

NOŚNOŚĆ GRANICZNA ROZCIĄGANYCH ELEMENTÓW O PRZEKROJU KWADRATOWYM Z WYCIĘCIAMI

JÓZEF MIASTKOWSKI (WARSZAWA)

1. Wprowadzenie

Nagłe zmiany wymiarów lub kształtu wzdłuż elementu wywołują w nim znaczną nierównomierność rozkładu naprężeń. Do geometrycznych przyczyn wywołujących koncentrację naprężeń w elemencie należą wszelkie karby, nacięcia gwintu, otwory, podtoczenia, ślady po obróbce wiórowej oraz inne nierówności na powierzchni. Na dnie tych wgłębień występują zawsze znacznie większe naprężenia niż w całym pozostałym przekroju poprzecznym.

Obciążenie, przy którym element ulega zniszczeniu czy to przez kruche pęknięcie, czy też na wskutek odkształceń plastycznych, nazywamy nośnością graniczną. Stosowane powszechnie metale konstrukcyjne mają dobre własności plastyczne i pęknięcie powstaje w nich dopiero po pojawieniu się dużych odkształceń plastycznych. Dlatego też analiza nośności granicznej oparta na założeniach teorii plastyczności ma duże znaczenie praktyczne.

Dla płaskich prętów osłabionych obustronnie korbami teoretyczna nośność graniczna może być wyznaczona tylko dla płaskiego stanu odkształcenia lub dla płaskiego stanu naprężenia [1]. Przy pośrednich szerokościach i pośrednich grubościach prętów teoria nie jest obecnie w stanie dać odpowiedzi, jaka będzie nośność graniczna elementu. Dla przypadków tych możliwe jest jedynie określenie górnej i dolnej oceny nośności granicznej. W pracy [2] na podstawie granicznego twierdzenia teorii plastyczności podjęto próbę wyznaczenia przybliżonej wielkości grubości niezbędnej dla powstania stanu zbliżonego do płaskiego stanu odkształcenia. W pracach [3, 4 i 5] badano doświadczalnie wpływ grubości b na nośność pręta z ostrym karbem kątowym. W pracy [6] badano wpływ grubości na nośność graniczną prętów z wycięciami o zaokrąglonych narożach. Badaniem tego problemu na próbkach z karbem ostrym o zaokrąglonych narożach zajmowano się w pracy [7]. Teoretyczna i doświadczalna analiza nośności granicznej rozciąganych prętów z wycięciami okrągłymi i prostokątnymi o dowolnej grubości i zmiennej szerokości części nad karbem została przeprowadzona w pracy [8], a dla korbów kątowych w pracy [9].

Obszerny przegląd prac dotyczących nośności granicznej rozciąganych prętów z korbami został podany w pracy [10].

Problem wciskania symetrycznego sztywnego stempla w półprzestrzeń z materiału idealnie plastycznego został rozwiązany w pracy [11]. W pracy [12] wykazano, że rozwiązanie to odpowiada liczbowo z przeciwnym znakiem przypadkowi rozciągania. Przy takich założeniach jak w pracy [11] zostały podane w pracy [13] rozwiązania dla osiowo-symetrycznych prętów z korbami kątowymi i z korbami o zaokrąglonych dnach. W pracy [14] podano rozwiązania dla osiowo-symetrycznych elementów z wycięciami kątowymi o niesymetrycznie pochylonych krawędziach do osi pręta. Nośność graniczną rozciąganych osiowo-symetrycznych prętów osłabionych szeregiem wycięć kątowych podano w artykule [15], gdzie dla wyznaczenia przedłużeń w obszar sztywny oraz hodografów autorzy posłużyli się metodą graficzną podaną w pracy [16].

W przedstawionej pracy wyznaczono górne i dolne oceny nośności granicznej dla prętów o przekroju kwadratowym osłabionych wycięciami kątowymi.

2. Analiza teoretyczna

Do częściej spotykanych elementów konstrukcyjnych z korbami należy zaliczyć pręty z wycięciami kątowymi pokazanymi na rys. 1. Kształt karbu jest określony przez kąt ω . Granica plastyczności w tym przypadku jest zależna od dwóch niezależnych parametrów: $0 \leq \omega \leq \pi/2$, $1 \leq (\kappa = c/h) \leq \infty$.

Jeżeli założymy, że P^* oznacza rzeczywistą wartość granicy plastyczności pręta z wycięciami, to górną ocenę P_g tej wartości P^* możemy wyznaczyć przez porównanie pracy siły zewnętrznej P do wewnętrznej energii dysypowanej przez dowolny, kinematycznie dopuszczalny schemat odkształcenia plastycznego [17].

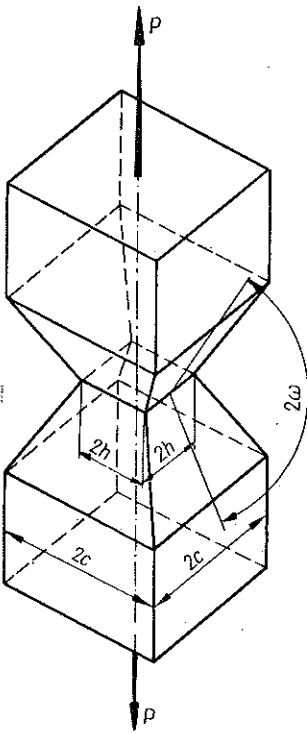
Współczynnik obciążenia granicznego dla pręta z karbem może być określony jako stosunek $f = P^*/P_0$, gdzie $P_0 = 8kh^2$ jest granicą plastyczności gładkiego pręta ze stałym poprzecznym przekrojem $4h^2$.

Górna ocena f jest równa

$$(2.1) \quad f_g = P_g/P_0.$$

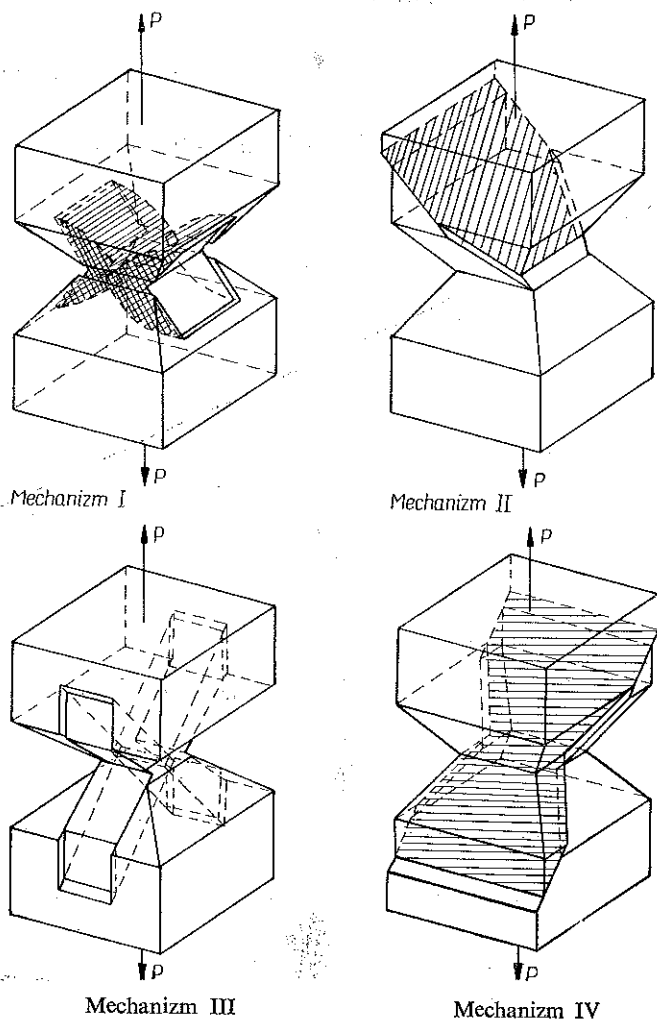
Na rys. 2 pokazano cztery różne, kinematycznie dopuszczalne mechanizmy plastycznego zniszczenia pręta o przekroju kwadratowym, pokazanego na rys. 1. Jest oczywiste, że te sposoby odkształcenia można również stosować do określenia górnych ocen nośności granicznej prętów z wycięciami o innych kształtach.

Wszystkie wzory na górną ocenę f_g określone zostały przy założeniu warunku plastyczności Treski.



Rys. 1

Mechanizm I przedstawia rozwiązania metodą linii poślizgów [18] z uwzględnieniem płynięcia na bocznych powierzchniach pola linii poślizgów. Dla płaskiego stanu odkształcenia, gdy grubość $\rightarrow \infty$, rozwiązania te są kompletne, o ile szerokość pręta wyrażona przez $\kappa = c/h$ jest tak duża, że przedłużenie siatki linii poślizgów



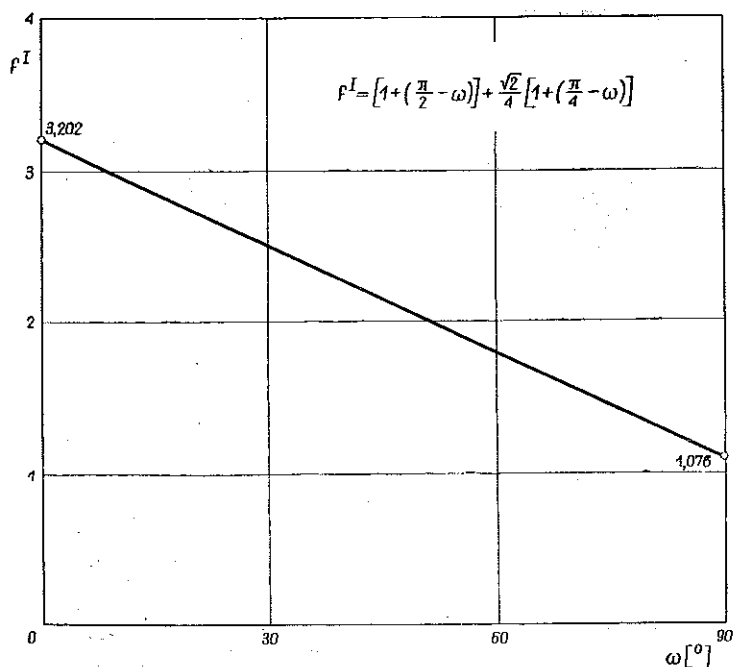
Rys. 2

w karbie mieści się całkowicie wewnątrz zarysu pręta. Można wykazać, że wszystkie kinematycznie dopuszczalne warunki będą również spełnione, jeżeli szerokość pręta wyrażona przez $\kappa = c/h$ jest mniejsza od wymaganej przez teorię i jeżeli grubość pręta jest ograniczona. Dla tych przypadków rozwiązania linii poślizgów mogą być uważane jako kinematycznie dopuszczalne sposoby odkształcenia, dając dla

nich górną ocenę nieznaną wartości rzeczywistej granicy plastyczności. Dla prętów o przekroju kwadratowym wyrazi się to wzorem

$$(2.2) \quad f_g^I = \left[1 + \left(\frac{\pi}{2} - \omega \right) \right] + \frac{\sqrt{2}}{4} \left[1 + \left(\frac{\pi}{4} - \omega \right) \right].$$

Wykres powyższej funkcji pokazano na rys. 3.



Rys. 3

Mechanizm II [19] jest prostym ścinaniem wzdłuż zakreskowanej płaszczyzny pokazanej na rys. 2. Górna część pręta nad płaszczyzną porusza się jak ciało sztywne w kierunku równoległym, do płaszczyzny przekroju, podczas gdy dolna część może być traktowana jako nieruchoma. Optymalną wartość górnej oceny granicy plastyczności otrzymujemy, jeżeli płaszczyzna przekroju tworzy z osią pręta kąt 45° . Górna ocena współczynnika obciążenia jest równa

$$(2.3) \quad f_g^{IIa} = \frac{1}{2} \left[\kappa^2 + \kappa - \frac{1}{2} (\kappa - 1)^2 \operatorname{tg} \omega \right] \quad \text{dla} \quad 0 \leq \omega \leq \omega_g^{II}$$

oraz

$$(2.4) \quad f_g^{IIb} = \frac{1}{(1 - \operatorname{ctg} \omega)^2} \quad \text{dla} \quad \omega_g^{II} \leq \omega \leq \frac{\pi}{2},$$

gdzie $\kappa = c/h$.

Kąt graniczny ω_g^{II} wyznaczamy ze wzoru

$$(2.5) \quad \omega_g^{\text{II}} = \arctg \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}.$$

Mechanizm III [2] pokazany na rys. 2 polega na tworzeniu się dwóch sztywnych kostek utworzonych przez dwie płaszczyzny poprowadzone pod kątem 45° do osi pręta oraz przez dwie płaszczyzny równoległe do osi pręta, przechodzące przez dna karbów. Wynikający stąd wzór na górną ocenę f przyjmuje postać

$$(2.6) \quad f_g^{\text{IIIa}} = \kappa + \frac{\sqrt{2}}{4} [\kappa^2 - (\kappa - 1)^2 \operatorname{tg} \omega] \quad \text{dla} \quad 0 \leq \omega \leq \omega_g^{\text{III}}$$

oraz

$$(2.7) \quad f_g^{\text{IIIb}} = \frac{1}{1 - \operatorname{ctg} \omega} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4} \right) \quad \text{dla} \quad \omega_g^{\text{III}} \leq \omega \leq \frac{\pi}{2},$$

gdzie

$$(2.8) \quad \omega_g^{\text{III}} = \arctg \frac{\kappa}{\kappa - 1}.$$

Mechanizm IV przedstawia prosty przekrój wzdłuż płaszczyzny zakreskowanej, tworzącej kąt 45° z osią pręta. Płaszczyzna przekroju pokazana jest na rys. 2. Dla karbów kątowych wzory na współczynnik obciążenia z tego mechanizmu przyjmują postać

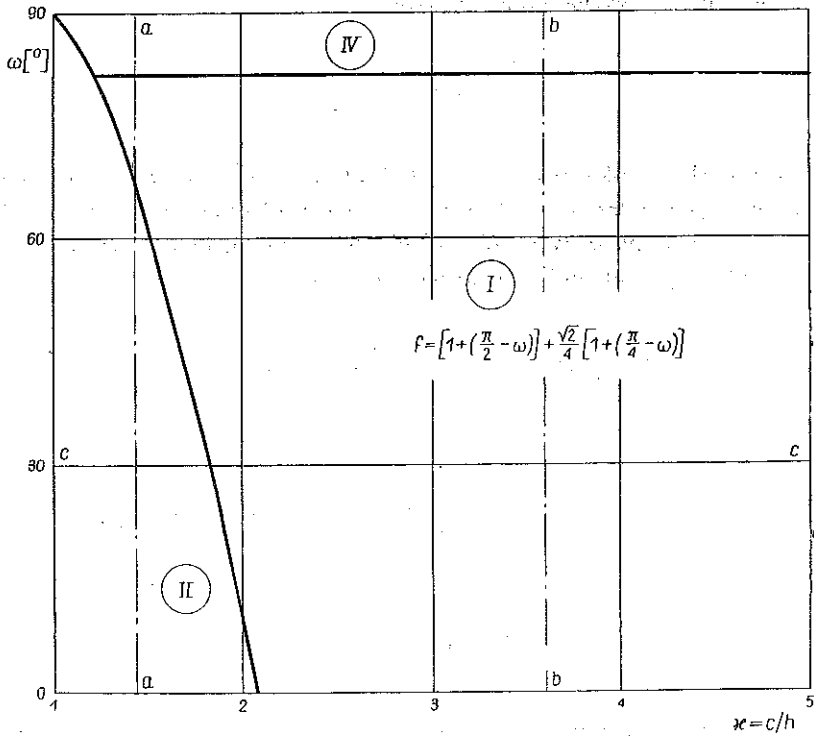
$$(2.9) \quad f_g^{\text{IVa}} = \kappa^2 - \frac{1}{2} (\kappa - 1)^2 \operatorname{tg} \omega \quad \text{dla} \quad 0 \leq \omega \leq \omega_g^{\text{IV}}$$

oraz

$$(2.10) \quad f_g^{\text{IVb}} = \frac{1 - 1/2 \operatorname{ctg} \omega}{(1 - \operatorname{ctg} \omega)^2} \quad \text{dla} \quad \omega_g^{\text{IV}} \leq \omega \leq \frac{\pi}{2}.$$

Kąt graniczny ω_g^{IV} wyznaczamy ze wzoru (2.8).

Na rys. 4 pokazano na płaszczyźnie κ, ω obszary, w których poszczególne mechanizmy plastycznego zniszczenia z rys. 2 dają najmniejszą ocenę współczynnika obciążenia. Każdy obszar jest oznaczony numerem odpowiadającym oznaczeniom odpowiednich mechanizmów na rys. 2. Obszar I odpowiada mechanizmowi I i w tym zakresie κ, ω najmniejszą wartość górnej oceny współczynnika obciążenia otrzymujemy ze wzoru (2.2). Górna ocena współczynnika f w polu II wyznaczona dla drugiego sposobu zniszczenia określona jest przez wzór (2.3); w polu IV najlepszą ocenę daje mechanizm IV wg wzoru (2.10). Mechanizm III daje zawsze większą wartość współczynnika f_g i dla pręta o przekroju kwadratowym z wycięciami kątowymi nie jest uwzględniony w całym obszarze płaszczyzny ω, κ .



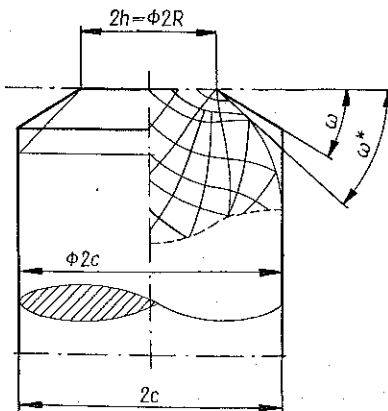
Rys. 4

Dla omówionych wyżej prętów o przekroju kwadratowym osłabionych korbami możliwe jest również określenie dolnej oceny nośności granicznej z rozwiązań dla prętów osiowo-symetrycznych wpisanych wewnątrz elementu o przekroju kwadratowym.

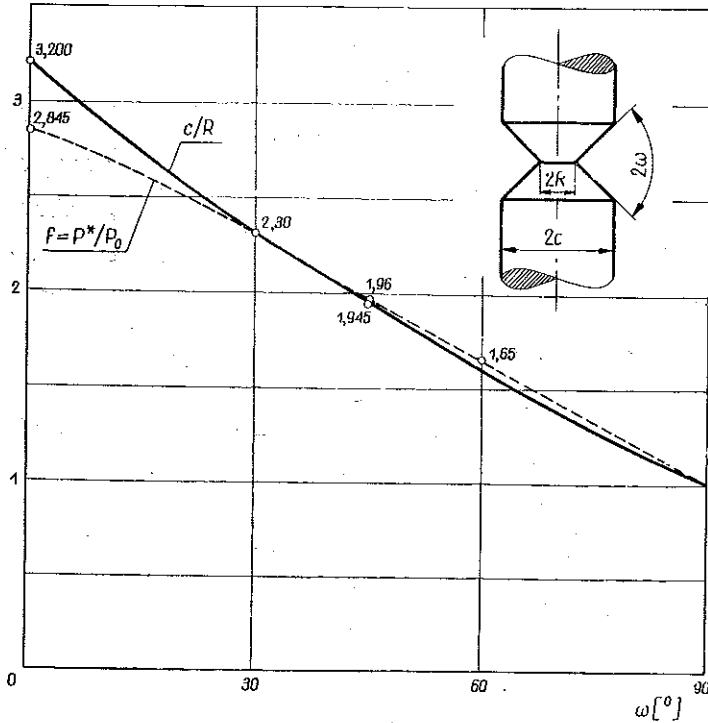
Dla prętów z wycięciami o kącie 2ω i małej szerokości $2c$ (rys. 5) jesteśmy w stanie znaleźć taki kąt $2\omega^*$ karbu kąтового w przecie osiowo-symetrycznym, dla którego przedłużenie w obszar sztywny leży całkowicie w konturze $2c$ rozpatrywanego pręta z wycięciami kątowymi 2ω , jak to pokazano na rys. 5.

Przyjmując tu, że materiał na zewnątrz linii charakterystycznych jest wolny od naprężeń, możemy określić dolną wartość współczynnika obciążenia f_d dla pręta o przekroju kwadratowym z wycięciami 2ω . Jest ona równa rzeczywistej wartości współczynnika obciążenia dla pręta osiowo-symetrycznego z wycięciami $2\omega^*$.

Na rys. 6 podano wykresy f_i i $\kappa = c/R$ jako funkcję ω dla prętów osiowo-symetrycznych z wycięciami kątowymi na podstawie wyników otrzymanych w pracach [13 i 15]



Rys. 5

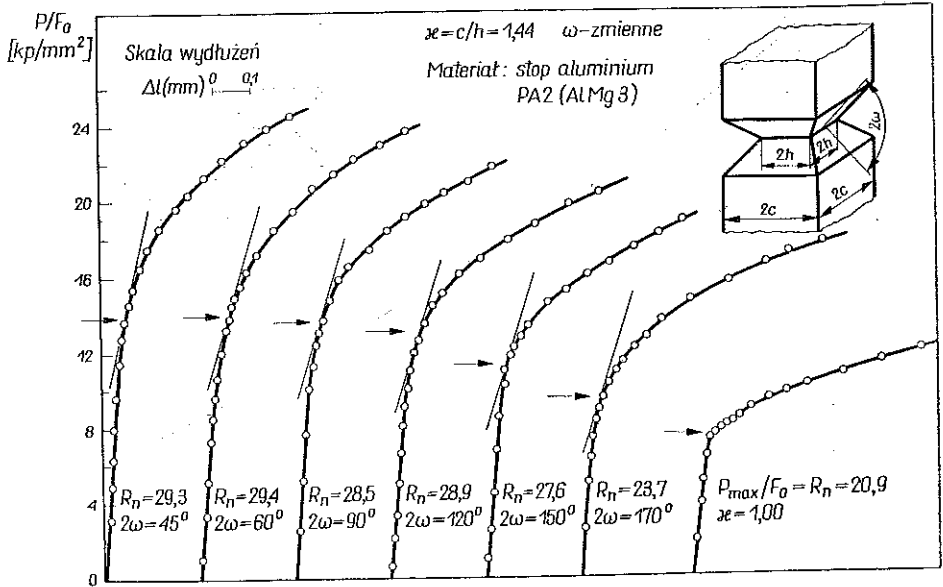


Rys. 6

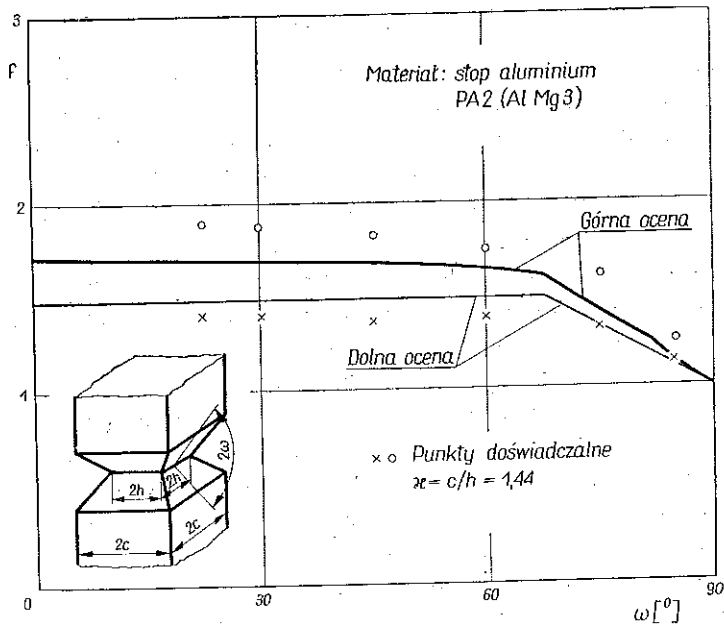
3. Wyniki doświadczalne

Doświadczenia przeprowadzono na trzech seriach próbek. Dwie serie próbek wykonano ze stopu aluminium PA4(AlMg1Si1) w stanie przesyconym i starzonym. Stop ten posiada dobre własności plastyczne i jest stosowany do wyrobu elementów konstrukcji lotniczych i pojazdów mechanicznych. Jedną serię próbek wykonano ze stopu aluminium PA2(AlMg3) w stanie miękkim. Stop ten cechuje się bardzo dobrymi własnościami plastycznymi i ma szerokie zastosowanie do średnio obciążonych elementów konstrukcji lotniczych, okrętowych i pojazdów mechanicznych. Jest również szeroko stosowany do urządzeń przemysłu chemicznego, spożywczego oraz do elementów konstrukcji budowlanych.

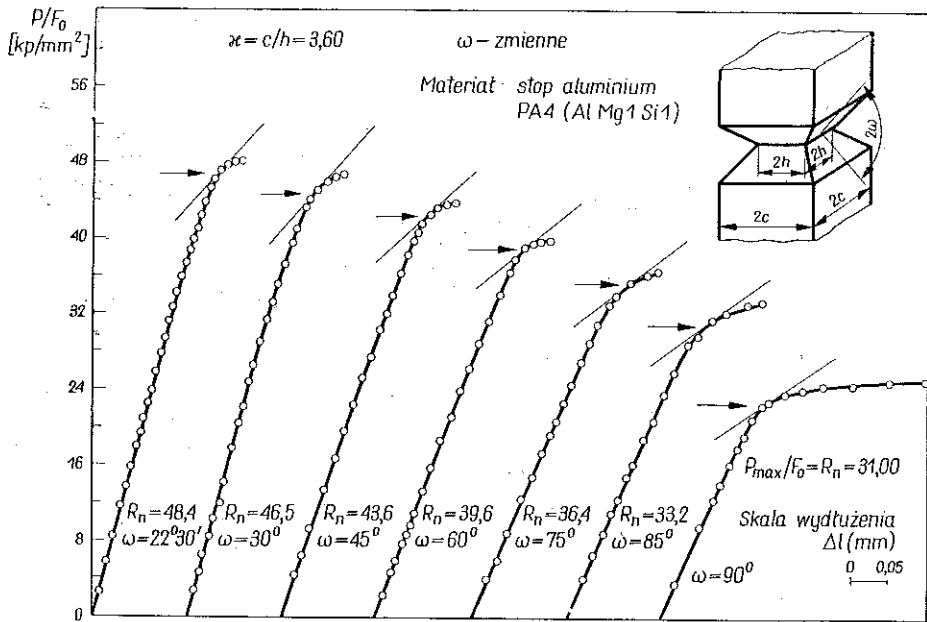
Na rys. 7 i 8 pokazano wyniki doświadczeń uzyskanych z pierwszej serii próbek o stałym parametrze κ i zmiennym kącie wycięcia ω . Parametrom tym odpowiada linia $a-a$ na rys. 4. Próbkki wykonane zostały ze stopu PA2. Na rys. 7 podano początkowe części wykresów naprężenia P/F_0 w funkcji wydłużenia oraz wartości naprężeń nominalnych $R_n = P_{max}/F_0$, gdzie F_0 jest polem początkowego przekroju poprzecznego próbki w największym miejscu karbu. Zależności między granicą plastyczności a parametrem ω są pokazane na rys. 8 razem z teoretycznymi liniami. Punkty oznaczone kółkami odpowiadają doświadczalnym wartościom współczynnika obciążenia granicznego dla prętów z karbami. Otrzymano je dzieląc wartość granicy plastyczności prętów z karbami przez odpowiednią wartość granicy plastyczności pręta bez karbu.



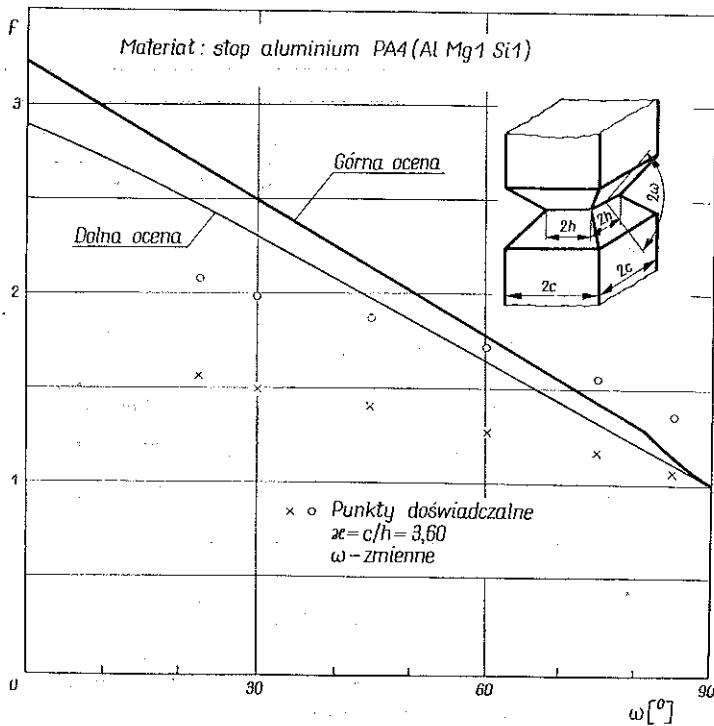
Rys. 7



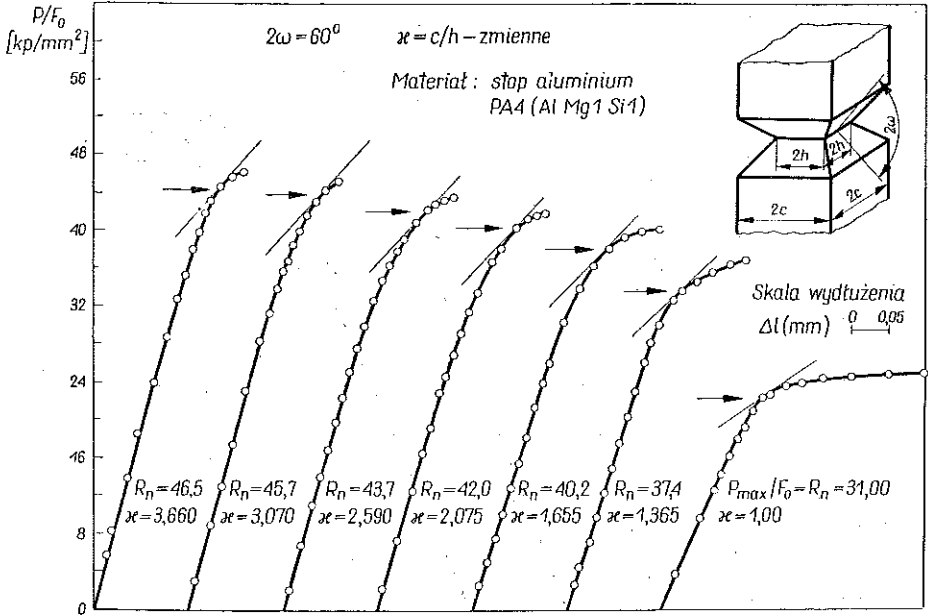
Rys. 8



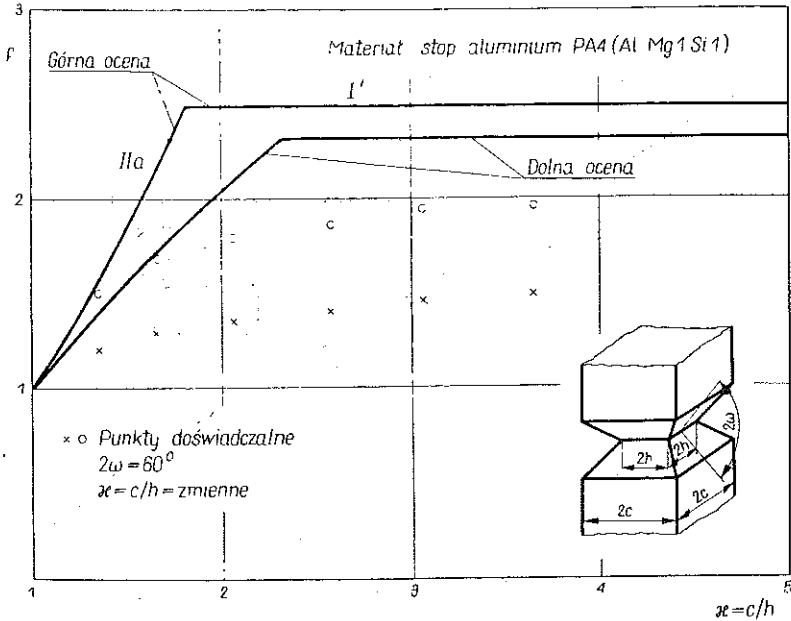
Rys. 9



Rys. 10



Rys. 11



Rys. 12

Na rys. 4 widać, że najlepszą teoretyczną górną oceną nośności granicznej dla przekroju *a-a* otrzymujemy z mechanizmów II, I i IV.

Identyczne doświadczenia przeprowadzono dla drugiej serii próbek wykonanych ze stopu PA4 o parametrach wynikających z przekroju *b-b* na rys. 4. Wyniki tych

badania przedstawiono na rysunkach 9 i 10. Najlepsze górne oceny dla tego przypadku wynikają z mechanizmów zniszczenia plastycznego I i IV.

W trzeciej serii próbek przy ustalonej wartości $\omega = 30^\circ$ badano wpływ parametru $\kappa = c/h$ na nośność graniczną prętów z wycięciami. W doświadczeniu tym sprawdzono przekrój $c-c$ na rys. 4. Wyniki badań przedstawiono na rysunkach 11 i 12. Optymalne górne oceny nośności granicznej dla tych parametrów wynikają z mechanizmów II i I.

Przedstawiona w pracy teoretyczna analiza nośności granicznej odnosi się tylko do granicy plastyczności. Na rys. 8, 10, 12 oprócz punktów odpowiadających granicy plastyczności naniesiono gwiazdkami punkty dla naprężeń nominalnych $R_n = P_{\max}/F_0$. Punkty te otrzymano przez odniesienie wartości R_n próbki z karbem do wartości R_n próbki bez karbu. Dla wszystkich badanych próbek stosunek ten jest większy od jedności, ale mniejszy od odpowiednich współczynników obciążenia granicznego obliczonych dla granicy plastyczności. Na rysunkach punkty oznaczone gwiazdkami leżą poniżej punktów otoczonych kółkami.

4. Wnioski

Z otrzymanych wyników widać, że zgodność między teoretyczną górną oceną granicy plastyczności a jej rzeczywistą wartością jest zupełnie dobra dla stopu aluminium o bardzo dobrych własnościach plastycznych. Dla stopu PA4 o gorszych własnościach plastycznych zgodność ta jest gorsza. Z zamieszczonych wykresów wynika, że oprócz własności plastycznych na zgodność wyników teoretycznych i doświadczalnych duży wpływ ma również geometria karbu.

Bardzo interesujące jest to, że wartość naprężenia nominalnego R_n wzrasta wraz ze wzrostem κ . Dla wszystkich przypadków stosunek naprężenia nominalnego R_n próbek osłabionych nacięciami do naprężenia R_n próbki bez karbu jest większy od jedności ale mniejszy od odpowiednich stosunków określonych dla granicy plastyczności.

Z rys. 12 wynika również, że dla $\kappa > 3$ przyrost rzeczywistego stosunku wzmocnienia dla prętów o przekroju kwadratowym osłabionych wycięciami kątowymi jest niewielki.

Literatura cytowana w tekście

1. J. F. W. BISHOP, *On the complete solution to problems of deformation of a plastic-rigid material*, J. Mech. Phys., 2 (1953), 43 – 53.
2. D. C. DRUCKER, *On obtaining plane strain or plane stress conditions in plasticity*, Proc. 2nd U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., 1954, 485 – 488.
3. В. С. Жуковский, *Распределение деформаций и напряжений в плоских надрезанных стержнях в связи с объемностью напряженного состояния*, Проблемы прочности в машиностроении, 2, Изд. АН СССР, 1959.
4. В. С. Жуковский, *О коэффициенте усиления и характере распространения пластических зон в надрезанных стержнях*, Изв. АН СССР, ОТН, 5, 1958, 116 – 119.
5. В. С. Жуковский, *Деформированное состояние и прочность плоских надрезанных стержней произвольной толщины*, Расчеты на прочность, 9, Машигиз, Москва 1963, 231 – 252.
6. W. SZCZEPIŃSKI, J. MIASTKOWSKI, *Doświadczalna analiza nośności granicznej rozciąganych płaskich prętów z karbem*, Rozpr. Inż., 13 (1965), 637 – 652.

7. W. N. FINDLEY, D. C. DRUCKER, *An experimental study of plane plastic straining of notched bars*, J. Appl. Mech., **32** (1965), 493.
8. W. SZCZEPIŃSKI, J. MIASTKOWSKI, *Plastic straining of notched bars with intermediate thickness and small shoulder ratio*, Int. J. Non-Linear Mechanics, **3** (1967), 83–97.
9. J. MIASTKOWSKI, *Nośność graniczna rozciąganych prętów z korbami kątowymi o dowolnych wymiarach części nad korbem*, Mech. Teoret. Stosow., **1**, 7 (1969).
10. W. SZCZEPIŃSKI, *Przegląd prac dotyczących nośności granicznej rozciąganych prętów z korbem*, Mech. Teoret. Stosow., **3**, 3 (1965).
11. R. T. SHIELD, *On the plastic flow of metals under conditions of axial symmetry*, Proc. Roy. Soc., A 233, No 1193, 1955, 267–287.
12. F. A. McCLINTOCK, *On notch sensitivity*, Welding Journal Research Supplement, May 1961.
13. W. SZCZEPIŃSKI, L. DIETRICH, E. DRESCHEROWA, J. MIASTKOWSKI, *Plastic flow of axially-symmetric notched bars pulled in tension*, Int. J. Solids Struct., **2** (1966), 543–554.
14. L. DIETRICH, W. SZCZEPIŃSKI, *Plastic yielding of axially-symmetric bars with non-symmetric V-notch*, Acta Mechanica, **IV/3** (1967), 230–240.
15. L. DIETRICH, K. TURSki, *Nośność graniczna rozciąganych osiowo-symetrycznych prętów osłabionych szeregiem korbów kątowych*, Mech. Teoret. Stosow., **4**, 6 (1968).
16. Z. MRÓZ, *Graphical solutions of axially-symmetric problems of plastic flow*, Z. ang. Math. Phys., **18** (1967), 219.
17. D. C. DRUCKER, H. J. GREENBERG, W. PRAGER, *Extended limit design theorems for continuous media*, Quart. Appl. Math., **9**, (1952), 381–389.
18. R. HILL, *The plastic yielding of notched bars under tension*, Quart. J. Mech. Appl. Math., **2**, (1949), 40.
19. W. PRAGER, P. G. HODGE, *Theory of perfectly plastic solids*, J. Wiley Inc., New York 1951, 215–216.

Резюме

НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ КВАДРАТНОГО СЕЧЕНИЯ С ВЫРЕЗАМИ ПОДВЕРГАЕМЫМИ РАСТЯЖЕНИЮ

В работе дается теоретический и экспериментальный анализ несущей способности элементов квадратного сечения, подвергаемых растяжению, ослабленных вырезами. Экспериментальные исследования проведенные на двух алюминевых сплавах: PA-2 и PA-4. Констатируется, что на согласованность теоретических и экспериментальных результатов, существенное влияние имеют: род материала, геометрия выреза и его глубина.

Summary

LIMIT LOADS OF SQUARE PROFILES HAVING NOTCHES AND SUBJECT TO TENSION

This paper contains a theoretical and experimental analysis of the limit load of an element of square cross-section weakened by an angular notch and subject to tension. The PA-2 and PA-4 aluminium alloys were subject to experimental investigation.

It is found that the agreement of the theoretical and experimental results is influenced in an essential manner by the kind of the material and the geometrical form of the notch and its depth.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 23 stycznia 1969 r.