzystych, położonych za frontem fali odciążenia, tj. dla

$$(3.17) \quad 0 \leq x \leq x_K \text{ i } t_{2n+1} \leq t \leq t_{2n+1}, \quad t_1 = t_K, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$t_{2n+1} = t_{2n-1} + \frac{2}{\mu_2}(t_K - t_s),$$

następujące rekurencyjne wzory na naprężenia i prędkości:

$$(3.18) \quad \begin{aligned} \sigma_{2n-1}(x, t) &= \frac{1}{2} \left[\sigma_{p2n-2} \left(t - \frac{x}{a_2} \right) - \rho_0 a_2 v_{p2n-2} \left(t - \frac{x}{a_2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_0} \right) \sigma_{K2n-1} \left(t + \frac{x - x_K}{a_2} \right) \right], \\ v_{2n-1}(x, t) &= \frac{1}{2\rho_0 a_2} \left[-\sigma_{p2n-2} \left(t - \frac{x}{a_2} \right) + \rho_0 a_2 v_{p2n-2} \left(t - \frac{x}{a_2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_0} \right) \sigma_{K2n-1} \left(t + \frac{x - x_K}{a_2} \right) \right]. \end{aligned}$$



Rys. 7

Natomiast w obszarach położonych przed frontem fali odciążenia, tj. dla

$$(3.19) \quad x \geq x_K \quad \text{oraz} \quad t_{2n-1} + \frac{x - x_K}{a_0} \leq t \leq t_{2n+1} + \frac{x - x_K}{a_0}$$

mamy

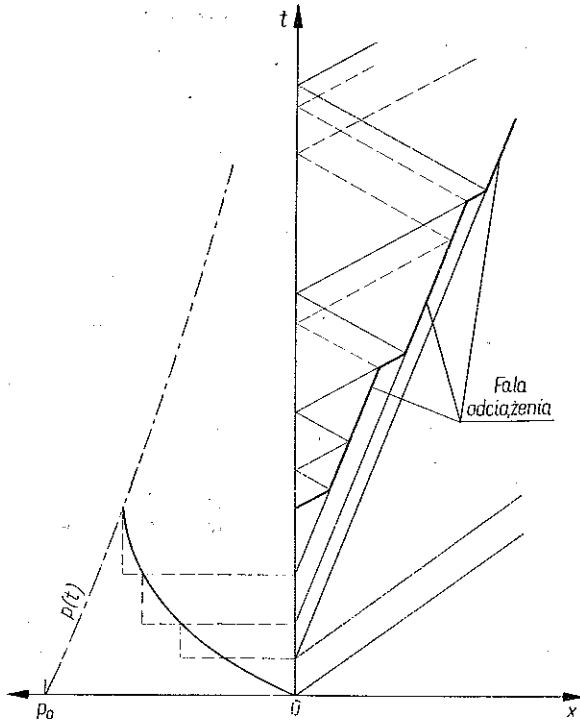
$$(3.20) \quad \begin{aligned} \sigma_{2n'-1}(x, t) &= \frac{\mu_0}{\mu_0 + \mu_2} \left[\sigma_{p2n-2} \left(t - \frac{x - x_K}{a_0} - \frac{x_K}{a_2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \rho_0 a_2 v_{p2n-2} \left(t - \frac{x - x_K}{a_0} - \frac{x_K}{a_2} \right) \right], \\ v_{2n'-1}(x, t) &= - \frac{\sigma_{2n'-1}(x, t)}{\rho_0 a_0}. \end{aligned}$$

W obszarach o numerach parzystych, tj. dla

$$(3.21) \quad \begin{aligned} 0 \leq x \leq x_K \quad \text{i} \quad t_{2n-2} \leq t \leq t_{2n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \\ t_{2n} = t_{2n-2} + \frac{2}{\mu_2} (t_K - t_s), \quad t_0 = t_K + \frac{1}{\mu_2} (t_K - t_s) \end{aligned}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \sigma_{2n}(x, t) &= \frac{1}{2} \left[\sigma_{p2n} \left(t - \frac{x}{a_2} \right) - \rho_0 a_2 v_{p2n} \left(t - \frac{x}{a_2} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_0} \right) \sigma_{K2n-1} \left(t + \frac{x - x_K}{a_2} \right) \right], \\
 (3.22) \quad v_{2n}(x, t) &= \frac{1}{2\rho_0 a_2} \left[-\sigma_{p2n} \left(t - \frac{x}{a_2} \right) + \rho_0 a_2 v_{p2n} \left(t - \frac{x}{a_2} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_0} \right) \sigma_{K2n-1} \left(t + \frac{x - x_K}{a_2} \right) \right],
 \end{aligned}$$



Rys. 8

gdzie

$$\begin{aligned}
 \sigma_{p2n}(t) &= -\rho_0 a_2 v_{p2n}(t) + \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_0} \right) \sigma_{K2n-1} \left(t - \frac{x_K}{a_2} \right), \\
 v_{p2n}(t) &= v_{2n-2}(t_{2n-2}) e^{-\frac{\rho a_2}{m}(t-t_{2n-2})} + \\
 (3.23) \quad &+ \frac{1}{m} \int_{t_{2n-2}}^t \left[p(\xi) + \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_0} \right) \sigma_{K2n-1} \left(\xi - \frac{x_K}{a_2} \right) \right] e^{\frac{\rho_0 a_2}{m} \xi} d\xi, \\
 \sigma_{K2n-1}(t) &= \frac{\mu_0}{\mu_0 + \mu_2} \left[\sigma_{p2n-2} \left(t - \frac{x_K}{a_2} \right) - \rho_0 a_2 v_{p2n-2} \left(t - \frac{x_K}{a_2} \right) \right],
 \end{aligned}$$

przy czym σ_{p0} i v_{p0} w przedziale $t_{K-1} \leq t \leq t_{K+1}$ mamy określone ze wzorów (3.12). Tym samym problem został rozwiązany.

W przypadku aproksymacji wieloschodkowej fala odciążenia ulega rozbiću na kilka fragmentów. Dla każdego z nich konstruujemy rozwiązanie w sposób analogiczny do wyżej podanego. Przykład układu fal dla aproksymacji trójschodkowej przedstawiamy na rys. 8.

4. Analiza numeryczna problemu

W niniejszym punkcie na podstawie wyprowadzonych wyżej wzorów zbadamy szczegółowo wpływ współczynnika sprężystego odciążenia μ_2 na parametry ruchu płyty. Końcowym efektem tych badań będzie ustalenie warunków, przy których można korzystać z rozwiązań skonstruowanych dla modelu ze sztywnym odciążeniem.

W celu wykonania obliczeń liczbowych wprowadzimy następujące wielkości bezwymiarowe:

$$(4.1) \quad T = \frac{t}{\tau}, \quad X = \frac{x}{a_0 \tau}, \quad P = \frac{p(t)}{p_0}, \quad Q = \frac{\sigma}{p_0}, \quad P_s = \frac{\sigma_s}{p_0},$$

$$U = \frac{\rho_0 a_0}{p_0 \tau} u, \quad V = \frac{\rho_0 a_0}{p_0} v, \quad W = \frac{\rho_0 a_0 \tau}{p_0} w,$$

$$k_0 = \frac{\rho_0 a_0 \tau}{m}, \quad k_1 = \frac{\rho_0 a_1 \tau}{m} = \frac{k_0}{\mu_0}.$$

Poza tym przyjmiemy, że ciśnienie, działające równomiernie na płytę, zmienia się z upływem czasu wg prawa

$$(4.2) \quad P(T) = (1 - T)^n.$$

Podstawiając (4.2) do wyprowadzonych w poprzednim punkcie wzorów otrzymamy, że płaski ruch płyty, spoczywającej na sprężysto-plastycznym podłożu, zachowującym sprężyste odkształcenia w strefie odciążenia, zależy od następujących pięciu parametrów:

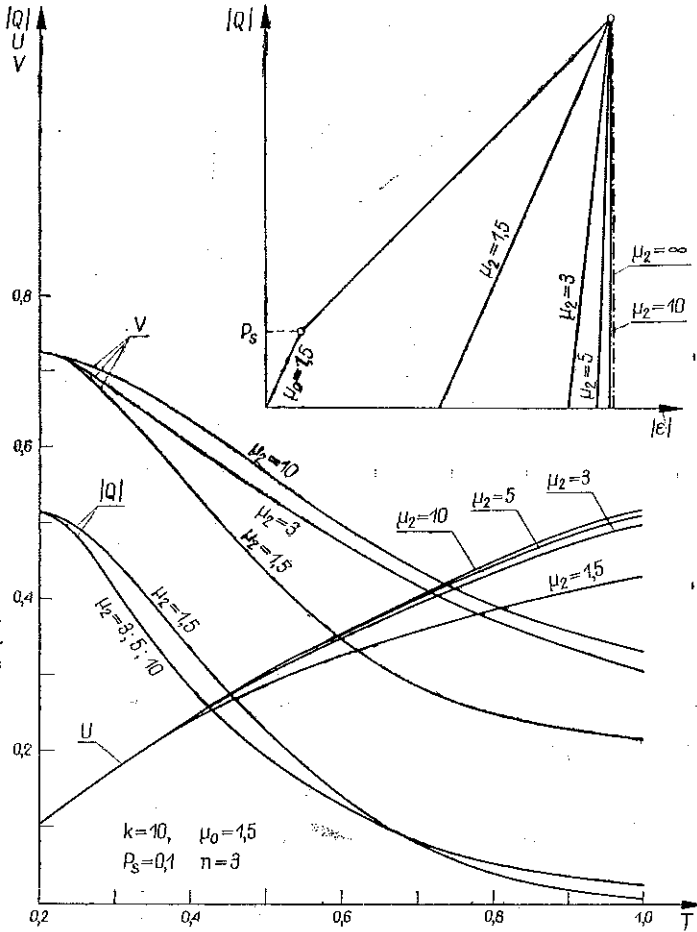
$$(4.3) \quad k_0 = \frac{\rho_0 a_0 \tau}{m}, \quad \mu_0 = \frac{a_0}{a_1}, \quad \mu_2 = \frac{a_2}{a_1}, \quad P_s = \frac{\sigma_s}{k}, \quad n.$$

Wpływ wymienionych wyżej wielkości (oprócz μ_2) na dynamikę płyty w strefach obciążenia i sztywnego odciążenia zabrano szczegółowo w pracy [4].

Zgodnie z celem niniejszego opracowania zajmiemy się strefą sprężystego odciążenia.

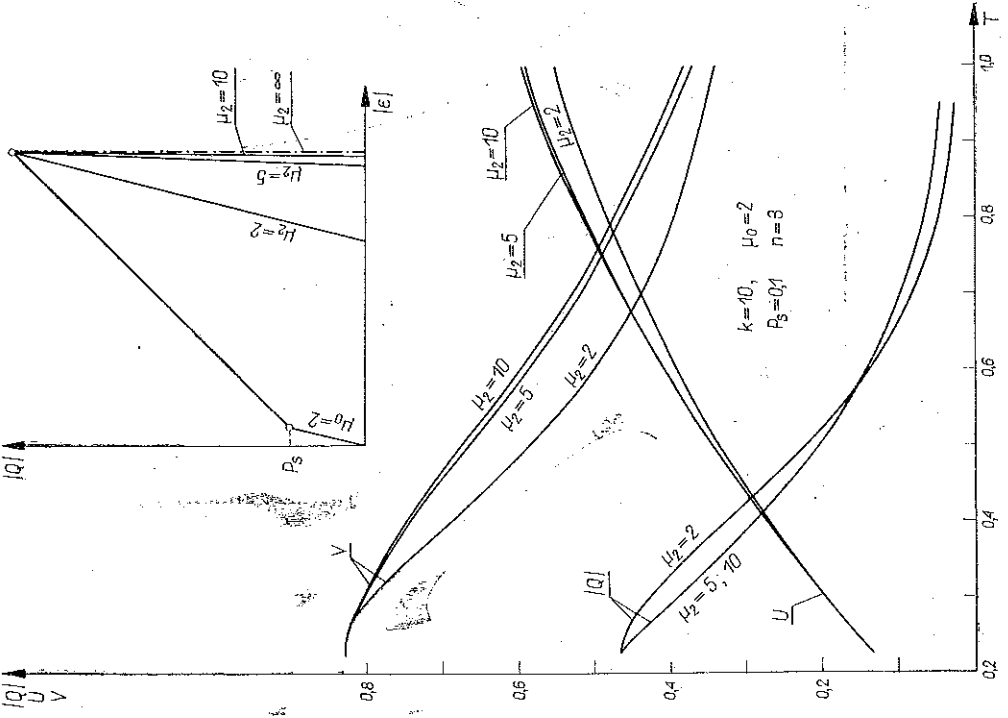
W pierwszej kolejności zbadamy wpływ współczynnika sprężystego odciążenia μ_2 na parametry ruchu płyty. Wyniki obliczeń dotyczące tego zagadnienia pokazujemy na rysunkach 9 i 10. Z rysunków tych widać, że największe różnice w parametrach ruchu, otrzymanych dla sztywnego i sprężystego odciążenia, zachodzą

przy małych wartościach współczynnika wzmocnienia μ_0 , przy czym najbardziej wrażliwa na zmiany współczynnika odciążenia μ_2 jest prędkość V i przyśpieszenie W . Powyższą okoliczność najlepiej jest wytłumaczyć analizując pętlę plastycznych odkształceń na wykresie $Q - \varepsilon(\sigma - \varepsilon)$ (rys. 9). Przy małych wartościach μ_0 (1–2) pętla ta dla sprężystego odciążenia z $\mu_2 = \mu_0$ jest o kilkadziesiąt procent (np. dla

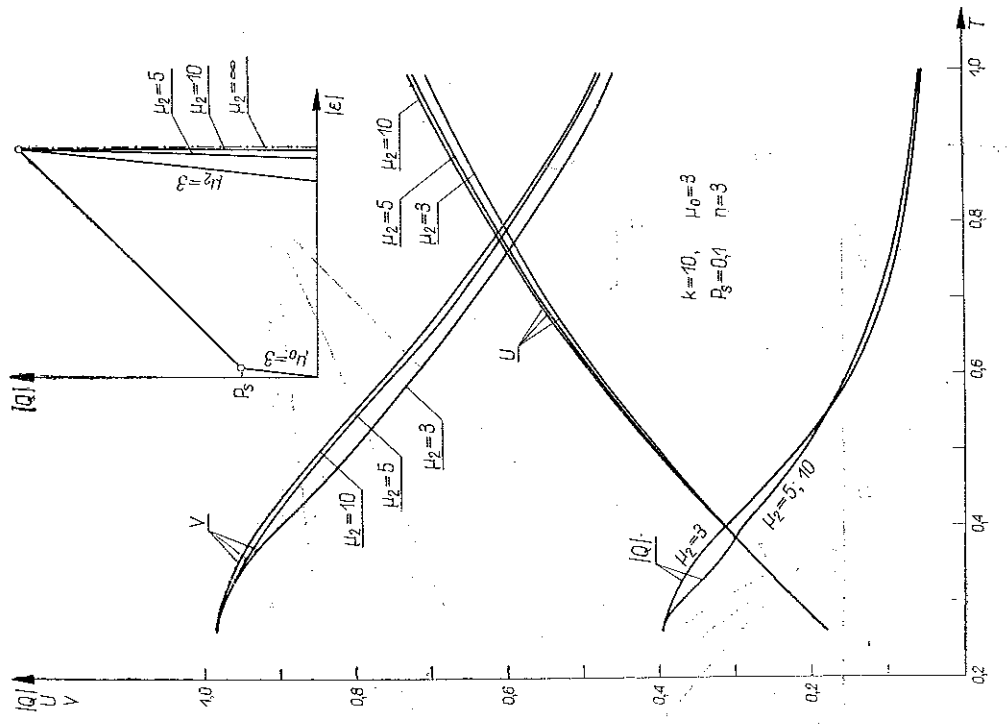


Rys. 9a

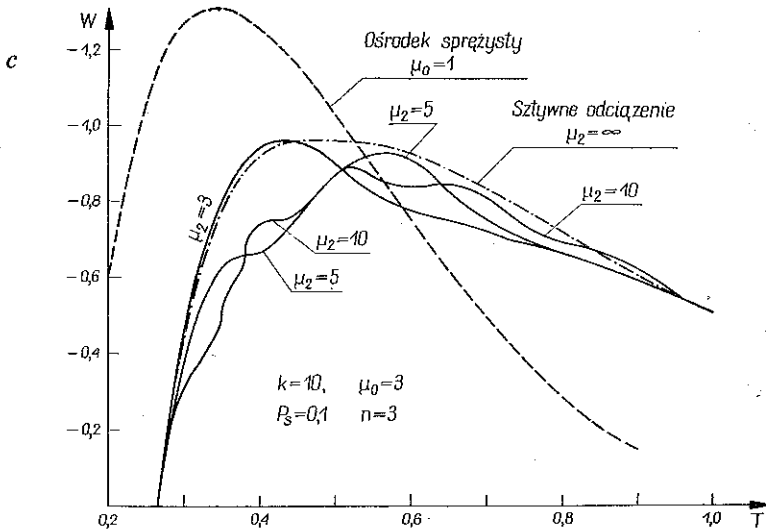
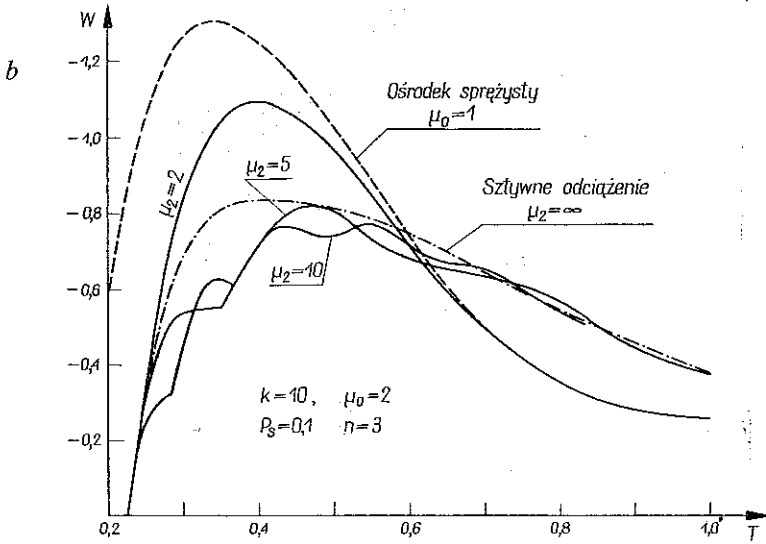
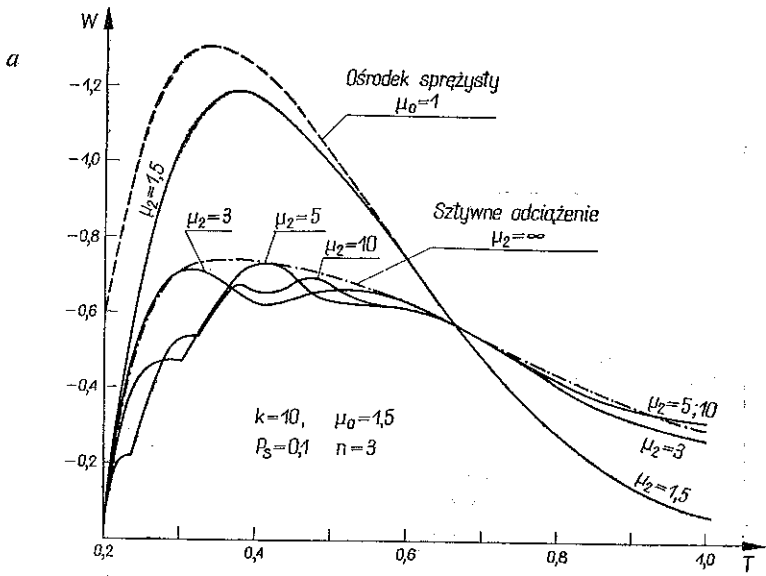
$\mu_0 = 1,5$ o $\sim 50\%$ — por. rys. 9a) mniejsza od pętli ze sztywnym odciążeniem. Stąd też wynikają duże zmiany w parametrach ruchu płyty przy zmianie współczynnika odciążenia w przedziale $\mu_0 \leq \mu_2 \leq \infty$, przy czym największe zmiany występują w bezpośrednim otoczeniu wartości $\mu_2 = \mu_0$. W miarę wzrostu współczynnika μ_0 różnice między wymienionymi wyżej pętlami plastycznych odkształceń maleją (por. rys. 9a, 9b i 9c). Prowadzi to z kolei do niewielkich różnic między parametrami ruchu płyty, uzyskanymi dla sprężystego i sztywnego odciążenia (rys. 9c). Nieregularności występujące na wykresach przyśpieszenia W (por. rys. 10a – 10c) powodowane są kolejnymi odbiciami układu fal odciążenia od płyty i od frontu fali obciąż-



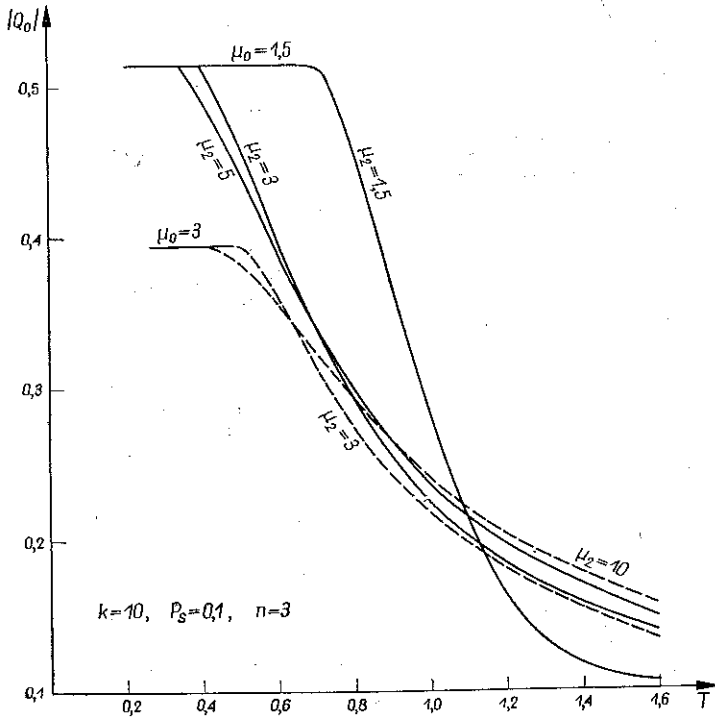
Rys. 9 b



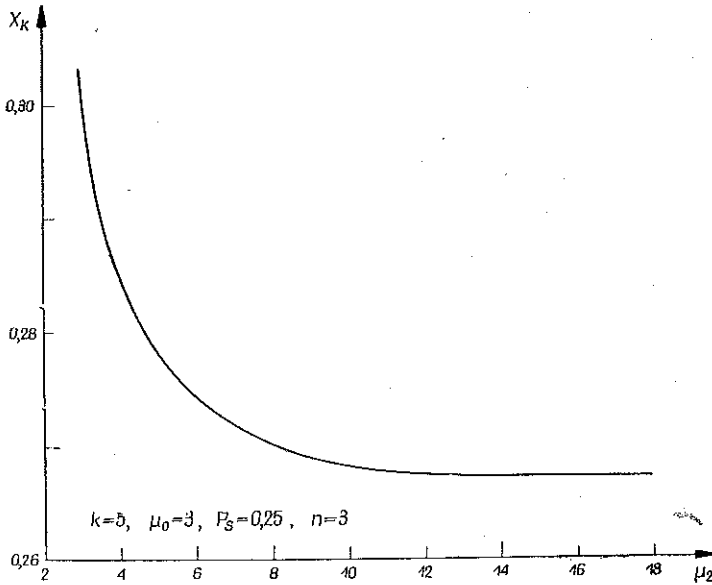
Rys. 9 c



Rys. 10



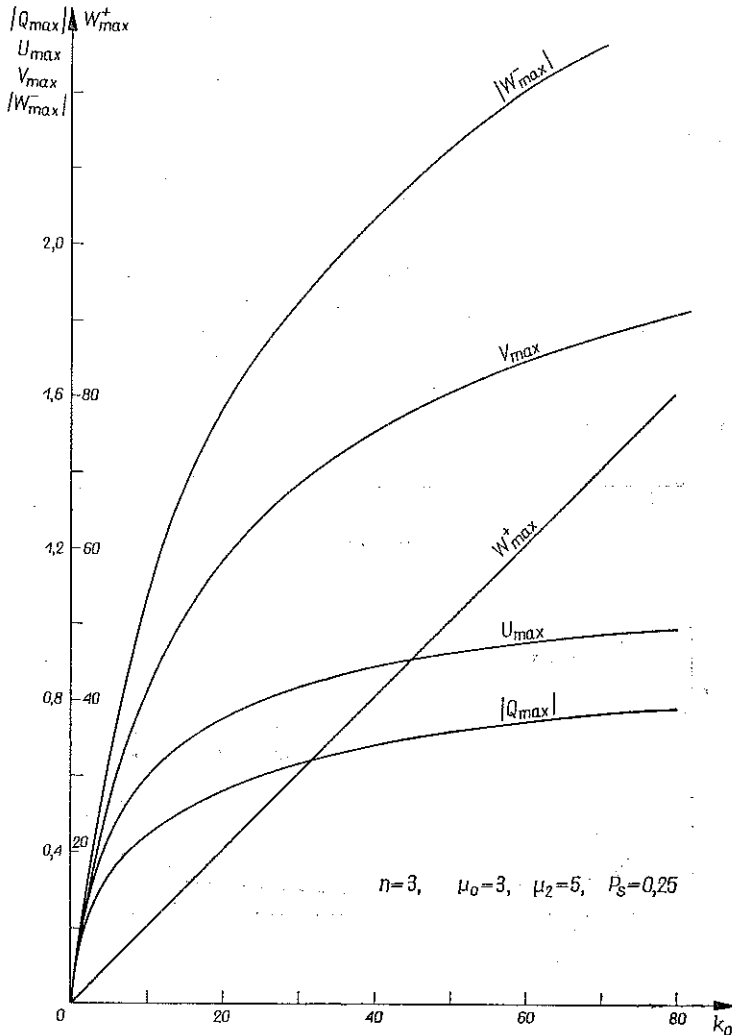
Rys. 11



Rys. 12

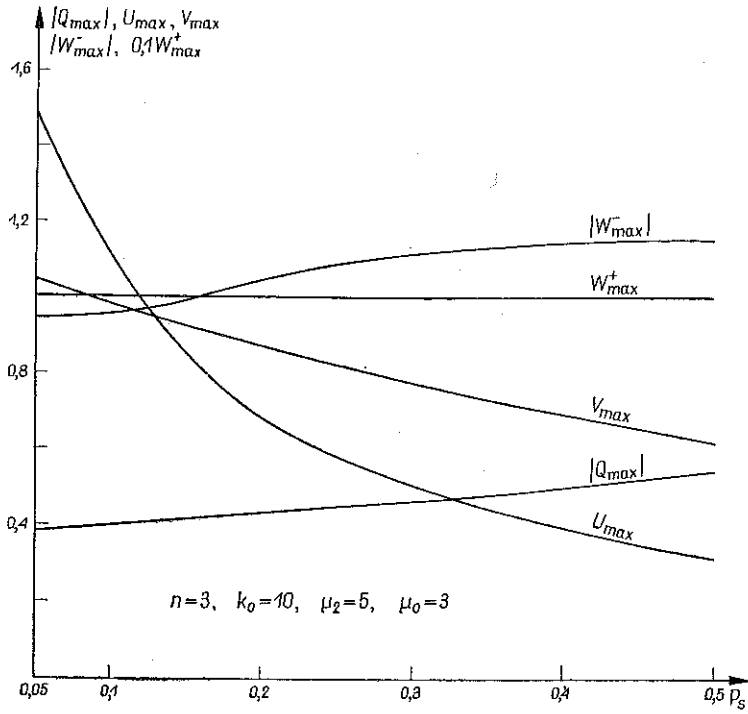
żenia silnej nieciągłości. Dla $\mu_2 = 1,5$ (rys. 10a) bezwymiarowy czas przyścia pierwszej fali odbitej wynosi $T \approx 1$; stąd brak tutaj perturbacji.

Na rys. 11 pokazujemy zmianę modułu naprężenia $|Q_0|$ na froncie fali odciażenia dla różnych współczynników μ_0 i μ_2 . Bezwzględna wartość naprężenia $|Q_0|$ zmienia

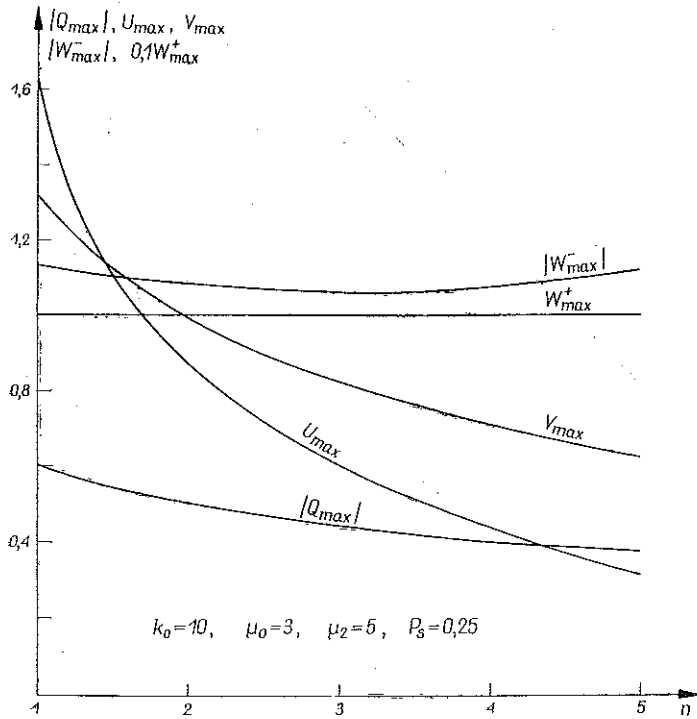


Rys. 13 a

się podobnie jak omówione wyżej parametry ruchu płyty. Na rys. 12 pokazujemy, w jaki sposób zależy głębokość przenikania frontu plastycznej fali obciążenia w głąb ośrodka od współczynnika sprężystego odciażenia μ_2 . Widać, że ze wzrostem μ_2 głębokość, do której ośrodek pod płytą odkształci się plastycznie maleje, przy czym intensywnie zmiany zachodzą w otoczeniu wartości zbliżonej do μ_0 . Wytlumaczenie tego faktu znajdujemy w pokazanej na rysunkach 9a—9c analizie pętli odkształceń plastycznych. Mianowicie ze wzrostem μ_2 pętla ta również wzrasta, przy czym największe zmiany zachodzą w bliskim otoczeniu wartości $\mu_2 \approx \mu_0$.



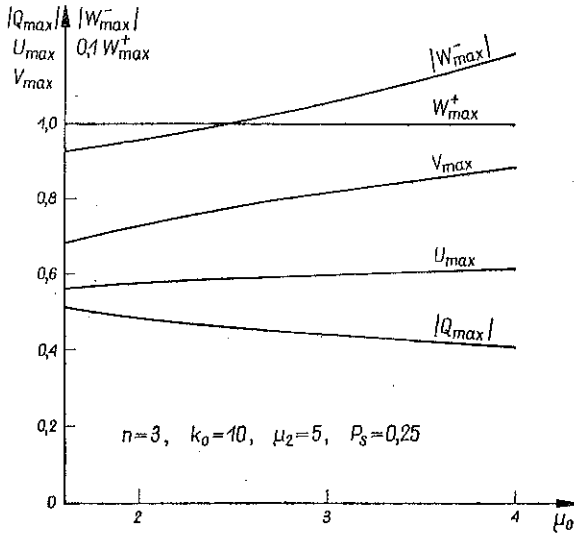
Rys. 13 b



Rys. 13 c

Zatem wzrost współczynnika odciażenia μ_2 prowadzi do zwiększenia strat energetycznych w jednostce objętości ośrodka. Powoduje to zmalenie głębokości przenikania frontu fali plastycznej.

Wreszcie na zakończenie niniejszych rozważań przedstawiamy na rysunkach 13a–13d zmiany maksymalnych wartości parametrów ruchu płyty w funkcji pozostałych czynników μ_0, k_0, P_s i n przy ustalonej wartości $\mu_2 = 5$. Porównując te wykresy z odpowiednimi wykresami z pracy [3] otrzymanymi dla sztywnego odciażenia widzimy, że różnice są rzędu 1–2 procent.



Rys. 13 d

Reasumując zamieszczoną wyżej dyskusję wyników liczbowych, można wyciągnąć ważny pod względem praktycznych zastosowań następujący wniosek: model ośrodka ze sztywnym odciażeniem dla płaskich jednowymiarowych fal naprężenia można stosować w przypadku, gdy $\mu_2 \geq 5$. Zatem w przypadku piasków uwodnionych, ciężkich glin i gruntów skalistych należy korzystać z rozwiązania podanego w niniejszej pracy. Stosowanie tutaj modelu ze sztywnym odciażeniem prowadzi do poważnych błędów.

Niniejszą pracę pragnę zakończyć serdecznym podziękowaniem, jakie składam koledze dr CZ. RYMARZOWI za opracowanie algorytmu numerycznych obliczeń rozpatrzonego tutaj problemu.

Literatura cytowana w tekście

1. X. A. Рахматулин и Ю. А. Дембянов, *Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках*, Гос. Изд. Физ. Мат. Лит., Москва 1961.
2. Z. DŻYGADŁO, S. KALISKI, L. SOLARZ, E. WŁODARCZYK, *Drgania i fale w ciałach stałych*, PWN, Warszawa 1966.
3. E. WŁODARCZYK, *Dynamika sztywnej płyty spoczywającej na sprężysto-plastycznym podłożu*, Biul. WAT., Nr 4 (188), 1968.
4. X. A. Рахматулин, А. Я. Саломонян и Н. А. Алексеев, *Вопросы динамики грунтов*, Изд. МГУ, Москва 1964.

Резюме

ВЛИЯНИЕ ЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ РАЗГРУЗКИ
НА ПАРАМЕТРЫ ДВИЖЕНИЯ ЖЕСТКОЙ ПЛАСТИНКИ,
НАХОДЯЩЕЙСЯ НА УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОМ ГРУНТЕ

В представленной работе решается задача по движению жесткой пластинки, находящейся на упруго-пластической среде с упругой разгрузкой. Пластинка загружена равномерно, внезапно приложенным давлением и затем, монотонно уменьшающимся до нуля. Вопрос волны разгрузки в данном случае решается следующим способом. Давление (напряжение) под пластинкой, на участке нагрузки (полученное из точного решения) начиная со значения равного пределу пластичности, аппроксимируется «ступенчатой» линией. При такой аппроксимации, вопрос разгрузки решается в явном виде. Проводится точный числовой анализ задачи и констатируется, что модель тела с жесткой разгрузкой, можно применять при практических расчетах в случае, когда коэффициент упругой разгрузки $\mu_2 = a_2/a_1 \geq 5$. При удом-влетворении вышеуказанного неравенства, погрешности, вытекающие из аппроксимации действительной упруго-пластической среды — моделью с жесткой разгрузкой, не превышают нескольких процентов.

Summary

EFFECT OF A LINEAR-ELASTIC UNLOADING UPON THE PARAMETERS OF MOTION
OF A RIGID PLATE RESTING ON AN ELASTOPLASTIC GROUND

In the paper presented the problem of the motion of a rigid plate resting upon an elastoplastic medium with an elastic unloading is solved. The plate was loaded uniformly with a pressure suddenly applied and subsequently decreasing monotonously to zero. The problem of the unloading wave is solved here in the following manner. The pressure (stress) under the plate on the segment of unloading (obtained from the exact solution), beginning from the value equal to the plasticity limit, was approximated by a «stepping» line. With such an approximation the problem of lightening was solved explicitly. An accurate numerical analysis of the problem was carried out and it was found that the model of a body with a rigid unloading can be applied in practical calculations in the case in which the coefficient of rigid lightening $\mu_2 = a_2/a_1 \geq 5$. When the above inequalities are satisfied, the errors resulting from approximation of the real elastoplastic medium by the model with rigid unloading do not exceed a few percent.

Praca została złożona w Redakcji dnia 23 kwietnia 1969 r.