

O RUCHU SPRĘŻYSTEGO WAŁU WIRUJĄCEGO W PODATNYCH ŁOŻYSKACH

AGNIESZKA MUSZYŃSKA (WARSZAWA)

W szeregu konstrukcji wirnikowych sztywność giętna wału i sztywność łożysk, a niejednokrotnie i sztywność całego korpusu wraz z jego zawieszeniem, są wielkościami bliskiego rzędu. Przy badaniu dynamiki wirników takich maszyn powstaje konieczność jednoczesnego uwzględnienia odkształceń wału i sprężystych podpór, na których oparty jest wał. Nieuwzględnienie podatności podpór wirnika w procesie projektowania bywa często przyczyną dużych rozbieżności między obliczonymi a rzeczywistymi obszarami drgań rezonansowych i innych stanów krytycznych [1 i 2]. W wielu konstrukcjach sprężyste zawieszenie wirnika wprowadzane jest świadomie, gdyż przez odpowiedni dobór charakterystyk sprężyn można polepszyć własności dynamiczne wirnika (w szczególności przejście przez obroty krytyczne odbywa się przy mniejszych amplitudach drgań giętnych wału; można też znacznie zmniejszyć amplitudy drgań samowzbudnych [3–6]). Często również obok uwzględnienia sprężystej podatności podpór łożyskowych w procesie teoretycznej analizy układu wirnikowego potrzebne jest uwzględnienie tłumienia, które zawsze istnieje w realnych konstrukcjach lub też specjalnie jest wprowadzane przez różnego typu tłumiki [7–14].

Zagadnieniem teoretycznej analizy ruchu sprężystych wirników, zawieszonych w podatnych podporach, zajmowało się wielu autorów. Przeważnie w rozważaniach przyjmowano liniowe charakterystyki sprężystości i tłumienia, zarówno wału jak i podpór [1, 2, 12–28], przy czym analiza prowadzona była głównie w kierunku zbadania zachowania się wirnika w przypadku anizotropii sprężystych własności podpór łożyskowych w dwóch wzajemnie prostopadłych kierunkach. W szeregu prac (np. [2 i 23]) proponuje się uwzględnienie podatności podpór łożyskowych przez wprowadzenie zastępczego współczynnika sztywności, wyznaczanego doświadczalnie. Oczywiście w sposobie tym założono z góry liniowość charakterystyk sprężystych, zarówno wału jak i podpór łożyskowych. Sposoby analitycznego wyznaczania zastępczego współczynnika sztywności podane są np. w pracach [5, 12 i 29].

Znacznie mniej publikacji poświęcono analizie ruchu wirnika ze sprężystym wałem, zawieszonego w sprężystych podporach o nieliniowych charakterystykach.

Wiadomo [30], że np. warstwa oleju w panewce łożyska ślizgowego zachowuje się jak podpora sprężysta o nieliniowej charakterystyce. Również zamocowanie

wał w łożyskach tocznych nie zawsze można rozpatrywać jako zupełnie sztywne, lecz należy uwzględnić podatność tego łożyska. Podatności łożysk tocznych są na ogół nieliniowymi funkcjami ugięcia [31]. Dodatkowym czynnikiem wprowadzającym nieliniowości charakterystyki sprężystej są luzy w łożyskach, rosnące w miarę zużywania się współpracujących części. W zasadzie we wszystkich konstrukcjach wirnikowych charakterystyki sprężystych podpór należy traktować jako funkcje nieliniowe.

Analizę ruchu wirnika w sprężystych podporach o nieliniowych charakterystykach zajmował się W. A. GROBOW [27, 32–34] przyjmując składowe P_x, P_y (rys. 1) siły sprężystości w podporze łożyskowej w postaci

$$(1) \quad P_x = k_1 x + k_2 x^3, \quad P_y = k_1 y + k_2 y^3,$$

gdzie x, y przedstawiają ugięcia w dwóch wzajemnie prostopadłych kierunkach, k_1, k_2 — stałe współczynniki.

W pracy [27] autor rozpatrzył również przypadek odcinkowo liniowych, łamanych charakterystyk sprężystości podpór. W cytowanych pracach W. A. Grobowa analiza ruchu wirnika została przeprowadzona przy zastosowaniu asymptotycznej metody Bogolubowa i Mitropolskiego.

A. TONDL [36–38] zanalizował ruch wirnika przy założeniu, że siły sprężystości podpór łożyskowych są następującymi funkcjami odpowiednich ugięć:

$$P_x = k_1 x + k_2 x^2, \quad P_y = k_3 y,$$

a w pracy [22]

$$P_x = k_1 x^2 - k_2 x^3, \quad P_y = k_1 y^2 - k_2 y^3.$$

E. STANKIEWICZ [39] przyjmował siłę sprężystości podpory w postaci

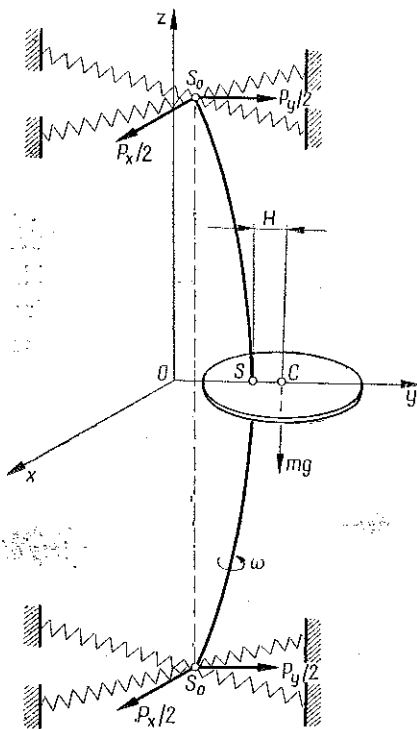
$$P = k(x^2 + y^2)^q,$$

gdzie k, q oznaczają stałe współczynniki (gdy $q = 3/4$, to powyższa zależność opisuje podatność promieniową łożyska kulkowego).

W niniejszej pracy zbadamy ruch pionowego, sprężystego, bezmasowego wału z zamocowanym w środku jego długości statycznie niewyrównoważonym cienkim

krażkiem o masie m . Wał obraca się ze stałą prędkością kątową ω w dwóch jednakowych sprężystych podporach łożyskowych (rys. 1).

Zakładamy, że siły sprężystości zarówno wału jak i podpór mają charakter sił centralnych [40] i są na ogół nieliniowymi funkcjami ugięcia promieniowego.



Rys. 1

Przyjęcie takiego modelu wirnika jest uzasadnione w przypadku symetrycznych wałów o niewielkich wartościach niewyrównoważenia: wtedy efekt żyroskopowy w rozważaniach można pominąć.

Dla wyprowadzenia równań ruchu wirnika obieramy układ współrzędnych nieruchomych x, y, z oraz ruchomych ξ, η, z , obracających się wraz z wirnikiem wokół osi z ze stałą prędkością kątową ω (rys. 2). Położenie osi η wybieramy tak, aby środek masy krążka oraz punkt zamocowania krążka na wale znajdowały się na prostej równoległej do osi η . Przyjmujemy, że ugięta linia wału jest krzywą płaską.

Dla tak zmodelowanego wirnika równania ruchu małych drgań giętnych we współrzędnych ruchomych będą miały następującą postać:

$$(2) \quad \ddot{\xi} - 2\omega\dot{\eta} - \omega^2 \xi + k\dot{\xi} + a(\dot{\xi} - \omega\eta) + \frac{f_1(r)}{rm}(\xi - \xi_0) = 0,$$

$$\ddot{\eta} + 2\omega\dot{\xi} - \omega^2 \eta + k\dot{\eta} + a(\dot{\eta} + \omega\xi) + \frac{f_1(r)}{rm}(\eta - \eta_0) = H\omega^2;$$

$$(3) \quad \frac{f_1(r)}{r}(\xi - \xi_0) = \xi_0 \frac{f_2(r_0)}{r_0},$$

$$\frac{f_1(r)}{r}(\eta - \eta_0) = \eta_0 \frac{f_2(r_0)}{r_0},$$

gdzie

$$(4) \quad r = \sqrt{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2},$$

$$r_0 = \sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2}.$$

W równaniach (2) mk jest współczynnikiem wewnątrzko liniowego tłumienia w elementach sprężystych, ma jest współczynnikiem liniowego tłumienia zewnętrznego; $f_1(r)$ jest siłą sprężystości wału, $f_2(r_0)$ — siłą sprężystości podpór łożyskowych. Przyjmujemy, że funkcje $f_1(r)$ i $f_2(r_0)$ są na ogół nieliniowe, przy czym zakłada się, że

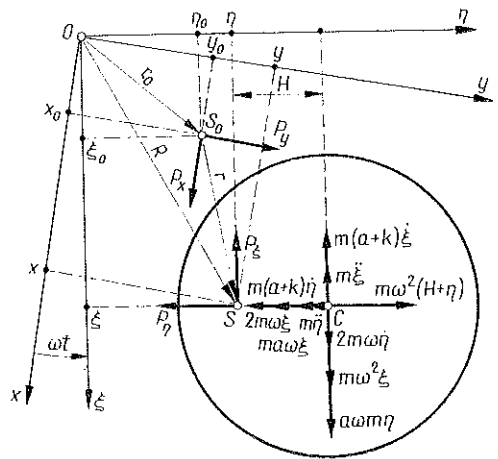
$$(5) \quad f_1(0) = 0, \quad f_2(0) = 0.$$

Równania (2) są równaniami różniczkowymi ruchu krążka. Układ równań (3) stanowi warunek równowagi sił sprężystości; stąd otrzymuje się zależność ugięć wału od ugięć sprężyn w podporach. Z układu równań (3) wynika, że

$$(6) \quad \xi_0 \eta = \eta_0 \xi, \quad f_1(r) = f_2(r_0).$$

Wprowadzamy następujące oznaczenie:

$$(7) \quad R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = r + r_0;$$



Rys. 2

wtedy wyrażenie (6) można zapisać w następującej postaci:

$$(8) \quad f_1(R - r_0) = f_2(r_0).$$

Z równania (8) powinniśmy otrzymać zależność

$$(9) \quad r_0 = r_0(R).$$

Nie zawsze jednak udaje się otrzymać tę funkcję bezpośrednio.

W niektórych przypadkach szczególnych zależność (9) uzyskuje się analitycznie dość prosto, np. gdy funkcje f_1 i f_2 są liniowe lub gdy $f_1(r)$ i $f_2(r_0)$ mają identyczną monotoniczną postać funkcyjną (w tym ostatnim przypadku z zależności (8) otrzymujemy $r_0 = R/2$). Również w dwóch skrajnych przypadkach, gdy dany jest: 1) sztywny wał wirujący w sprężystych podporach, 2) giętki wał w sztywnych łożyskach — równania ruchu (2) i (3) znacznie się upraszczają. W przypadku pierwszym mamy $f_1(r) = \infty$, $r = 0$, $r_0 = R$, $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$ oraz z (2)

$$\ddot{\xi} - 2\omega\dot{\eta} - \omega^2 \xi + k\dot{\xi} + a(\dot{\xi} - \omega\eta) + \frac{f_2(R)}{Rm} \xi = 0,$$

$$\ddot{\eta} + 2\omega\dot{\xi} - \omega^2 \eta + k\dot{\eta} + a(\dot{\eta} + \omega\xi) + \frac{f_2(R)}{Rm} \eta = H\omega^2.$$

W przypadku drugim mamy $f_2(r_0) = \infty$, $r_0 = 0$, $r = R$, $\xi_0 = \eta_0 = 0$ i równania ruchu (2) są następujące:

$$\ddot{\xi} - 2\omega\dot{\eta} - \omega^2 \xi + k\dot{\xi} + a(\dot{\xi} - \omega\eta) + \frac{f_1(R)}{Rm} \xi = 0,$$

$$\ddot{\eta} + 2\omega\dot{\xi} - \omega^2 \eta + k\dot{\eta} + a(\dot{\eta} + \omega\xi) + \frac{f_1(R)}{Rm} \eta = H\omega^2.$$

W przypadku ogólnym uzyskanie zależności (9) z równania (8) jest dość kłopotliwe, dlatego też często stosuje się rozmaite przybliżone sposoby otrzymania tej zależności.

Ogólnie rzecz biorąc, jeżeli spełnione jest założenie (5) oraz w obszarze $D: \{|r_0| < \Delta, |R| < \Delta\}$, gdzie $\Delta = \text{const} > 0$, jeżeli funkcje f_1 i f_2 są klasy C^1 oraz jeśli

$$(10) \quad \left[\frac{df_2(r_0)}{dr_0} - \frac{\partial f_1(R - r_0)}{\partial r_0} \right]_{\substack{r_0=0 \\ R=0}} = K \neq 0,$$

to w otoczeniu punktu ($r_0 = 0$, $R = 0$) z równania (8) można określić funkcję $r_0 = r_0(R)$ w sposób jednoznaczny. Funkcja $r_0(R)$ jest wtedy ciągła i $r_0(0) = 0$ [41].

Niżej podamy kilka przybliżonych metod uzyskania zależności (9) z równania (8).

a) *Metoda kolejnych przybliżeń.* Zakładamy, że funkcje f_1 i f_2 są klasy C^1 i spełnione są założenia (5) i (10). Równanie (8) możemy przedstawić w następującej postaci:

$$(11) \quad r_0 = r_0 - \frac{f_2(r_0) - f_1(R - r_0)}{K},$$

gdzie K określone jest za pomocą wzoru (10).

Przy założeniu ciągłości pochodnych funkcji f_1 i f_2 można wybrać taki obszar D^* : $\{|r_0| < \Delta, |R| < \delta\}$, gdzie $\Delta = \text{const} > 0$, $\delta = \text{const} > 0$, aby były spełnione następujące nierówności:

$$\left| 1 - \frac{\frac{df_2(r_0)}{dr_0} - \frac{\partial f_1(R - r_0)}{\partial r_0}}{K} \right| < \lambda < 1, \quad \left| \frac{f_1(R)}{K} \right| < (1 - \lambda)\Delta,$$

gdzie λ jest pewną stałą liczbą mniejszą od jedności.

Przy powyższych założeniach z równania (11) otrzymujemy w pierwszym przybliżeniu w obszarze D^* [41]

$$r_0^{(1)} = \frac{f_1(R)}{K}.$$

Następne przybliżenia mają postać:

$$r_0^{(2)} = r_0^{(1)} - \frac{f_2(r_0^{(1)}) - f_1(R - r_0^{(1)})}{K},$$

$$r_0^{(3)} = r_0^{(2)} - \frac{f_2(r_0^{(2)}) - f_1(R - r_0^{(2)})}{K},$$

.....

$$r_0^{(n)} = r_0^{(n-1)} - \frac{f_2(r_0^{(n-1)}) - f_1(R - r_0^{(n-1)})}{K}.$$

Różnica między rozwiązaniem ścisłym $r_0(R)$ a rozwiązaniem n -tego przybliżenia szybko maleje ze wzrostem n i wynosi

$$|r_0(R) - r_0^{(n)}| < \Delta \lambda^n.$$

Metoda kolejnych przybliżeń jest dość pracochłonna, jednak ze względu na możliwość oszacowania błędu przy każdym «kroku» przybliżenia oraz ze względu na dość ogólne założenia dotyczące funkcji f_1 i f_2 metoda ta jest godna uwagi. W rozpatrywanym przypadku wychyleń wału przy wyprowadzaniu równań ruchu założono, że wychylenia są małe; założenie ograniczające wartości r_0 i R do obszaru D^* nie ogranicza więc zakresu stosowalności metody kolejnych przybliżeń.

Dla przykładu niech dane będą następujące funkcje:

$$f_1(r) = b_1 r + b_3 r^3, \quad f_2(r_0) = c_1 r_0 + c_3 r_0^3.$$

Pamiętając, że $r = R - r_0$ i podstawiając dane funkcje do równania (8) otrzymujemy w pierwszym przybliżeniu

$$r_0^{(1)} = R \frac{b_1}{b_1 + c_1} + R^3 \frac{b_3}{b_1 + c_1},$$

a w drugim przybliżeniu

$$(12) \quad r_0^{(2)} = R \frac{b_1}{b_1 + c_1} + \frac{R^3}{(b_1 + c_1)^4} (b_3 c_1^3 - c_3 b_1^3) - \frac{3R^5 b_3}{(b_1 + c_1)^4} (b_3 c_1^2 + c_3 b_1^2) + \\ + \frac{3R^7 b_3^2}{(b_1 + c_1)^4} (b_3 c_1 - c_3 b_1) - \frac{b_3^3 R^9}{(b_1 + c_1)^4} (c_3 + b_3).$$

Jak widać, w każdym następnym przybliżeniu wzrasta liczba wyrazów i jednocześnie następuje korekcja współczynników przy poszczególnych potęgach R .

b) *Rozwiązanie równania (8) za pomocą szeregów.* Jeżeli w otoczeniu punktu ($r = 0, r_0 = 0$), funkcje $f_1(r)$ i $f_2(r_0)$ są analityczne i spełnione jest założenie (5), to funkcja $r_0 = r_0(R)$ określona równaniem

$$(13) \quad f_1(R - r_0) - f_2(r_0) = 0$$

jest również analityczna w otoczeniu punktu $R = 0$ i można ją przedstawić w postaci szeregu [41]

$$(14) \quad r_0 = a_1 R + a_2 R^2 + a_3 R^3 + \dots$$

Jeżeli funkcję stojącą z lewej strony równania (13) rozwinieśmy w szereg w otoczeniu punktu ($r = R - r_0 = 0, r_0 = 0$), to otrzymamy następujące rozwinięcie:

$$(15) \quad r_0 = \frac{1}{\left[\frac{df_1}{dr} \right]_0 + \left[\frac{df_2}{dr_0} \right]_0} \left\{ \left[\frac{df_1}{dr} \right]_0 \frac{R}{1!} + \left[\frac{d^2 f_1}{dr^2} \right]_0 \frac{(R - r_0)^2}{2!} - \right. \\ \left. - \left[\frac{d^2 f_2}{dr_0^2} \right]_0 \frac{r_0^2}{2!} + \left[\frac{d^3 f_1}{dr^3} \right]_0 \frac{(R - r_0)^3}{3!} - \left[\frac{d^3 f_2}{dr_0^3} \right]_0 \frac{r_0^3}{3!} + \dots \right\}$$

przy założeniu, że

$$\left[\frac{df_1}{dr} \right]_0 + \left[\frac{df_2}{dr_0} \right]_0 = K \neq 0.$$

Podstawiamy szereg (14) do prawej strony wzoru (15), a następnie przyrównujemy współczynniki przy jednakowych potęgach R . Stąd otrzymujemy formuły określające współczynniki $a_i, i = 1, 2, \dots$:

$$a_1 = \frac{1}{K} \left[\frac{df_1}{dr} \right]_0,$$

$$a_2 = \frac{1}{K} \left\{ \left[\frac{d^2 f_1}{dr^2} \right]_0 \frac{(1 - a_1)^2}{1!} - \left[\frac{d^2 f_2}{dr_0^2} \right]_0 \frac{a_1^2}{2!} \right\},$$

$$a_3 = \frac{1}{K} \left\{ \left[\frac{d^2 f_1}{dr^2} \right]_0 \frac{1 - a_1}{1!} - \left[\frac{d^2 f_2}{dr_0^2} \right]_0 \frac{a_1 a_2}{1!} + \left[\frac{d^3 f_1}{dr^3} \right]_0 \frac{(1 - a_1)^3}{3!} - \left[\frac{d^3 f_2}{dr_0^3} \right]_0 \frac{a_1^3}{3!} \right\},$$

Ze względu na przyjęte założenie, że wychylenia wału są małe, a więc że są małe wartości r i r_0 , w praktyce można ograniczyć się do skończonej liczby wyrazów szeregu (14).

Otrzymuje się przy tym dostatecznie dużą dla celów praktycznych dokładność (np. w pracy [27], przy przyjęciu funkcji f_2 w postaci (1), ograniczając się do dwóch wyrazów szeregu i stosując dalej jednoczesnościową metodę Bogoliubowa-Mitropolskiego, uzyskuje się wiele praktycznie ważnych wyników dla podobnego zadania z dynamiki wirników).

Przytoczona metoda jest o tyle niewygodna, że wymaga, aby funkcje f_1 i f_2 były klasy C^∞ , a ponadto jest również dość pracochłonna.

Dla przykładu rozwiążemy metodą przedstawianą wyżej to samo co poprzednio zadanie. Gdy dane są funkcje

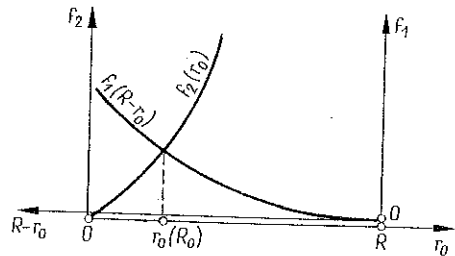
$$f_1(r) = b_1 r + b_3 r^3, \quad f_2(r_0) = c_1 r_0 + c_3 r_0^3,$$

to za pomocą wyżej przedstawionej metody z równania (8) uzyskujemy wzór

$$(16) \quad r_0 = R \frac{b_1}{b_1 + c_1} + \frac{R^3}{(b_1 + c_1)^4} (b_3 c_1 - c_3 b_1^3) - \\ - \frac{3R^5}{(b_1 + c_1)^7} (b_1^3 c_3 - b_3 c_1^3) (b_1^2 c_3 + b_3 c_1^2) + \dots$$

Jak widać, pierwsze dwa wyrazy szeregu $r_0(R)$, uzyskane za pomocą obu przedstawionych metod i określające pierwsze i drugie przybliżenie, są dla rozpatrywanego przykładu identyczne [wyrażenie (12) i pierwsze dwa wyrazy wyrażenia (16)].

c) *Metoda wykreslna.* W przypadku, jeżeli funkcje $f_1(r)$ i $f_2(r_0)$ są dane w postaci wykresu (jeżeli znane są analityczne wyrażenia tych funkcji, to wykresy można zawsze sporządzić), zależność (9) można otrzymać metodą wykreslną. O funkcjach f_1 i f_2 nie dodatkowo poza ich ciągłością się nie zakłada. Wykresy funkcji $f_1(r) = f_1(R - r_0)$ i $f_2(r_0)$ przedstawia się na jednym rysunku (rys. 3); punkt przecięcia



Rys. 3

krzywych określa szukaną wartość r_0 , przy czym w zależności od odległości od siebie osi rzędnych f_1 i f_2 (czyli w zależności od wartości parametru R) punkt ten będzie zmieniał swe położenie. Sposób znalezienia ciągłej zależności $r_0 = r_0(R)$ ilustruje rys. 4. Na górnym wykresie w płaszczyźnie r_0, f_2 narysowano rodzinę krzywych opisanych zależnością $f_1(R - r_0)$, gdzie R jest parametrem tej rodziny. Przenosząc odcięte punktów przecięcia krzywych f_1 i f_2 na oś rzędnych dolnego rysunku otrzymuje się w przecięciu z odpowiednimi odciętymi R kolejne punkty krzywej $r_0 = r_0(R)$.

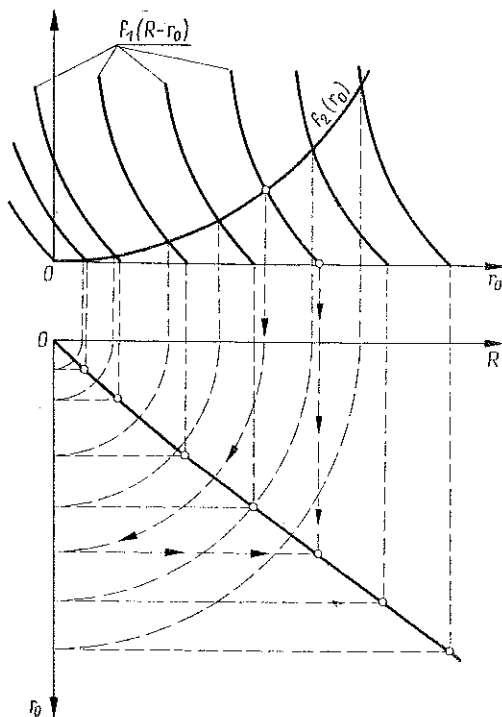
Należy tu zwrócić uwagę, że jeżeli jedna z funkcji f_1 czy f_2 lub obie te funkcje są niemonotoniczne w przedziale $[0, \infty)$, to funkcja (9) określona przez równanie (8) może być niejednoznaczna. Ilustruje to rys. 5, na którym otrzymano krzywą $r_0(R)$ metodą omówioną wyżej.

Przyjmujemy, że taką czy inną metodą uzyskaliśmy zależność (9) z równania (8). Wtedy równania ruchu wirnika można przedstawić następująco:

$$(17) \quad \begin{aligned} \ddot{\xi} - 2\omega\dot{\eta} - \omega^2 \xi + k\xi + a(\dot{\xi} - \omega\eta) + \frac{f_1 [R - r_0(R)]}{Rm} \xi &= 0, \\ \ddot{\eta} + 2\omega\dot{\xi} - \omega^2 \eta + k\dot{\eta} + a(\dot{\eta} + \omega\xi) + \frac{f_1 [R - r_0(R)]}{Rm} \eta &= H\omega^2. \end{aligned}$$

Wprowadźmy oznaczenie

$$f_1 [R - r_0(R)] = f(R).$$



Rys. 4

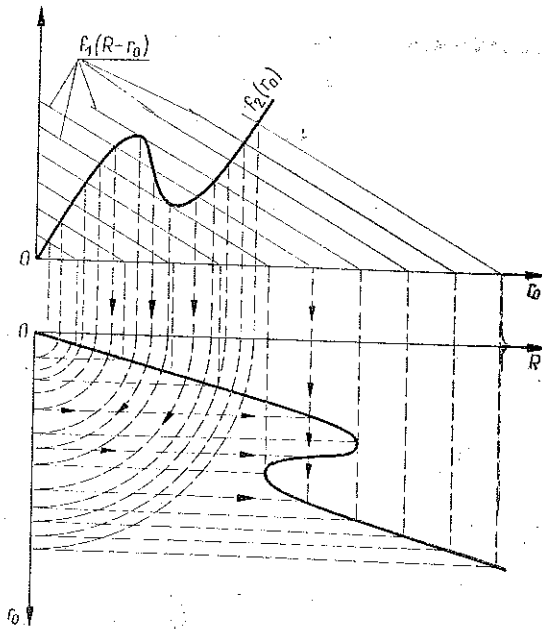
Funkcję $f(R)$ nazywamy uogólnioną charakterystyką sprężystości. Równania (17) napiszemy więc w następującej postaci:

$$(18) \quad \begin{aligned} \ddot{\xi} - 2\omega\dot{\eta} - \omega^2 \xi + k\xi + a(\dot{\xi} - \omega\eta) + \xi \frac{f(R)}{Rm} &= 0, \\ \ddot{\eta} + 2\omega\dot{\xi} - \omega^2 \eta + k\dot{\eta} + a(\dot{\eta} + \omega\xi) + \eta \frac{f(R)}{Rm} &= H\omega^2, \end{aligned}$$

gdzie

$$R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}.$$

Wykres funkcji $f(R)$ można otrzymać również metodą graficzną. Konstrukcja taka przedstawiona jest na rys. 6. Korzystamy tu ze znalezionej już poprzednio zależności $r_0(R)$, która wykreślona została na dolnym rysunku. Również na dolnym rysunku wykreślamy krzywą, ilustrującą zależność $R - r_0(R)$, odejmując rzędne punktów krzywej $r_0(R)$ od odpowiednich rzędnych prostej R . Na rysunku lewym rysujemy krzywą $f_1(r)$. Przenosimy kolejno rzędne krzywej $f_1(r)$ na prawy górny



Rys. 5

rysunek. Odpowiednie odcięte krzywej $f_1(r)$ przenosimy na dolny rysunek do przecięcia z krzywą $R - r_0(R)$. Odcięte tych punktów przenosimy z kolei na górny prawy rysunek i w przecięciu z odpowiednimi rzędnymi krzywej $f_1(R)$ uzyskujemy kolejne punkty krzywej $f(R)$. Na prawym górnym rysunku dodatkowo linią przerywaną wykreślono krzywą $f_1(R)$, która ilustruje charakterystykę sprężystości w przypadku sztywnych podpór. Z porównania krzywych $f(R)$ i $f_1(R)$ widać wyraźnie, o ile sprężystość podpór zmniejsza sztywność ogólnej charakterystyki sprężystości.

Równania ruchu wirnika można również wyrazić w nieruchomym układzie współrzędnych x, y, z korzystając z przekształcenia

$$\xi = x \cos \omega t + y \sin \omega t,$$

$$\eta = -x \sin \omega t + y \cos \omega t.$$

Z układu równań (18) otrzymujemy wtedy

$$(19) \quad \ddot{x} + (a+k) \dot{x} + k\omega y + x \frac{f(R)}{Rm} = -H\omega^2 \sin \omega t,$$

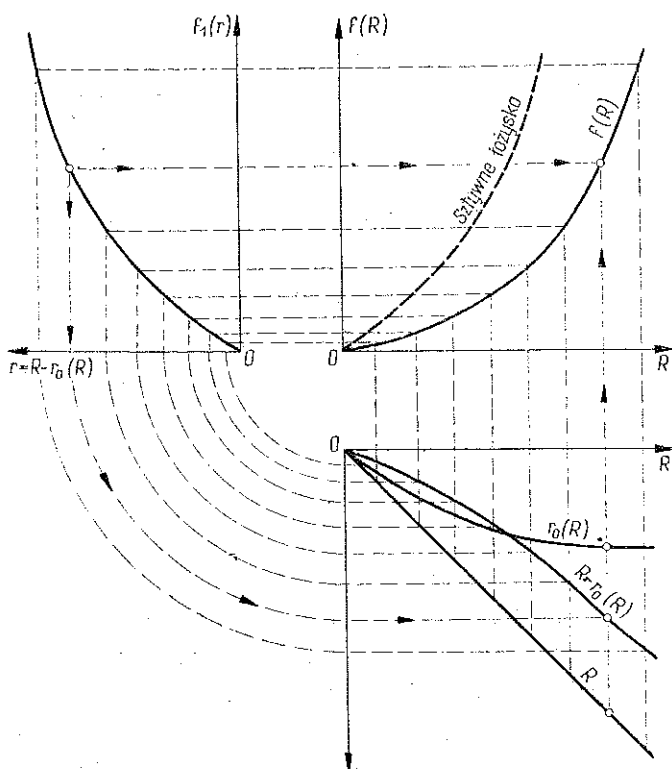
$$\ddot{y} + (a+k) \dot{y} - k\omega x + y \frac{f(R)}{Rm} = H\omega^2 \cos \omega t,$$

gdzie

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Istnienie i liczba rozwiązań szczególnych o postaci

$$(20) \quad \begin{aligned} x &= A \sin(\omega t + \gamma), \\ y &= -A \cos(\omega t + \gamma) \end{aligned}$$



Rys. 6

układu równań różniczkowych typu (19) zostało szczegółowo zanalizowane w pracach [42 i 43]. Rozwiązania (20) określają ustaloną precesję synchroniczną wirnika (drżania giętne wymuszone wskutek niewyrównoważenia) o stałym kącie nutacji A i stałej fazie γ . Amplitudę A i fazę γ oblicza się z następujących równań:

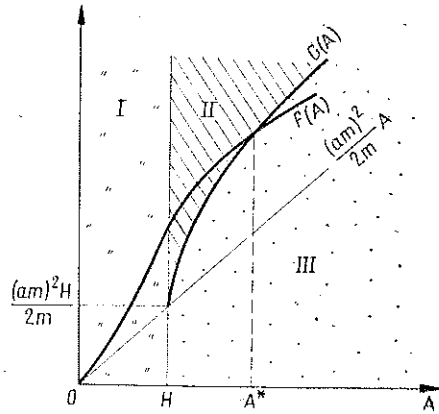
$$(21) \quad (f(A) - Am\omega^2)^2 + A^2 a^2 m^2 \omega^2 = H^2 m^2 \omega^4, \quad \gamma = \arctg \frac{amA\omega}{\omega^2 mA - f(A)}.$$

Podobnie jak w pracach [42 i 43] można przeprowadzić analizę równania (21) dla uzyskania warunków istnienia kilku rozwiązań typu (20) układu równań (19) o różnych amplitudach A . Na podstawie wyników z [42 i 43] przedstawiamy tu kryterium graficzne.

Na płaszczyźnie $A, f(A)$ (rys. 7) wykreśla się trzy obszary ograniczone osiami współrzędnych, prostą $A=H$ oraz krzywą

$$(22) \quad G(A) = A^3 \frac{(am)^2}{2mH^2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{H^2}{A^2}} \right).$$

W obszarze I istnieje jedno rozwiązanie ω równania (21), w obszarze II — dwa rozwiązania ω , w obszarze III — rozwiązania nie istnieją. Jeżeli więc krzywa $f(A)$ przebiega kolejno przez te obszary, to w przedziale $(0, H)$ funkcja $\omega(A)$ określona z równania (21) jest jednoznaczna i ma postać następującą:



Rys. 7

$$\omega = \left[\frac{A^2 a^2 m - 2A f(A) + \sqrt{A^4 a^4 m^2 - 4m A^3 a^2 f(A) + 4H^2 f^2(A)}}{2m(H^2 - A^2)} \right]^{1/2};$$

w przedziale (H, A^*) mamy dwie funkcje $\omega(A)$ (punkt A^* wyznaczony jest przez przecięcie wykresów funkcji $f(A)$ i $G(A)$):

$$\omega = \left[\frac{2A f(A) - A^2 a^2 m \mp \sqrt{A^4 a^4 m^2 - 4m A^3 a^2 f(A) + 4H^2 f^2(A)}}{2m(H^2 - A^2)} \right]^{1/2};$$

natomiast w przedziale (A^*, ∞) rozwiązanie $\omega(A)$ nie istnieje. Dla $A = H$

$$\omega = \omega^{**} = \frac{f^2(H)}{H^2 a^2 m^2 - 2Hm f(H)},$$

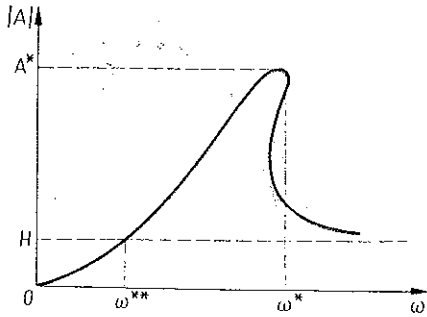
a dla $A = A^*$

$$(23) \quad \omega = \omega^* = \frac{2A^* f(A^*) - A^{*2} a^2 m}{2m - (A^{*2} - H^2)}.$$

Z postaci funkcji $G(A)$ [wzór (22)] widać, jaki wpływ na szerokość i położenie poszczególnych obszarów mają współczynniki układu równań różniczkowych (18) [lub (19)] — w szczególności współczynnik tłumienia zewnętrznego am oraz wartość m i położenie H masy niewyrównowazenia.

Z powyższych rozważań oraz na podstawie wyników prac [42 i 43] wnioskujemy o przebiegu krzywej rezonansowej $A(\omega)$ dla danych parametrów układu (18) i funkcji $f(R)$ (rys. 8). Wartość A^* będzie maksymalną amplitudą precesji, osiąganą przez wirnik przy zmiennej prędkości kątowej obrotów własnych, określa więc stan

rezonansowy. Jak widać ze wzoru (23) oraz z rys. 7, wartość tej maksymalnej amplitudy zależy w znacznym stopniu od postaci funkcji $f(A)$. Im bardziej płasko przebiega krzywa $f(A)$, tzn. im bardziej miękka jest ogólna charakterystyka sprężystości, tym wartość A^* jest niższa. Dla bardzo płaskich charakterystyk krzywa rezonansowa

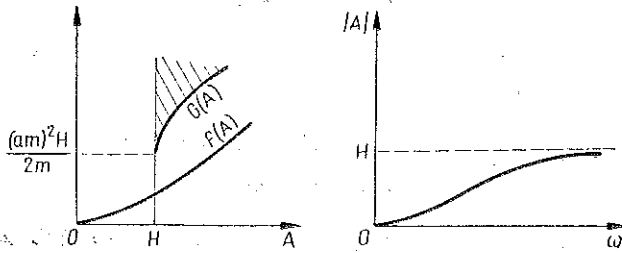


Rys. 8

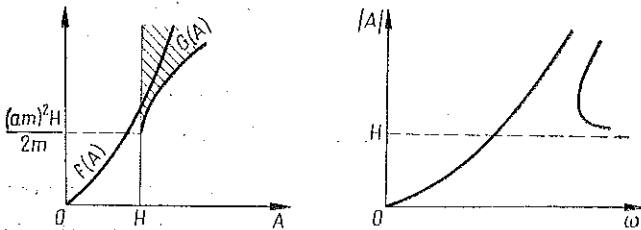
$A(\omega)$ może w ogóle nie posiadać ekstremum, odpowiadającego stanowi rezonansowemu (rys. 9). Odwrotnie, dla charakterystyk dostatecznie sztywnych amplituda w stanie rezonansowym może rosnąć nieograniczenie ze wzrostem ω (rys. 10).

Z powyższych rozważań wynika wniosek wielokrotnie zresztą potwierdzany doświadczalnie (np w pracach [3, 6, 12, 44-46]), że sprężyste podparcie wirnika, obniżające sztywność całego układu, zmniejsza wartość amplitudy rezonansowej, a więc polepsza własności dynamiczne wirnika. Podobne wyniki na podstawie teoretycznych rozważań uzyskał W. A. GROBOW [33].

W pracy N. W. GRIGORIEWA [5] na podstawie prostych rozważań kinetostaticznych dla podobnego do rozważanego w niniejszej pracy modelu wirnika, obra-



Rys. 9



Rys. 10

cającego się w nieliniowych łożyskach bez uwzględnienia tłumienia, uzyskano podobny wynik jakościowy: przez odpowiedni dobór charakterystyk sprężystości podpór łożyskowych można znacznie zmniejszyć amplitudy drgań ustalonych wskutek niewyrównoważenia i zlikwidować stany krytyczne. W pracy [5] szczegółowo

zbadano uogólnioną charakterystykę wału i podpór łożyskowych w postaci funkcji łamanej, odcinkowo liniowej:

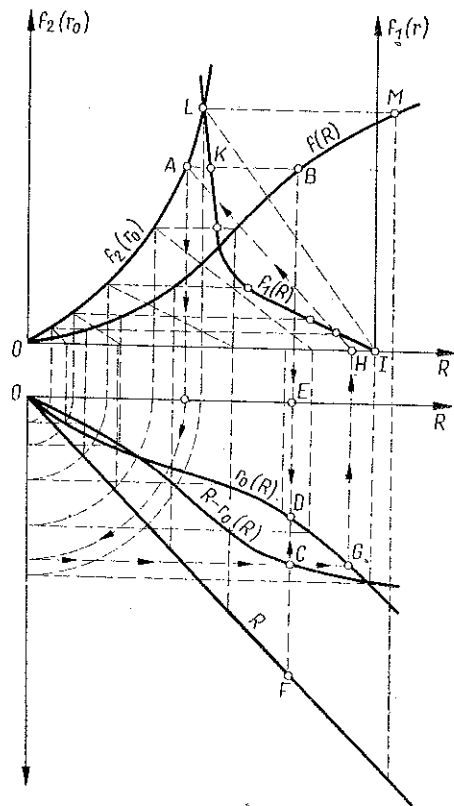
$$f(R) = \begin{cases} k_1 R, & \text{jeśli } R < R_1, \\ k_2 R + R_1(k_1 - k_2), & \text{jeśli } R_1 < R < R_2, \\ k_1 R - (R_2 - R_1)(k_1 - k_2), & \text{jeśli } R > R_2, \end{cases}$$

gdzie k_1 , k_2 , R_1 i R_2 są to pewne stałe współczynniki. Przedstawiono przykład doboru współczynników k_1 i k_2 tak, aby w zakresie roboczych obrotów wirnika amplitudy drgań ustalonych nie przekraczały danej wartości.

Zaproponowane w niniejszej pracy analityczne metody otrzymania uogólnionych charakterystyk sprężystości $f(R)$ oraz konstrukcje graficzne mogą posłużyć również jako metody doboru charakterystyk sprężystości wału i podpór łożyskowych wirnika tak, aby w zakresie roboczych obrotów wirnika amplitudy rezonansowe były minimalne. Uwzględnia się przy tym nieliniowy przebieg charakterystyk sprężystości oraz zewnętrzne i wewnętrzne tłumienie w układzie.

Dla ilustracji takiego doboru na rys. 11 przedstawiono wykreślny sposób wyznaczenia funkcji $f_1(r)$, czyli charakterystyki siły sprężystości wału, gdy dane są krzywe przedstawiające funkcje $f_2(r_0)$ (charakterystyka sprężystości łożysk) oraz $f(R)$ (ogólna charakterystyka sprężystości).

Odciętą punktu A leżącego na krzywej $f_2(r_0)$ (rys. 11) przenosimy na dolny rysunek; tworzy ona rzędną punktu C leżącego na krzywej $R - r_0(R)$. Odcięta tego punktu równa jest odciętej punktu B leżącego na krzywej $f(R)$. Postępując w ten sposób uzyskujemy na dolnym rysunku ciągłą funkcję $g(R) = R - r_0(R)$. Wykres $r_0(R)$ otrzymujemy odejmując kolejno rzędne krzywej $R - r_0(R)$ od prostej R tak, że $EF - EC = ED$. W ten sposób uzyskaliśmy między innymi punkty D oraz G , mające tę samą rzędną, co punkt C . Rzutując odciętą punktu G na oś R



Rys. 11

górnego rysunku otrzymujemy punkt H . Punkt H i punkt A muszą leżeć na jednej z krzywych rodziny $f_1(r)$. W ten sposób uzyskane «pary» punktów przenosimy na jedną krzywą rodziny, sprowadzoną do punktu I na osi R , $HI = AK$. Punkt I uzyskany został podobnie jak punkt H rozpoczynając konstrukcję z punktów L

i M , podobnie jak A i B . W ten sposób otrzymujemy punkt K krzywej $f_1(r)$. Postępując podobnie dla dalszych punktów krzywych $f_2(R)$ i $f(R)$ uzyskujemy dalsze punkty krzywej $f_1(r)$.

Reasumując, w niniejszej pracy wyprowadzono równania różniczkowe ruchu niewyrównoważonego krążka wirującego, umocowanego na giętkim wale, podpartym w sprężystych podporach, przy założeniu nieliniowości sprężystych charakterystyk. Przedstawiono kilka sposobów uzyskania uogólnionej charakterystyki sprężystości. Od postaci uogólnionej charakterystyki sprężystości uzależniona jest wielkość amplitudy drgań wymuszonych wskutek niewyrównoważenia. Wykazano, że przez odpowiedni dobór charakterystyki sprężystości można w zakresie roboczych obrotów ω uniknąć obszarów drgań o zwiększonych amplitudach.

Literatura cytowana w tekście

1. R. ŁĄCZKOWSKI, *Obroty krytyczne wirników podpartych sprężystości*, Przegląd Mech., 6, 1966.
2. R. ŁĄCZKOWSKI, *Prędkości krytyczne wirników turbin dużej mocy*, Przegląd Mech., 22, 26 (1967).
3. А. С. Кельзон, В. И. Прядилов, *Устойчивость, переход через критические числа оборотов и автоколебания быстроходных веретен*, Изв. высш. уч. зав., Технология текстильной промышленности, 2, 1963.
4. Н. В. Звиноградский, М. Я. Кушуль, *Исследование вибраций быстроходных веретен*, Изв. АН СССР, ОТН, 10, 1956.
5. Н. В. Григорьев, *Динамические демпферы критических состояний вращающихся роторов турбомашин*, сб. Колебания в турбомашинях, Изд. АН СССР, 1956.
6. Р. И. Исаев, *Исследование критической скорости ротора при изменении жесткости его опор*, сб. Прочность и динамика авиационных двигателей, вып. 1, Машиностроение, 1964.
7. С. И. Сергеев, *Расчет демпфировки роторов турбомашин*, Кислород, 6, 1947.
8. С. И. Сергеев, *Расчет демпфировки многоколесных роторов*, Кислород, 1, 1948.
9. С. И. Сергеев, *Демпферные опоры турбомашин*, Кислород, 3, 1949.
10. С. И. Сергеев, *Демпфирование механических колебаний*, Физматгиз, 1959.
11. С. И. Сергеев, *Демпфирование колебаний анизотропно-упругих роторов*, сб. Колебания в турбомашинях, Изд. АН СССР, 1959.
12. В. STERNLICHT, P. LEVIS, *Vibration problems with high-speed turbomachinery*, Trans. ASME, 1, В 90, (1968).
13. К. GÖPEL, *Die dynamische Stabilität einer unrunder rotierenden Welle mit elastischen Lagern unter Berücksichtigung von Dämpfungseinflüssen*, Wiss. Z. Techn. Hochschule Otto von Guericke Magdeburg, 11, Nr 1, 1967.
14. Э. Л. Позняк, А. Н. Космачев, Б. Б. Райхлина, *Демпфирование вынужденных изгибных колебаний гибких роторов*, сб. Колебания и прочность при переменных напряжениях, изд. Наука, 1965.
15. Э. Л. Позняк, *Об устойчивости роторов обладающих анизотропными свойствами*, Проблемы прочности в машиностроении, вып. 7, 1962.
16. Ф. М. Диментберг, К. Т. Шаталов, А. А. Гусаров, *Колебания машин*, Машиностроение, 1964.
17. Ф. М. Диментберг, *Изгибные колебания вращающихся валов*, изд. АН СССР, 1959.
18. М. Я. Кушуль, *Автоколебания роторов*, изд. АН СССР, 1963.
19. А. TONDL, *Kmitanie rotorow s nerovnakou tuhostou hriadela*, vyd. SAV, Bratislava 1958.

20. A. TONDL, *Nektere otazky kmitani a stability odpruzenych rotorů*, Rozpr. Českoslov. Ak. Věd, ročník 65, Řada TV, sesit 5, 1955.
21. B. JÄGER, H. RAUDIES, *Erzwungene gedämpfte Schwingungen von rotierenden Systemen*, Ingr. Arch., Nr 4, 33 (1964).
22. A. TONDL, *Some problems of rotor dynamics*, Publ. House of the Czechosl. Acad. of Sci., Prague 1965.
23. E. DOWNHAM, *Theory of shaft whirling*, The Engineer, No 5307–No 5322, 204 (1957).
24. J. KOŽEŠNIK, *Dynamika maszyn*, PWT, Warszawa 1963.
25. E. C. KOENIG, *Analysis for calculating lateral vibration characteristics of rotating systems with any number of flexible supports*, Trans ASME, E, 4, 28 (1961).
26. Л. А. РАСТРИГИН, *Динамика нестационарного движения автономного ротора на упругих опорах*, сб. Проблемы прочности в машиностроении, вып. 7, 1962.
27. В. А. ГРОБОВ, *Асимптотические методы расчета изгибных колебаний валов турбомашин*, Изд. АН СССР, 1961.
28. И. Е. САХАРОВ, *Вынужденные колебания диска на горизонтальном валу двойной жесткости вращающемся в анизотропных упруго-массовых опорах*, Изв. АН СССР, ОТН, 3, 1959.
29. M. A. PROCHL, *A general method for calculating critical speeds of flexible rotors*, J. Appl. Mech., 12, 67 (1945).
30. A. TONDL, *Vliv odklonu os čepu od osy ložisek na pohyb a stabilitu rotorů*, Aplikace matematiky, 2, 1956.
31. Н. В. ГРИГОРЬЕВ, *Нелинейные колебания элементов машин и сооружений*, Машгиз, 1961.
32. В. А. ГРОБОВ, *Нелинейные задачи динамики роторов турбомашин*, Тр. Международного Симпозиума по нелинейным колебаниям, Киев 1961, изд. АН УССР, 1963.
33. В. А. ГРОБОВ, *Нестационарные колебания валов турбомашин при переходе через критические числа оборотов и вопросы устойчивости движения валов при скоростях превышающих критические*, Динамика strojov, Bratislava, 1966.
34. В. А. ГРОБОВ, *Нестационарные колебания упруго опертых роторов*, сб. Проблемы прочности в машиностроении, вып. 1, изд. АН СССР, 1958.
35. A. TONDL, *Le mouvement périodique des rotors avec une caractéristique non-linéaire des appuis de roulement*, Revue de Mécanique Appliquée, 1, 1957.
36. A. TONDL, *Résonance subharmonique d'un rotor ayant une caractéristique non-linéaire des appuis de roulement*, Revue de Mécanique Appliquée, 2, 1957.
37. A. TONDL, *Miscarea periodică a rotoarelor cu o caracteristică neliniară a reazemelor*, Studii si Cercetari de Mecanică aplicata, 1, 8 (1957).
38. A. TONDL, *Rezonanta subharmonica a unui rotor cu o caracteristică neliniară a reazemelor*, Studii si Cercetari de Mecanică Aplicata, 2, 8 (1957).
39. E. STANKIEWICZ, *Wpływ nieliniowej podatności jednej z podpór na obroty krytyczne i postać ugięcia wirującego wału*, Arch. Budowy Maszyn, 3, 11 (1964).
40. G. K. SUSŁOW, *Mechanika teoretyczna*, PWN, Warszawa 1960.
41. Г. М. ФИХТЕНГОЛЬЦ, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, II, Гостехиздат, 1948.
42. А. МУШИНСКАЯ, *Вынужденные колебания в некоторой механической системе с двумя степенями свободы*, Zagadnienia Drgań Nieliniowych, 8 (1967).
43. A. MUSZYŃSKA, *On motion of the rotor in flexible nonlinear bearings*, Prace IPPT, 19, 1967.
44. А. С. КЕЛЬЗОН, *Самоцентрирование и уравновешивание жесткого ротора вращающегося в двух упругих опорах*, Доклады АН СССР, 1, 110 (1956).
45. А. С. КЕЛЬЗОН, Н. И. МУШИНА, *Исследование вибраций быстроходных роторов с учетом натяга пружины*, Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и машиностр., 3, 1959.
46. А. С. КЕЛЬЗОН, З. В. ТРОИЦКАЯ, *Самоцентрирование и уравновешивание высокооборотного компрессора*, Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и машиностр., 3, 1963.

Резюме

О ДВИЖЕНИИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ВАЛА В ПОДАТЛИВЫХ ПОДШИПНИКАХ

В статье, рассматривается движение гибкого безмассового вала со статически неуравновешенным диском, находящимся в середине его длины. Вал вращается в радиально податливых подшипниках. Принято, что характеристики сил упругости как вала, так и опор подшипников имеют характер центральных сил и являются, в общем, нелинейными функциями радиального отклонения. Выводится уравнение движения ротора. Предлагаются аналитические и графические методы упрощения уравнений движения, путем выведения так наз. обобщенной характеристики упругости. Дается графический способ определения амплитуды резонансных колебаний (установившаяся синхроническая прецессия ротора). Предложенные аналитические методы получения обобщенной характеристики упругости, а также графическая конструкция, могут быть использованы в качестве метода подбора характеристики упругости вала и опор подшипников ротора так, чтобы в диапазоне рабочих оборотов ротора резонансные амплитуды были минимальными.

В статье дается обширный обзор литературы, касающейся динамики роторов на упругих опорах.

Summary

ON THE MOTION OF AN ELASTIC SHAFT ROTATING IN SUSCEPTIBLE BEARINGS

In this article the motion is considered of a flexible massless shaft with a statically unbalanced disk, mounted in the centre of its length. The shaft rotates in radially susceptible bearings. It has been assumed that the characteristics of elastic forces of both the shaft and bearing supports are of the character of central forces and are in general nonlinear functions of radial bending. The equations of motion of the rotor have been derived. Analytical and graphical methods have been presented of simplifying the equations of motion by the introduction of the so called generalized characteristic of elasticity. The graphical method of finding the amplitude of resonance vibrations (a steady synchronic precession of the rotor) has been presented. The proposed analytical methods of obtaining the generalized characteristic of elasticity and the graphical construction might serve as methods of selecting the elasticity characteristic of the shaft and bearing supports of the rotor so that in the range of the working revolutions of the rotor the resonance amplitudes be minimal.

The article has been supplement with an extensive review of literature pertaining the dynamics of rotors on bearings.

ZAKŁAD UKŁADÓW MECHANICZNYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 marca 1969 r.