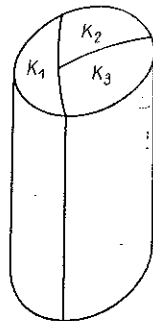


OPTYMALNA NIEJEDNORODNOŚĆ PLASTYCZNA
SKRĘCANEGO PRĘTA ZE WZGLĘDU NA NOŚNOŚĆ GRANICZNĄ

J. MAJERCZYK-GÓMUŁKOWA, A. MIODUCHOWSKI (WARSZAWA)

1. Problem

W praktyce spotykamy się ze skręcanymi prętami niejednorodnymi. Niejednorodność ta może być spowodowana np. założeniem, że pręt składa się z kilku pryzmatycznych części o różnych granicach plastyczności (rys. 1). Z punktu widzenia zastosowań praktycznych interesującym jest taki wzajemny układ tych części (przy niezmiennym konturze przekroju poprzecznego), który zapewni mu maksymalną nośność graniczną. Zagadnienia związane z tym problemem są omówione w pracy [1]. Często zdarza się, że plastyczna niejednorodność poprzeczna skręcanego pręta pryzmatycznego zmienia się nie w sposób skokowy, ale w sposób ciągły. I tu również pojawia się problem optymalnego jej rozkładu w przekroju poprzecznym, tzn. takiego jej rozkładu, który zapewni maksymalną nośność graniczną tego pręta. Temu właśnie zagadnieniu poświęcona jest niniejsza praca.



Rys. 1

Zanim przejdziemy do postawienia problemu opisującego ten typ zadania należy poczynić pewne założenia odnośnie zmienności granicy plastyczności w przekroju poprzecznym rozpatrywanego pręta. Przyjmijmy mianowicie, że wartość granicy plastyczności jest ograniczona z góry i z dołu oraz wprowadzimy «ilościowe» ograniczenie tej wielkości typu całkowitego. Ograniczenie takie zapobiegać będzie powstaniu trywialnego rozwiązania, w którym w całym obszarze przekroju poprzecznego występowałaby tylko górna wartość granicy plastyczności.

Jeżeli wprowadzimy prostokątny, kartezjański układ współrzędnych x, y, z , tak że oś z skierujemy równoległe do tworzącej powierzchni bocznej pręta, to problem ekstremalny przedstawia się następująco.

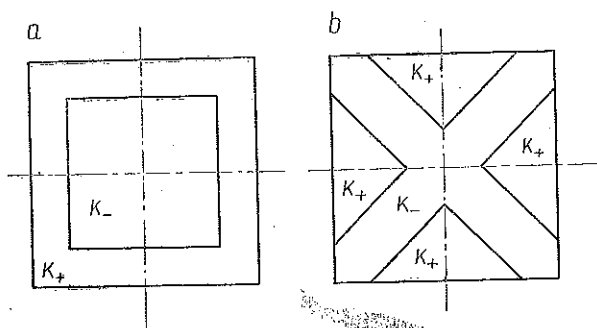
W obszarze D poszukujemy takiej funkcji naprężeń $u(x, y)$ (i takiego rozkładu granicy plastyczności $k(x, y)$), dla których zachodzi [1]:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} |\text{grad } u(x, y)| &= k(x, y), \quad [u(x, y)]_c = 0, \\ k_1 &\leq k(x, y) \leq k_2, \quad \int_D k(x, y) dx dy \leq A \end{aligned}$$

i dają maksimum funkcjonału

$$(1.2) \quad I(u, k) = \int_D u(x, y) dx dy,$$

gdzie D oznacza pole przekroju poprzecznego rozpatrywanego pręta, C kontur pola D ; k_1, k_2 odpowiednio dolną i górną dopuszczalną wartość granicy plastyczności, A pewną stałą. Przyjmijmy poza tym, że wprowadzone w (1.1) i (1.2) wielkości są wielkościami bezwymiarowymi (są też odniesione do odpowiednich parametrów). Ten sposób zapisu zwiększy jego przejrzystość.



Rys. 2

O tym, że problem optymalizacji nośności granicznej skręcanego pręta ze względu na jego niejednorodność jest bardzo złożony, niech świadczy następujący przykład. Weźmy mianowicie skokowo niejednorodny przyzmatyczny pręt o przekroju kwadratowym, dla którego $k_1/k_2 = 3/4$ i taki, że pole obszaru materiału o niższej granicy plastyczności równe jest polu obszaru o wyższej granicy plastyczności. Niech wzajemne ustawienia obu obszarów będzie takie, jak na rys. 2a i 2b. Proste rachunki pokazują, że nośność graniczna pręta dla przypadku przedstawionego na rys. 2b w przybliżeniu jest 2,5% większa od nośności granicznej pręta dla przypadku przedstawionego na rys. 2a. Jak widać, różnica ilościowa jest niewielka. Spowodowane to jest oczywiście tym, że wartości granic plastyczności obu materiałów różnią się bardzo mało. Z drugiej strony jednak łatwo stwierdzić, że dla dużych różnic tych wartości nośność graniczna pręta przedstawionego na rys. 2b będzie znacznie mniejsza od nośności granicznej pręta przedstawionego na rys. 2a.

2. Warunki konieczne istnienia ekstremum

2.1. Próbę otrzymania warunku koniecznego do rozwiązania zadania (1.1) – (1.2) oprzemy na abstrakcyjnym schemacie, jaki dla tego typu zadań wariacyjnych opracowali NEUSTADT i HALKIN [2 i 3].

Zbiorem \mathcal{L} , na którym poszukujemy rozwiązania, niech będzie zbiór par funkcji (u, k) , określonych w obszarze D i takich, że:

a) obszar D można rozbić na skończoną ilość podobszarów o regularnych brzegach-tak, aby k było klasy C^1 w każdym z tych podobszarów i dawało się w sposób

ciągły wraz z pochodnymi przedłużyć na jego domknięcie (rozbicie D na podobszary może być różne dla różnych funkcji k); można by krótko powiedzieć, że funkcja k ma być «przedziałami gładka» w obszarze D ;

b) funkcja k jest taka, że równanie (1.1)₁ z warunkiem brzegowym (1.1)₂ ma rozwiązanie z gradientem «przedziałami gładkim»;

c) funkcja u jest takim właśnie rozwiązaniem równania (1.1) z warunkiem (1.1)₂.

Niech para (u_0, k_0) nadaje maksimum funkcjonałowi (1.2) na zbiorze \mathcal{L} przy ograniczeniach następujących:

$$\psi_1(u, k) = \inf_{(x, y) \in D} [k(x, y) - k_1] \geq 0,$$

$$\psi_2(u, k) = \inf_{(x, y) \in D} [k_2 - k(x, y)] \geq 0,$$

$$\psi_3(u, k) = A - \int_D k(x, y) dx dy \geq 0.$$

Zbiór M , który gra rolę aproksymacji zbioru \mathcal{L} w otoczeniu punktu (u_0, k_0) , określimy następująco: M składa się z takich par funkcji (\bar{u}, \bar{k}) określonych na D , że

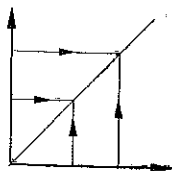
a) \bar{k} jest «przedziałami gładka» w D ;

b) \bar{u} ma «przedziałami gładki» gradient i spełnia równanie

$$(2.1) \quad \text{grad } u_0(x, y) \text{ grad } \bar{u}(x, y) = k_0(x, y) \bar{k}(x, y);$$

c) $[\bar{u}(x, y)]_c = 0$;

d) \bar{u} może mieć skokową nieciągłość tylko w takich punktach obszaru D , w których spotykają się dwie linie gradientowe funkcji $u_0(x, y)$ (rys. 3).



Rys. 3

Równanie (2.1) jest linearyzacją równania (1.1)₁ w otoczeniu rozwiązania (u_0, k_0) . Jeśli mianowicie rozpatrzymy równanie

$$(2.2) \quad |\text{grad } u| = k_0 + \varepsilon \bar{k}, \quad [u]_c = 0$$

i jego rozwiązanie przedstawimy w postaci $u = u_0 + \varepsilon \bar{u}$, to po odrzuceniu wyrazu zawierającego ε^2 otrzymamy na \bar{u} równanie (2.1).

Łatwo zauważyć, że zbiór M jest liniowy.

Określimy teraz przekształcenie zbioru M w \mathcal{L} , a raczej rodzinę przekształceń zależną od parametru $\varepsilon > 0$:

$$(2.3) \quad \delta_\varepsilon(\bar{u}, \bar{k}) = (u, k_0 + \varepsilon \bar{k}),$$

gdzie u jest tym rozwiązaniem równania (2.2), dla którego całka

$$\int_D u dx dy$$

jest największa.

Na zbiorze M określamy funkcjonały

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \varphi_0(\bar{u}, \bar{k}) &= \int_D \bar{u}(x, y) dx dy, \\ \varphi_1(\bar{u}, \bar{k}) &= \inf_{(x, y) \in D_1} \bar{k}(x, y), \\ \varphi_2(\bar{u}, \bar{k}) &= \inf_{(x, y) \in D_2} [-\bar{k}(x, y)], \\ \varphi_3(\bar{u}, \bar{k}) &= - \int_D \bar{k}(x, y) dx dy, \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.5) \quad \begin{aligned} D_1 &= \{(x, y) \in D; k_0(x, y) = k_1\}, \\ D_2 &= \{(x, y) \in D; k_0(x, y) = k_2\}. \end{aligned}$$

Obszary D_1 i D_2 są oczywiście nieznanne i muszą być wyznaczone w trakcie rozwiązywania zadania.

Aby móc zastosować twierdzenie Halkina [4] wystarczy dowieść, że

$$(2.6) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\frac{\psi_i(\delta_\varepsilon(\bar{u}, \bar{k})) - \psi_i(u_0, k_0)}{\varepsilon} - \varphi_i(\bar{u}, \bar{k}) \right] = 0$$

dla $i = 1, 2, 3$ oraz

$$(2.7) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{I(\delta_\varepsilon(\bar{u}, \bar{k})) - I(u_0, k_0)}{\varepsilon} \right] - \varphi_0(\bar{u}, \bar{k}) \geq 0.$$

Równość (2.6) jest dla $i = 3$ oczywista, a dla $i = 1, 2$ jest dobrze znanym faktem z teorii różniczek wypukłych [5]. Nierówność (2.7) po rozwinięciu przybiera postać następującą:

$$(2.8) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_D (u - u_0) dx dy \geq \int_D \bar{u} dx dy,$$

gdzie jak poprzednio u jest rozwiązaniem równania (2.2) o maksymalnej całce, a \bar{u} jest rozwiązaniem równania (2.1) o własnościach b, c i d . Nie udało się wyjaśnić, przy jakich założeniach zachodzi nierówność (2.8). Założenia te miałyby wpływ na zakres stosowalności tej metody.

Jeśli nierówność (2.8) zachodzi, to z twierdzenia Halkina łatwo wnioskujemy, że istnieją stałe c_1, c_2 i c_3 , nieujemne i nierówne zeru jednocześnie takie, że

$$(2.9) \quad \int_D \bar{u} dx dy + c_1 \inf_{D_1} \bar{k}(x, y) + c_2 \inf_{D_2} [-\bar{k}(x, y)] - c_3 \int_D \bar{k} dx dy \leq 0$$

dla każdej pary funkcji $(\bar{u}, \bar{k}) \in M$.

2.2. Funkcje \bar{u} i \bar{k} są związane ze sobą zależnością (2.1). Postaramy się wyrazić pierwszą całkę występującą w równaniu (2.9) przez k . W tym celu wprowadzimy

w obszarze D krzywoliniowy, ortogonalny układ współrzędnych r, s tak, by oś r pokrywała się z linią gradientu poszukiwanej funkcji u_0 :

$$(2.10) \quad u_0[\mathbf{r}(s, r)] = r,$$

gdzie

$$(2.11) \quad \mathbf{r}(s, r) = [x(s, r), y(s, r)]$$

i jednocześnie

$$(2.12) \quad \partial_s \mathbf{r} \partial_r \mathbf{r} = 0,$$

przy czym

$$(2.13) \quad J(s, r) = [\partial_s \mathbf{r}, \partial_r \mathbf{r}] > 0.$$

Oznaczmy przez \mathbf{n} i $\boldsymbol{\tau}$ wersory nowego układu współrzędnych r, s . Zgodnie z poprzednim mamy

$$(2.14) \quad \mathbf{n} = \frac{\text{grad } u_0}{|\text{grad } u_0|} = \frac{\partial_r \mathbf{r}}{|\partial_r \mathbf{r}|} = \partial_r \mathbf{r} k_0,$$

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial_s \mathbf{r}}{|\partial_s \mathbf{r}|} = \frac{\partial_s \mathbf{r}}{l},$$

gdzie wprowadzono oznaczenie $l \equiv |\partial_s \mathbf{r}|$; równocześnie

$$(2.15) \quad J(s, r) = |\partial_s \mathbf{r}| |\partial_r \mathbf{r}| = \frac{l}{k_0}.$$

Napiszemy teraz warunek (2.9) w nowoprzyjętym układzie współrzędnych r, s oraz wyrazimy pierwszą z całek tego równania jako funkcję $k(\sqrt{x, y})$. Mamy mianowicie

$$(2.16) \quad \int_D \bar{u} dx dy = \int_{\bar{D}} \hat{u}(s, r) J dr ds = \int_0^{s_0} \int_0^{r_0(s)} \hat{u}(s, r) J dr ds.$$

Zakładamy, że do każdego punktu obszaru D możemy dojść wzdłuż linii gradientu, która wychodzi od konturu C , a kończy się na linii nieciągłości w punkcie (s_0, r_0) . Ponadto w naszym układzie współrzędnych wielkości takie, jak np. $\bar{u}(x, y)$ będziemy przedstawiali jako $\hat{u}(s, r)$.

Dzieląc równanie (2.1) przez

$$|\text{grad } u_0| = k_0$$

i korzystając z zależności (2.14), otrzymujemy

$$(2.17) \quad k_0 \partial_r \mathbf{r} \text{ grad } \bar{u}(x, y) = \bar{k}(x, y),$$

czyli

$$(2.18) \quad \partial_r \hat{u}(s, r) = \frac{\hat{k}(s, r)}{\hat{k}_0(s, r)}.$$

Całkując przez części i pamiętając, że na brzegu obszaru, tj. dla $r = 0$, mamy $\hat{u} = 0$, otrzymujemy

$$(2.19) \quad \int_0^{r_0(s)} \hat{u}(s, r) J(s, r) dr = \int_0^{r_0(s)} \left[\frac{\hat{k}(s, r)}{\hat{k}_0(s, r)} \int_r^{r_0(s)} J(s, \rho) d\rho \right] dr.$$

Warunek (2.9) przybierze teraz postać

$$(2.20) \quad \int_0^{s_0} \int_0^{r_0(s)} \hat{k}(s, r) \left[\frac{1}{\hat{k}_0(s, r)} \int_r^{r_0(s)} J(s, \rho) d\rho - c_3 J(s, r) \right] dr ds \leq \\ \leq -c_1 \inf_{\hat{D}_1} \hat{k}(s, r) - c_2 \inf_{\hat{D}_2} [-\hat{k}(s, r)]$$

dla każdej funkcji \hat{k} «przedziałami gładkiej» w D . Korzystając z dowolności k otrzymujemy stąd łatwo następujący wniosek:

$$(2.21) \quad \frac{1}{\hat{k}_0(s, r)} \int_r^{r_0(s)} J(s, \rho) d\rho - c_3 J(s, r) \leq 0 \quad \text{dla } (s, r) \in \hat{D}_1, \\ \frac{1}{\hat{k}_0(s, r)} \int_r^{r_0(s)} J(s, \rho) d\rho - c_3 J(s, r) \geq 0 \quad \text{dla } (s, r) \in \hat{D}_2, \\ \frac{1}{\hat{k}_0(s, r)} \int_r^{r_0(s)} J(s, \rho) d\rho - c_3 J(s, r) = 0 \quad \text{dla } (s, r) \in \hat{D} / (\hat{D}_1 \cup \hat{D}_2).$$

Niech

$$(2.22) \quad G(s, r) = \int_r^{r_0(s)} J(s, \rho) d\rho - c_3 \hat{k}_0(s, r) J(s, r) = \int_r^{r_0(s)} \frac{l(s, \rho)}{\hat{k}_0(s, \rho)} d\rho - c_3 l(s, r).$$

Warunek konieczny maksimum badanego funkcjonału przyjmuje ostatecznie postać

$$(2.23) \quad G(s, r) \leq 0 \quad \text{dla } \hat{k}_0(s, r) = k_1, \\ G(s, r) \geq 0 \quad \text{dla } \hat{k}_0(s, r) = k_2, \\ G(s, r) = 0 \quad \text{dla } k_1 < \hat{k}_0(s, r) < k_2.$$

Jeżeli w jakimś obszarze funkcja \hat{k}_0 nie osiąga żadnej ze znanych wartości granicznych k_1 i k_2 , to w całym tym obszarze $G(s, r) = 0$, a więc w każdej regularnej części tego obszaru mamy

$$(2.24) \quad \partial_r G = -\frac{l(s, r)}{\hat{k}_0(s, r)} - c_3 \partial_r l(s, r) = 0.$$

3. Dyskusja jakościowa

3.1. Jak widać, efektywne wykorzystanie warunków (2.23) i (2.24) jest bardzo trudne. Dlatego też zajmiemy się teraz bliżej ich analizą z punktu widzenia ich zastosowania przy konstrukcji rozwiązania.

Warunek (2.24) ma przejrzysty sens geometryczny. Aby to pokazać, udowodnimy następujący

LEMMA 1. *Prawdziwy jest związek*

$$(3.1) \quad \partial_r l = -\kappa J = -\kappa \frac{l}{\hat{k}_0},$$

gdzie κ jest krzywizną linii $r = \text{const}$, tj. krzywej opisanej przez wektor $\mathbf{r}(s, r)$ przy zmiennym s i ustalonym r .

Dowód. Istotnie, biorąc pod uwagę, że \mathbf{n} i $\boldsymbol{\tau}$ określone wzorami (2.14) są odpowiednio wersorami normalnej i stycznej do tej krzywej i korzystając ze znanej w geometrii różniczkowej zależności

$$(3.2) \quad \partial_s \mathbf{n} = -\kappa |\partial_s \mathbf{r}| \boldsymbol{\tau}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \partial_r l &= \partial_r (k_0 J) = \partial_r [\partial_s \mathbf{r}, k_0 \partial_r \mathbf{r}] = \partial_r [\partial_s \mathbf{r}, \mathbf{n}] = \\ &= [\partial_s (\partial_r \mathbf{r}), \mathbf{n}] + [\partial_s \mathbf{r}, \partial_r \mathbf{n}] = \left[\partial_s \left(\frac{\mathbf{n}}{\hat{k}_0} \right), \mathbf{n} \right] \end{aligned}$$

(drugi składnik jest równy 0, bo $\partial_s \mathbf{r} \parallel \boldsymbol{\tau}$, a $\partial_r \mathbf{n}$ jako pochodna wektora o stałej długości jest wektorem prostopadłym do \mathbf{n} , czyli też równoległym do $\boldsymbol{\tau}$). Stąd

$$\partial_r l = \frac{1}{\hat{k}_0} [\partial_s \mathbf{n}, \mathbf{n}] = -\frac{\kappa}{\hat{k}_0} l [\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}] = -\kappa \frac{l}{\hat{k}_0},$$

co należało dowieść. Zatem

$$(3.4) \quad \partial_r G = \frac{l}{\hat{k}_0} (c_3 \kappa - 1).$$

Warunek (2.24) oznacza więc tyle, że

$$(3.5) \quad \kappa = \frac{1}{c_3},$$

tzn., że w obszarze o «pośredniej» wartości k_0 linie $r = \text{const}$ muszą być łukami okręgów o promieniu c_3 . Ponadto, oznaczając $\kappa = 1/\rho$ widać z (3.4), że a) G rośnie jako funkcja r dla $\rho < c_3$; b) G maleje jako funkcja r dla $\rho > c_3$.

Zanim przejdziemy do omówienia otrzymanych wyników i ich interpretacji udowodnimy jeszcze następujący

LEMMA 2. *Prawdziwy jest wzór*

$$(3.6) \quad \partial_s \left(\frac{1}{\hat{k}_0} \right) = -\kappa(r)J,$$

gdzie $\kappa(r)$ jest krzywizną linii $s = \text{const}$, tj. krzywej opisanej przez wektor $\mathbf{r}(s, r)$ przy zmiennym r i ustalonym s .

Dowód. Analogiczne do lematu 1 otrzymujemy

$$\partial_s \left(\frac{1}{k_0} \right) = \partial_s \left(\frac{J}{l} \right) = \partial_s \left[\frac{\partial_s \mathbf{r}}{l}, \partial_r \mathbf{r} \right] = [\tau, l\partial_r \tau].$$

Uwzględniając zależność analogiczną do (3.2)

$$\partial_r \tau = -\kappa(r) |\partial_r \mathbf{r}| \mathbf{n}$$

mamy

$$\partial_s \left(\frac{1}{\hat{k}_0} \right) = \left[\frac{\partial_s \mathbf{r}}{l}, -l\kappa(r) \partial_r \mathbf{r} \right] = -\kappa(r)J,$$

co należało dowieść.

Jak widać z (3.6), w obszarze, w którym funkcja \hat{k}_0 jest równa wartościom granicznym k_1 lub k_2 , linie gradientu tej funkcji są liniami prostymi. Znany ten fakt przytoczony tu został dla zachowania zwartości naszych rozważań i uwypuklenia pewnych zależności geometrycznych obszaru D .

Prześledźmy obecnie, jak zmienia się funkcja k_0 wzdłuż linii gradientu ($s = \text{const}$). Zaczniemy od punktu (s_0, r_0) na linii nieciągłości. Jak widać z (2.22) w pewnym otoczeniu tego punktu wartość $G(s, r) \leq 0$; innymi słowy, posuwając się od punktu (s_0, r_0) (wzdłuż linii gradientu w kierunku malejących wartości r) r zmienia się od $r = 0$ na C do pewnej wartości r_0 na linii nieciągłości [zgodnie z (2.23)] w obszarze, w którym $\hat{k}_0(s, r) = k_1$. Oczywiście zgodnie z (3.6) linia ta jest linią prostą. Punkt, w którym otrzymamy $G(s, r) = 0$ na tej linii oznaczmy przez r_2 [punkt ten musi się pojawić, bo wartość całki w (2.22) stale rośnie]. Posuwając się dalej po linii gradientu określonej wzorem (3.5) dojdziemy do punktu, w którym obszar $G(s, r) = 0$ się kończy. Jak łatwo spostrzec w przypadku wyjścia obszaru $G(s, r) = 0$ na kontur C nie byłby spełniony warunek (1.1)₂. Oznaczmy ten punkt przez r_1 (oczywiście może się zdarzyć, że punkty r_2 i r_1 pokryją się). Ograniczmy teraz nasze rozważania tylko do takich obszarów D , których kontury składają się ze skończonej liczby odcinków prostych (konturami krzywoliniowymi zajmiemy się później). Ponieważ w otoczeniu tego brzegu linie gradientu są liniami prostymi, to zgodnie z (3.4) (od r_1 , gdzie $G(s, r) = 0$ do $r = 0$ wartość $G(s, r)$ rośnie) $G(s, r) \geq 0$, czyli wobec (2.23) jest to obszar, w którym $\hat{k}_0(s, r) = k_2$.

3.2. Rozpatrzmy teraz obszar $G(s, r) = 0$. Zgodnie z (3.5) linie $u_0 = \text{const}$ są łukami okręgów o promieniu C_3 . Krzywą, na której leżą środki tych okręgów, sparametryzujemy za pomocą r :

$$(3.7) \quad \mathbf{O}(r) = [x_0(r), y_0(r)]$$

oraz oznaczymy przez $a(s, r)$ kąt, jaki tworzy promień wychodzący z punktu leżącego na krzywej środków (3.7) do punktu (s, r) , z kierunkiem $\mathbf{O}(r)$, liczony w kierunku wzrostu s (rys. 4). Ponieważ, jak widać, zachodzi

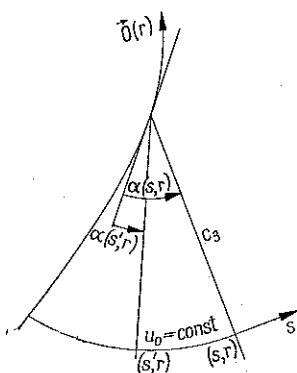
$$l(s, r) = c_3 \partial_s a(s, r),$$

a dla linii gradientu zgodnie z (2.14)₂

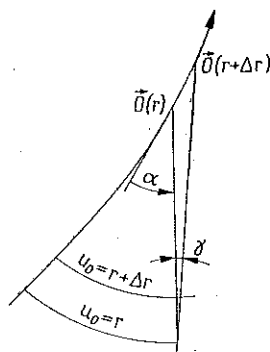
$$\left| \frac{dr}{ds} \right| = \frac{\kappa(r)}{k_0},$$

to uwzględniając zależności geometryczne, wiążące ze sobą dwie sąsiednie linie $u_0 = r$ oraz $u_0 = r + \Delta r$, otrzymujemy (rys. 5)

$$(3.8) \quad \cos a(s', r) = \frac{k_0(s, r)}{k_0(s', r)} \cos a(s, r).$$



Rys. 4



Rys. 5

3.3. Jak widać z (2.22), (3.5) i (3.8) dane linii (3.7) lub którejs z linii $r_1(s)$, $r_2(s)$ ograniczających obszar $G \equiv 0$ narzuca od razu wzajemny układ linii gradientu i linii $u_0 = \text{const}$ w rozpatrywanym obszarze D . Istotnie, weźmy np. pod uwagę linię środków okręgów o promieniu c_3 , zdefiniowaną jak w (3.7). Niech linia ta oraz linia $r_0(s)$ przebiegają np. tak jak na rys. 6. Wtedy zgodnie z (2.22) musi zachodzić warunek

$$\int_{r_2(s)}^{r_0(s)} \frac{l_0(s, \rho)}{k_1} d\rho - c_3 l(s, r_2(s)) = 0.$$

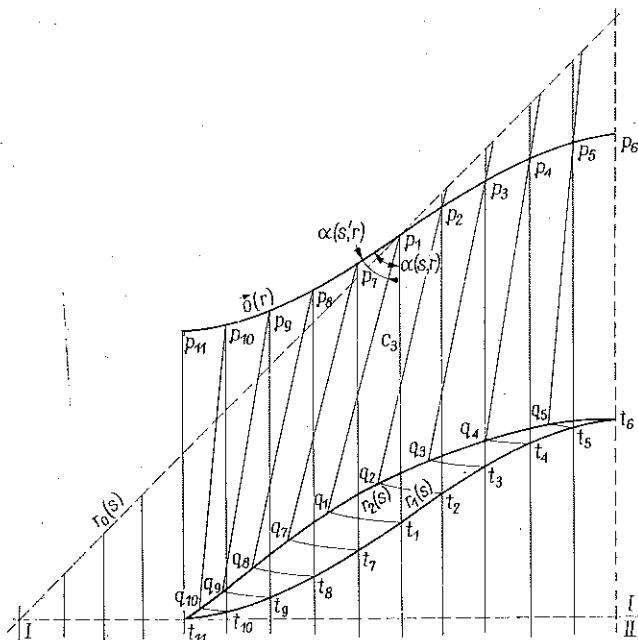
Jeżeli teraz uwzględnimy, że w obszarze ograniczonym liniami $r_0(s)$ i $r_2(s)$ występuje materiał o stałej granicy plastyczności (linie gradientu są liniami prostymi), a zgodnie z (2.14)₂ wartości l zastąpimy w sposób przybliżony odpowiednimi odległościami pomiędzy tymi liniami gradientu, to równanie to możemy napisać w postaci

$$\frac{1}{k_1} l_{sr} \cdot \rho k_1 = c_3 l(s, r_2(s)),$$

gdzie przez p oznaczono odległość mierzoną wzdłuż linii gradientu od linii $r_2(s)$ do linii $r_0(s)$. Jak widać jest ona równa

$$(3.9) \quad p = \frac{l(s, r_2(s))}{l_{sr}} c_3.$$

Od określonej w ten sposób linii $r_2(s)$, po łuku okręgu o promieniu C_3 wzdłuż $u_0 = \text{const}$ zgodnie z (3.8) dochodzimy do linii $r_1(s)$. Z drugiej strony tej linii mamy obszar o stałej granicy plastyczności i w oparciu o dany kontur obszaru D określone rozwiązanie. Oczywiście problem polega teraz na takim określeniu linii $O(r)$, aby



Rys. 6

układy linii gradientu funkcji u_0 i linii $u_0 = \text{const}$ po obu stronach linii $r_1(s)$ były zgodne. Jak się potem okaże, w odniesieniu do obszarów o konturach składających się z linii prostych zagadnienie to daje się stosunkowo łatwo rozwiązać. Wzory (3.8) i (3.9) oraz znany sposób budowy obszaru $G(s, r) = 0$ są stosunkowo prostymi zależnościami geometrycznymi i dlatego też pole linii gradientu i linii poślizgu dla każdego obszaru D budować będziemy graficznie.

4. Metoda graficzna

4.1. Rozpatrzmy teraz następujący problem. Należy zbudować rozwiązanie dla pręta pryzmatycznego o przekroju kwadratowym przy danych z góry wartościach k_2/k_1 i C_3 . Niech np. wynoszą one odpowiednio $k_2/k_1 = 4/3$ i $C_3 = 10$. Narysujemy na razie układ linii równoległych (pole linii gradientu odpowiadające rozwiązaniu dla pręta jednorodnego) oraz linię nieciągłości, której punkty mieć będą

współrzędne s_0, r_0 . Linia ta przecina oczywiście linie gradientu pod kątem 45° . Na razie nie precyzujemy bliżej położenia konturu tego kwadratu (wymiarów boku kwadratu).

Wiemy tylko, że kontur ten przecinać będzie narysowane linie gradientu pod kątem prostym.

Na jednej z linii gradientu wybierzmy sobie dowolnie dla ustalenia uwagi punkt p_1 przecięcia się linii nieciągłości z linią gradientu (rys. 6). Obieźmy sobie kąt $a(s, r)$, pod jakim tę linię gradientu przecina linia $\mathbf{O}(r)$. Z punktu p_1 zgodnie z (3.8) zataczamy teraz łuk o promieniu C_3 od punktu t_1 do punktu q_1 . Położenie punktu p_2 na sąsiedniej linii gradientu, jak również kierunek linii $\mathbf{O}(r)$ w tym punkcie, nie są już dowolne. Dobieramy je teraz tak, by spełniały zależności (3.8) i (3.9), co wobec ich prostego sensu geometrycznego nie nastęrcza większych trudności. W wyniku otrzymujemy położenie punktu p_2, t_2 i q_2 . Przystępujemy teraz do konstrukcji sąsiedniej linii gradientu przechodzącej przez punkt p_3 itd. aż do momentu, w którym punkty q_i i t_i (dla $i = l, i = k$) się pokrywają. Moment taki musi wystąpić, bo linia nieciągłości przebiega po jednej stronie punktu p_1 nad linią $\mathbf{O}(r)$, po drugiej zaś pod nią, co wobec (3.9) powoduje wzrost kąta $a(s, r)$, jeżeli posuwamy się po linii $\mathbf{O}(r)$ od punktu p_1 , czyli zgodnie z (3.8) wzrost kąta $a(s', r)$; w konsekwencji następuje zmniejszanie się długości łuku $t_i q_i$. Jak widać, otrzymaliśmy w ten sposób pewien układ linii poślizgu spełniający (3.5), (3.8), (3.9), jak również linie $r_1(s), r_2(s)$ ograniczające obszar, w którym $G(s, r) = 0$.

Oczywiście pozostaje jeszcze do rozstrzygnięcia problem konturu, jakiemu pole takie odpowiada. Otóż, gdyby konturem dolnym była jakakolwiek linia poniżej I - I (rys. 6), to w rozwiązaniu pojawiłaby się linia kontaktu materiałów o różnych granicach plastyczności, na której albo naprężenia normalne nie byłyby sobie równe, co jest sprzeczne [6], albo nie byłby spełniony warunek (3.9). Analogicznie można powiedzieć o linii II - II.

W celu przedstawienia pełnego rozwiązania (pole linii gradientu i linii poślizgu) należy jeszcze do otrzymanej rodziny linii gradientu funkcji u_0 (rys. 6) dorysować rodzinę linii ortogonalnych $u_0 = \text{const}$ (rys. 7). Przedstawia on rozwiązanie dla 1/4 kwadratu.

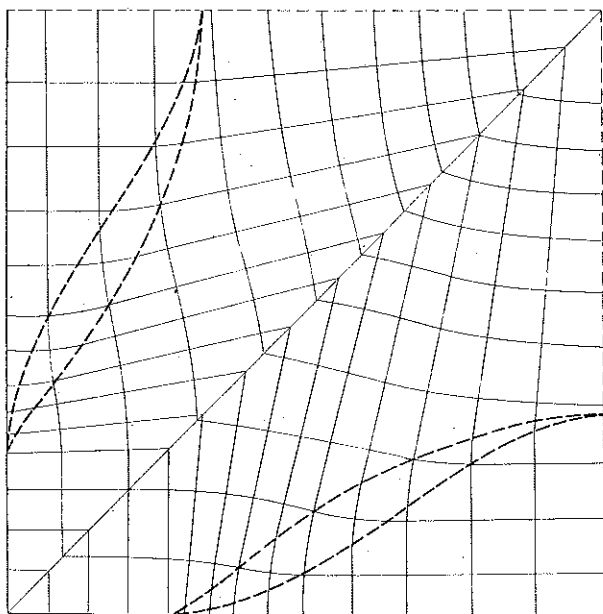
Na zakończenie dyskusji tego przykładu należy poruszyć jeszcze następujący problem. Budując pole linii gradientu funkcji u_0 przyjęliśmy, że linia $\mathbf{O}(r)$ przecina linię nieciągłości w punkcie p_1 ; powstaje oczywiście pytanie, czy rzeczywiście fakt taki musi mieć miejsce. Aby na to odpowiedzieć założmy, że linia $\mathbf{O}(r)$ ma następujący przebieg. Pozostaje bez zmian w punktach p_{11}, \dots, p_7 ; w punkcie p_1 jest styczna do linii nieciągłości, a dalej przebiega dowolnie nad nią (po przeciwnej stronie linii $r_0(s)$ niż na rys. 6). Łatwo pokazać, że taki przebieg linii $\mathbf{O}(r)$ prowadzi do sprzeczności. Mianowicie, gdyby krzywizna κ_0 tej linii zachowała stale ten sam znak, co w punktach p_{11}, \dots, p_7 i p_1 , to w pewnym momencie punkt (s', r) zgodnie z (3.8) musiałby wypaść po drugiej stronie linii $r_0(s)$; gdyby natomiast w pewnej chwili stała się równa zero lub zmieniła znak, to zgodnie z (3.9) musiałoby zachodzić $p \geq C_3$ wobec $p < C_3$. Jak widać, linia $\mathbf{O}(r)$ może być co najwyżej styczna do linii $r_0(s)$ w punkcie p_1 . Ale wtedy $a(s, r) = 45^\circ$. Ponieważ musi zachodzić $\varphi(s', r) \geq 0$

[punkt $q(s', r)$ nie może wychodzić na drugą stronę linii $r_0(s)$], to zgodnie z (3.8) musi zachodzić warunek

$$(4.1) \quad \frac{k_0(s, r)}{k_0(s', r)} = \frac{k_2}{k_1} \leq \sqrt{2}.$$

Oznacza to tyle, że w przypadku kwadratu dla $k(s, r)$

$$k_1 \leq k(s, r) \leq k_2.$$



Rys. 7

Przy k_2 i k_1 spełniających (3.9), możemy poszukiwać rozwiązania dla tych wszystkich wartości A , które spełniają ograniczenie $A_1 \leq A \leq A_2$, gdzie przyjęto oznaczenia

$$A_1 = \int_D k_1 dx dy; \quad A_2 = \int_D k_2 dx dy;$$

nie natrafimy więc na sprzeczności przy budowie rozwiązania. Autorom niestety nie udało się uzyskać zależności ograniczających stosowalność tego typu metody dla przypadku, gdy (3.9) nie byłoby spełnione, tzn. gdy

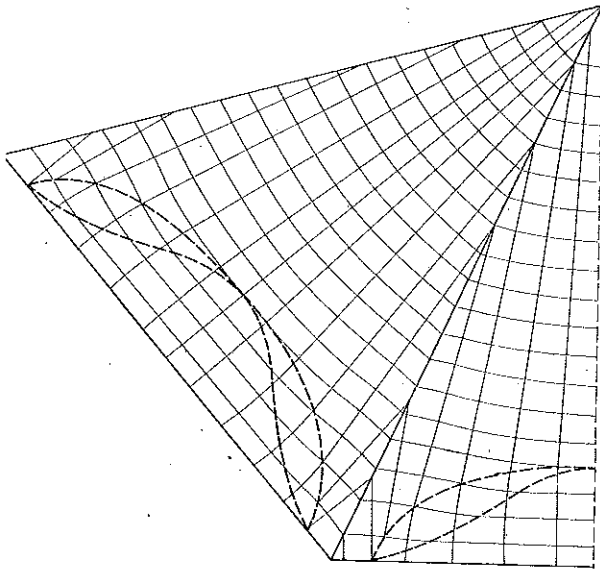
$$\frac{k_2}{k_1} < \sqrt{2}$$

w odniesieniu do odpowiadających im wartości \bar{A}_1 i \bar{A}_2 . Oczywiście rozwiązania takie w pewnym zakresie parametrów są możliwe, gdyż linia $\mathbf{O}(r)$ może przecinać linię nieciągłości pod kątem większym niż 0° (tzn. w odniesieniu do kwadratu $\alpha(s, r) > 45^\circ$). Np. na rys. 8 mamy przedstawione rozwiązanie dla siedmiokąta

przy takich samych wartościach k_2/k_1 i C_3 jak dla kwadratu. W tym przypadku warunek (4.1) ma postać

$$(4.2) \quad \frac{k_2}{k_1} \leq \frac{1}{0,9}$$

i oczywiście $k_2/k_1 = 4/3$ nie spełnia (4.2). Z drugiej jednak strony otrzymane rozwiązanie spełnia równania (3.5), (3.8) i (3.9), czyli jest poprawne dla pewnego zakresu wartości A_1 i A_2 .

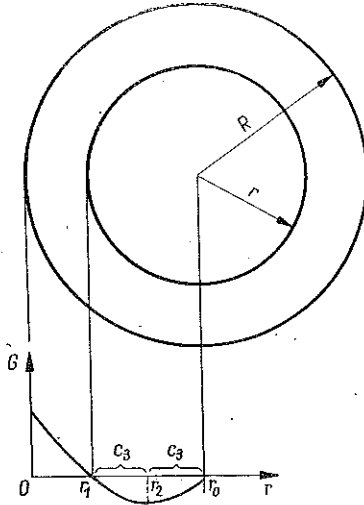


Rys. 8

4.2. Jak widać z dotychczasowych rozważań, znalezienie rozwiązania nawet dla warunków postawionych jak w (1.1) – (1.2) jest zagadnieniem bardzo trudnym. Wynika to oczywiście z faktu, że określenie wartości funkcjonału C_3 bezpośrednio z nich jest niemożliwe. Gdyby zachodziła jednak konieczność otrzymania rozwiązania dla z góry danych wartości k_1, k_2 i A , to można postąpić następująco. Przyjmujemy pewną wartość C_3 (przy pozostałych wartościach początkowych zgodnie z założeniem) i dla niej konstruujemy rozwiązanie tak, jak to zostało opisane w p. 3. Sprawdzamy potem rozbieżność z warunkiem (1.1) i korygujemy wartość C_3 (jeżeli C_3 rośnie, to wartość A maleje i odwrotnie) i ponownie budujemy rozwiązanie. Postępowanie takie daje oczywiście ciąg kolejnych przybliżeń aż do momentu osiągnięcia wymaganej dokładności.

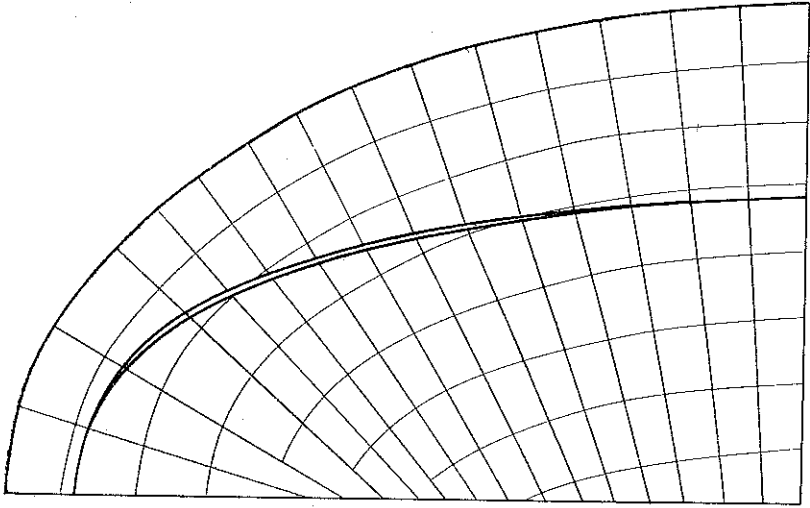
Ponieważ jednak w naszym przypadku interesują nas nie tyle konkretne wartości k_1, k_2 i A , a raczej wzajemny układ stref materiałów o różnych granicach plastyczności, to ograniczyliśmy się tu do podania rozwiązania dla z góry określonego kształtu konturu (a nie jego wymiarów) przy danych wartościach k_2/k_1 i C_3 . Oczywiście, zgodnie z tym, co powiedzieliśmy poprzednio, rozwiązanie takie jest pierwszym w ciągu kolejnych przybliżeń do rozwiązania prawidłowego.

4.3. Zajmijmy się obecnie takimi przypadkami prętów pryzmatycznych, w których kontur przekroju poprzecznego jest krzywoliniowy. W świetle poprzednio omówionego przykładu pręta kwadratowego widać od razu, na jak duże trudności napotkamy teraz przy konstrukcji rozwiązania w oparciu o zależności (3.5), (3.8) i (3.9). Poprzednio budowaliśmy rozwiązanie nie mając z góry danego położenia konturu; nie był on nam potrzebny, gdyż linie gradientu, w odniesieniu do których stosowaliśmy warunki geometryczne, zawsze były rodziną linii równoległych. Mogliśmy więc stosować niejako metodę odwrotną: do danego rozwiązania dobieraliśmy kontur. Przy obwodach krzywoliniowych podejście takie jest niemożliwe. Jedynym konturem, dla którego można zbudować rozwiązanie w sposób metodyczny w oparciu o zależności (3.5), (3.8) i (3.9) jest okrąg.

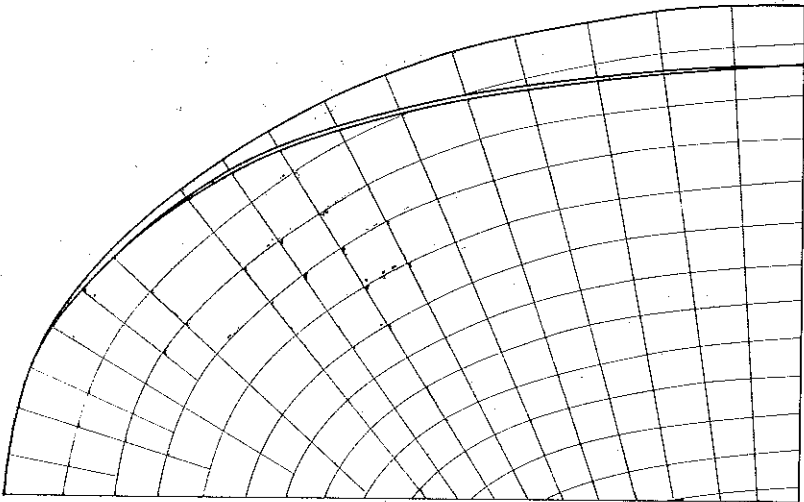


Rys. 9

Niech mamy obwód o promieniu R (rys. 9). Linia nieciągłości $r_0(s)$ redukuje się teraz do środka okręgu. Przyjmijmy pewną wartość C_3 . Wtedy zgodnie z (3.9) obszar, w którym $G(s, r) < 0$ [$k_0(s, r) = k_1$], ograniczony jest okręgiem o promieniu $p = 2C_3$ zatoczonym ze środka koła. Na tym okręgu $G(s, r) = 0$. Ponieważ na obszarze ograniczonym z jednej strony okręgiem o promieniu p , a z drugiej okręgiem o promieniu R mamy $p > C_3$, to zgodnie z (3.4) po uwzględnieniu poprzedniego otrzymujemy, że w tym obszarze $G(s, r) > 0$ [$k_0(s, r) = k_2$]. Jak widać wartość funkcji $G(s, r)$ ma przebieg taki, jak na rys. 9. Zgodnie z poprzednim dla $p > C_3$ G maleje jako funkcja r (osiągając dla $r = r_1$ wartość zero) do chwili, w której $r = r_2$ (bo w tym momencie $p = C_3$). Od tego momentu funkcja $G(s, r)$ zaczyna rosnąć ($p < C_3$) pozostając jednak zgodnie z (3.9) stale ujemna. Oczywiście zgodnie z intuicją otrzymaliśmy w rezultacie warstwę materiału o wyższej granicy plastyczności na zewnątrz materiału o niższej granicy plastyczności. W odniesieniu do innych krzywoliniowych konturów nawet metoda dopasowywania tego konturu do zbudowanego uprzednio rozwiązania zawodzi. Przykładem może być elipsa



b



a

Rys. 10

(rys. 10a i 10b). Otrzymane tu rozwiązania zbudowano drogą kolejnych prób wyboru wzajemnego ustawienia linii nieciągłości r_0 (s) i linii O (r). Rozwiązanie przedstawione na rys. 10a odpowiada wartości $C_3 = 10$, a na rys. 10b wartości $C_3 = 5$. Jak widać zmniejszającym się wartościom C_3 odpowiada wzrost obszaru, w którym materiał ma górną granicę plastyczności.

5. Dyskusja

Pomimo, iż nie udało się w pełni odpowiedzieć na początkowo postawiony problem optymalnego rozkładu wartości granicy plastyczności, który zapewniłby maksymalną nośność graniczną skręcanego pręta, to jednak otrzymane warunki konieczne istnienia takiego rozwiązania jak i szereg efektywnie rozwiązanych przykładów pozwalają na wyciągnięcie ważnych wniosków natury jakościowej. Zwróćmy mianowicie uwagę na sposób, w jaki propagują się strefy uplastycznionego materiału podczas sprężysto-plastycznego skręcania prętów pryzmatycznych [7, 8 i 9] i porównajmy ich kształt jak i miejsce występowania ze strefami materiału o wyższej granicy plastyczności w otrzymanych przez nas rozwiązaniach. Jak widać, w rozwiązaniach zapewniających maksymalną nośność graniczną strefy materiału o górnej granicy plastyczności pojawiły się wszędzie tam, gdzie w pręcie jednorodnym o takim samym konturze przekroju poprzecznego pojawiły się strefy plastyczne. Innymi słowy wszędzie tam, gdzie zależy nam na zwiększeniu nośności granicznej skręcanego pręta pryzmatycznego należałoby umieszczać wkładki wzmacniające w takich właśnie miejscach.

Autorzy dziękują doc. J. RYCHLEWSKIEMU za sugestię tematu i pomoc w opracowaniu tego zagadnienia.

Literatura cytowana w tekście

1. J. RYCHLEWSKI, *O kryteriach optymalizacji niejednorodności sprężystej i plastycznej* (w druku).
2. H. HALKIN, L. W. NEUSTADT, *General necessary conditions for optimization problem*, Proc. Nat. Acad. Sci., 4, 1966.
3. L. W. NEUSTADT, *An abstract variational theory with applications to a broad class of optimization problems. I. General theory*, SJAM, J. Contral, 1, 1967.
4. K. MAKOWSKI, *Współczesne metody uogólnionego rachunku wariacyjnego i regularności*, Prace Instytutu Automatyki PAN, zeszyt 72, 1968.
5. L. W. NEUSTADT, *An abstract variational theory with applications to a broad class of optimization problem, II. Applications*, SJAM, J. Contral, 1, 1967.
6. J. RYCHLEWSKI, *Plastic torsion of a bar with jump nonhomogeneity*, Acta Mechanica, 1, 1 (1965).
7. A. DĘBSKA, A. MIODUCHOWSKI, *Sprężysto-plastyczne skręcanie prętów skokowo niejednorodnych*, MTT — Moskwa (w druku).
8. P. G. HODGE, Jr. *Elastic-plastic torsion as a problem in non-linear programming*, Int. J. Solids Structures, 3, (1967), 989–999.
9. Н. В. Бандячук, *Упруго-пластическое кручение стержней*, МТТ, 1, 1967.

Резюме

ОПТИМАЛНАЯ ПЛАСТИЧЕСКАЯ НЕОДНОРОДНОСТЬ СТЕРЖНЯ,
ПОДВЕРЖЕННОГО КРУЧЕНИЮ ПРИ УЧЕТЕ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ

Рассматриваются призматические стержни подвергаемые кручению, с поперечной, непрерывной, пластической неоднородностью. Основываясь на методе Нейштадта-Халькина, получено необходимые условия для такого распределения этой неоднородности, которая дает максимальную несущую способность.

Предлагается простая графическая интерпретация этих условий, которая подробно обсуждает на примере призматического стержня квадратного сечения.

Даются, также, решения для стержней кругового и семиугольного поперечного сечения.

Summary

OPTIMUM PLASTIC NONHOMOGENEITY OF A TORSIONED BAR

Here considered are torsioned prismatic bars with a transverse, continuous plastic nonhomogeneity. On the basis of the Neustadt-Halkin method, the necessary conditions for such a distribution of this nonhomogeneity, which offers a maximum limiting load capacity were obtained.

A straightforward graphical interpretation of these conditions is given, discussed in detail upon the example of a prismatic bar with a square cross-section. The solutions are also presented for bars with septagonal, circular and elliptical cross-sections.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 marca 1969 r.