

PEWNA KLASA LOSOWYCH PROFILI PRĘDKOŚCI

TADEUSZ CHMIELNIAK (GLIWICE)

J. WATSON [1] uogólniając pracę STUARTA [2] podał rozwiązanie uproszczonych równań Naviera-Stokesa dla dowolnej postaci zależności gradientu ciśnienia od czasu. Rozwiązanie dotyczy przepływu wzdłuż nieskończonej płaskiej ściany dla przyjętej stałej prędkości odsysania płynu. Celem niniejszej pracy jest rozpatrzenie tego problemu dla przypadku, gdy gradient ciśnienia jest czasową funkcją losową. Do rozwiązania zagadnienia wybrano metodę korelacyjną. Losowe profile prędkości oraz odpowiadające im wartości tarcia na ścianie w pracy scharakteryzowano momentami rzędu pierwszego i momentami centralnymi drugiego rzędu. Rozwiązanie wyszczególniono dla kilku obranych stochastycznych przebiegów prędkości strumienia potencjalnego.

1. Sformułowanie i rozwiązanie zagadnienia deterministycznego

Jeżeli x jest współrzędną równoległą do ściany, a y współrzędną prostopadłą do ściany, to matematyczny model laminarnego nieściśliwego przepływu o składowych prędkości niezależnych od x stanowią równania Naviera-Stokesa o postaci

$$(1.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\nu \partial y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}.$$

Uzupełnieniem równań (1.1) jest następujące równanie ciągłości i warunki brzegowe:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ y = 0, \quad u &= 0, \quad v = v_{sc} = \text{const} \\ y \rightarrow \infty, \quad u &\rightarrow U(t). \end{aligned}$$

Równanie (1.2)₁ jest spełnione dla $v = v_{sc} = \text{const}$. Wynika stąd zgodnie z (1.1)₁ niezależność p od współrzędnej y . Można więc wykorzystując prawo Bernoulliego dla przepływu zewnętrznego oraz warunk (1.2)₃, zastąpić $-(1/\rho)(\partial p/\partial x)$ przez $\partial U/\partial t$. Ustalenia te prowadzą do następującego równania dla $u(y, t)$:

$$(1.3) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + v_{sc} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{dU}{dt} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

W równaniach (1.1), (1.2) i (1.3) oznaczają: u i v składowe prędkości, t czas, $U(t)$ prędkość strumienia potencjalnego, ρ gęstość, p ciśnienie, ν lepkość kinematyczną
Rozwiązanie równania (1.3) dla dowolnej prędkości

$$(1.4) \quad U(t) = U_0 [1 + f(t)] = U_0 h(t)$$

podał J. Watson [1]. Ma ono postać

$$(1.5) \quad \frac{u}{U_0} = 1 - e^{-\eta} + f(T) - \frac{\eta e^{-\frac{1}{2}\eta}}{4\pi^{1/2}} \int_0^{\infty} \lambda^{-3/2} f(T-\lambda) \exp\left[-\left(\lambda + \frac{\eta^2}{16\lambda}\right)\right] d\lambda$$

gdzie

$$T = \frac{tv_{sc}^2}{4\nu}, \quad \eta = \frac{\gamma |v_{sc}|}{\nu}.$$

Wielkość tarcia na ścianie określić można, wykorzystując (1.5), przez związek

$$(1.6) \quad \tau_{sc}^0 = \frac{\tau_{sc}}{\rho U_0 |v_{sc}|} = 1 + f(T) + \frac{1}{4\pi^{1/2}} \int_0^{\infty} \lambda^{-3/2} [f(T) - f(T-\lambda)] e^{-\lambda} d\lambda.$$

Zależności (1.5) i (1.6) opisujące pole prędkości i wielkości tarcia stanowiąc będą punkt wyjścia do dalszych rozważań.

2. Analiza korelacyjna

Jeżeli proces $U(t) = U_0 h(t)$ jest średniokwadratowo różniczkowalny, to równanie (1.3) określa średniokwadratowo różniczkowalny proces losowy $u(t, \eta)$. Załóżmy dodatkowo, że

1) funkcja $h(t)$ jest procesem losowym drugiego rzędu o wartości średniej $\langle h(t) \rangle$ i funkcji korelacyjnej $K_{hh}(t_1, t_2)$ [9].

2) funkcja $h(t)$ jest procesem mierzalnym dla każdego t ,

3) wariancja procesu $h(t) - K_{hh}(t_1, t_2)$ jest całkowalna względem t_1 w każdym przedziale. Przy tych założeniach procesy u/U_0 i τ określone odpowiednio równaniami (1.5) i (1.6) istnieją i posiadają wartości oczekiwane i funkcje korelacyjne [9] określone formułami następującymi

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \left\langle \frac{u(T)}{U_0} \right\rangle &= \langle h(T) \rangle - e^{-\eta} - \\ &\quad - \frac{\eta e^{-\frac{1}{2}\eta}}{4\pi^{1/2}} \int_0^{\infty} \lambda^{-3/2} \langle h(T-\lambda) \rangle \exp\left[-\left(\lambda + \frac{\eta^2}{16\lambda}\right)\right] d\lambda, \\ K_{\frac{u_1}{U_0}, \frac{u_2}{U_0}} &= K_{h,h}(T_1, T_2) - \\ &\quad - \frac{\eta e^{-\frac{1}{2}\eta}}{4\pi^{1/2}} \left\{ \int_0^{\infty} \lambda_2^{-3/2} \exp\left[-\left(\lambda_2 + \frac{\eta^2}{16\lambda_2}\right)\right] K_{h,h}(T_1, T_2 - \lambda_2) d\lambda_2 - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\infty} \lambda_1^{-3/2} \exp\left[-\left(\lambda_1 + \frac{\eta^2}{16\lambda_1}\right)\right] K_{h,h}(T_1 - \lambda_1, T_2) d\lambda_1 \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2.1) \quad & + \frac{\eta^2 e^{-\eta}}{16\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \lambda_1^{-3/2} \lambda_2^{-3/2} \exp\left[-\left(\lambda_1 + \frac{\eta^2}{16\lambda_1}\right)\right] \exp\left[-\left(\lambda_2 + \frac{\eta^2}{16\lambda_2}\right)\right] \times \\
 \text{s.d.} \quad & \times K_{h,h}(T_1 - \lambda_1, T_2 - \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 \\
 \langle \tau_{sc}^0 \rangle & = \langle h(T) \rangle + \frac{1}{4\pi^{1/2}} \int_0^\infty \lambda^{-3/2} [\langle h(T) \rangle - \langle h(T - \lambda) \rangle] e^{-\lambda} d\lambda, \\
 K_{\tau_{sc1}^0, \tau_{sc2}^0}(T_1, T_2) & = K_{h,h}(T_1, T_2) + \frac{1}{4\pi^{1/2}} \int_0^\infty \lambda_1^{-3/2} [K_{h,h}(T_1, T_2) - \\
 & - K_{h,h}(T_1 - \lambda_1, T_2)] e^{-\lambda_1} d\lambda_1 + \frac{1}{4\pi^{1/2}} \int_0^\infty \lambda_2^{-3/2} \int_0^\infty [K_{h,h}(T_1, T_2) - \\
 & - K_{h,h}(T_1, T_2 - \lambda_2)] e^{-\lambda_2} d\lambda_2 + \frac{1}{16\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \lambda_1^{-3/2} \lambda_2^{-3/2} [K_{h,h}(T_1, T_2) - \\
 & - K_{h,h}(T_1, T_2 - \lambda_2) - K_{h,h}(T_1 - \lambda_1, T_2) + K_{h,h}(T_1 - \\
 & - \lambda_1, T_2 - \lambda_2)] e^{-\lambda_1} e^{-\lambda_2} d\lambda_1 d\lambda_2.
 \end{aligned}$$

Dla $T_1 = T_2$ formuły (2.1)_{2,4} określają średnie kwadraty prędkości i tarcia:

$$\begin{aligned}
 (2.2) \quad & \sigma_{\frac{u}{U_0}}^2(T, \eta) = \left[K_{\frac{u_1}{U_2}, \frac{u_2}{U_0}}(T_1, T_2, \eta) \right]_{T_1=T_2}, \\
 & \sigma_{\tau_{sc}^0}^2(T) = \left[K_{\tau_{sc1}^0, \tau_{sc2}^0}(T_1, T_2) \right]_{T_1=T_2}.
 \end{aligned}$$

Jeżeli ograniczyć się do procesów normalnych, to związki (2.1)_{1,3} i (2.2) wystarczają do całkowitego opisu badanych profili prędkości i wielkości tarcia. Dla innego typu zjawisk dostarczają one podstawowych informacji praktycznych, określając wartość średnią i rozsiew możliwych wartości rozpatrywanych zmiennych losowych.

Rozpatrzmy obecnie szczegółowe rozwiązania (2.1)_{1,3} i (2.2) dla wybranych kilku postaci funkcji losowej (1.4), spełniających założenia 1, 2 i 3.

3. Rozwiązania szczegółowe

1. Załóżmy, że funkcja przypadkowa (1.4) jest stacjonarna i posiada rozkład kanoniczny typu

$$(3.1) \quad h(T) = 1 + \sum_{n=1}^k a_n \cos \omega_n T + \beta_n \sin \omega_n T,$$

przy czym dodatkowo spełnione są następujące warunki:

$$\begin{aligned}
 \langle a_n \rangle = \langle \beta_n \rangle = 0, \quad \langle a_n^2 \rangle = \langle \beta_n^2 \rangle = D_n, \\
 \left. \begin{aligned} \langle a_n \beta_m \rangle = 0 \\ \langle a_n a_m \rangle = 0 \\ \langle \beta_n \beta_m \rangle = 0 \end{aligned} \right\} n \neq m, \quad \omega_n = \text{const.}
 \end{aligned}$$

Dla założenia (3.1) otrzymujemy z (2.1)₁ dla wartości oczekiwanej u/U_0 następujące rozwiązanie:

$$(3.2) \quad \left\langle \frac{u}{U_0} \right\rangle = 1 - e^{-\eta}.$$

Rozwiązanie (3.2) jest identyczne z deterministycznym rozwiązaniem równania (1.1)₁ przy $dU/dt = 0$ [3]. Jest to oczywiste ze względu na liniowy charakter zależności (2.1)₁ i założenie $\langle dU/dt \rangle = 0$ (zgodnie z (3.1) i (1.4)).

Wariancję procesu otrzymujemy wykorzystując fakt, że dla losowej funkcji (3.1) funkcja korelacyjna ma postać

$$(3.3) \quad K_{h, h} = \sum_{n=1}^k D_n \cos \omega_n (T_2 - T_1).$$

Z (2.1)₂ i (2.2)₁ mamy

$$(3.4) \quad \sigma_{\frac{u}{U_0}}^2(\eta) = \sum_{n=1}^k D_n - e^{-\frac{1}{2}\eta} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^k D_n \left[e^{-\frac{\sqrt{1+i\omega_n}}{2}\eta} + e^{-\frac{\sqrt{1-i\omega_n}}{2}\eta} \right] \right\} + e^{-\eta} \operatorname{Re} \sum_{n=1}^k D_n e^{-\frac{\sqrt{1+i\omega_n}}{2}\eta - \frac{\sqrt{1-i\omega_n}}{2}\eta}.$$

Z (3.4) wynika, że średni kwadrat u/U_0 , będący tylko funkcją współrzędnej η , zeruje się na ścianie ($\eta \rightarrow 0$), a dla $\eta \rightarrow \infty$ przyjmuje wartość $\sum_{n=1}^k D_n$. Wartość oczekiwana i wariancja procesu τ_{sc}^0 dla założenia (3.1) będą wielkościami stałymi:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \langle \tau_{sc}^0 \rangle &= 1, \\ \sigma_{\tau_{sc}^0}^2 &= \sum_{n=1}^k D_n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k D_n \{ \operatorname{Re} [\sqrt{1+i\omega_n} + \sqrt{1-i\omega_n}] - 2 \} + \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{n=1}^k D_n [1 - \operatorname{Re} (\sqrt{1+i\omega_n} + \sqrt{1-i\omega_n} + \sqrt{1+\omega_n^2})]. \end{aligned}$$

Zależności (3.4), (3.5)₁ (podobnie jak i podane dalej w tej pracy) otrzymuje się po wykorzystaniu formuł

$$\begin{aligned} I_1(a, a, b) &= \int_0^a \exp \left[- \left(a^2 \lambda + \frac{b^2}{\lambda} \right) \right] \lambda^{-3/2} d\lambda = \\ &= \frac{\pi^{1/2}}{2b} e^{2ab} \left[e^{-4ab} \operatorname{erfc} \left(\frac{b}{a^{1/2}} - a\alpha^{1/2} \right) + \operatorname{erfc} \left(\frac{b}{a^{1/2}} + a\alpha^{1/2} \right) \right], \\ I_1(\infty, a, b) &= \frac{\pi^{1/2}}{b} e^{-2ab}, \end{aligned}$$

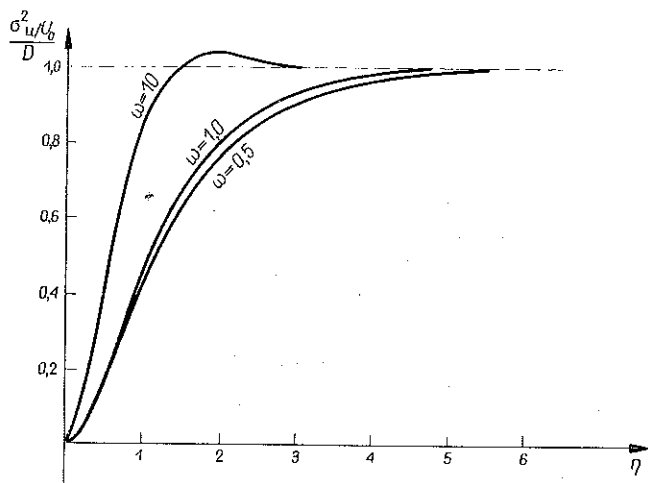
$$I_2(a, a, b) = \int_0^{\infty} \exp \left[- \left(a^2 \lambda + \frac{b^2}{\lambda} \right) \right] \lambda^{-1/2} d\lambda = \frac{\pi^{1/2}}{2a} e^{2ab} \times$$

$$\times \left[e^{-4ab} \operatorname{erfc} \left(\frac{b}{a^{1/2}} - a\alpha^{1/2} \right) - \operatorname{erfc} \left(\frac{b}{a^{1/2}} + a\alpha^{1/2} \right) \right],$$

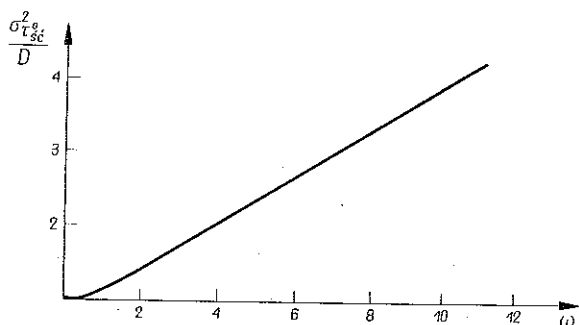
$$I_2 = (\infty, a, b) = \frac{\pi^{1/2}}{a} e^{-2ab},$$

gdzie

$$\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi,$$



Rys. 1



Rys. 2

Zależności (3.4) i (3.5) dla $n = 1$ zilustrowano na rys. 1 i 2 przyjmując kilka wartości ω . Z rys. 1, który przedstawia sposób narastania średniego kwadratu prędkości z η , wynika, że im większa wartość ω , tym mniejszy przedział $\Delta\eta$, w którym $\sigma_{u/\omega}^2$ osiąga wartość graniczną. Rysunek 2 ilustruje natomiast rodzaj zależności średniego kwadratu tarcia od częstości wymuszenia.

2. Załóżmy obecnie, że funkcja $f(T)$ jest sinusoidą o stałej częstotliwości ω i normalnej amplitudzie losowej $\varphi(T)$:

$$(3.6) \quad f(T) = \varphi(T) \sin \omega T, \quad \langle \varphi(T) \rangle = c \sigma_{\varphi(T)}^2 = D.$$

Z (3.6) otrzymuje się łatwo

$$(3.7) \quad \langle f(T) \rangle = c \sin \omega T, \quad K_{f, f}(T_1, T_2) = D \sin \omega T_1 \sin \omega T_2.$$

Niestacjonarny stochastyczny proces (3.7) może aproksymować wiele rzeczywistych przebiegów funkcji $h(T)$, dlatego rozwiązanie zagadnienia brzegowego (1.1)–(1.2) dla tak obranej funkcji $f(T)$ jest szczególnie interesujące.

Z (2.1)_{1,3} otrzymujemy biorąc pod uwagę (3.7)₁ i (1.4):

$$(3.8) \quad \left\langle \frac{u}{U_0} \right\rangle = 1 - e^{-\eta} + C \left(\sin \omega T + e^{-\frac{1}{2}\eta} \operatorname{Im} e^{-\frac{1}{2}\eta \sqrt{1+i\omega}} \right),$$

$$\langle \tau_{sc}^0 \rangle = 1 + C \left(\frac{1}{2} \sin \omega T + \operatorname{Im} e^{i\omega T} \sqrt{1+i\omega} \right).$$

Zależności (3.8) składają się z części ustalonej, odpowiadającej deterministycznemu rozwiązaniu równania (1.3) bez wyrazów będących pochodnymi względem czasu oraz z części niustalonej, zawierającej funkcje okresowe o dwu różnych okresach, co dowodzi przesunięcia fazowego $\langle u/U_0 \rangle$, $\langle \tau_{sc}^0 \rangle$ w stosunku do wymuszenia u/U_0 .

Wariancje u/U_0 i τ_{sc}^0 można wyznaczyć w podobnie prosty sposób jak w przykładzie poprzednim. Z zależności (2.2) otrzymujemy

$$(3.9) \quad \frac{1}{D} \sigma_{\frac{u}{U_0}}^2 = \sin^2 \omega T - e^{-\frac{1}{2}\eta} \left(2 \sin^2 \omega T \operatorname{Re} e^{-\eta \frac{\sqrt{1-i\omega}}{2}} - 2 \sin 2\omega T \operatorname{Im} e^{-\eta \frac{\sqrt{1-i\omega}}{2}} \right) + e^{-\eta} \left(\sin \omega T \operatorname{Re} e^{-\eta \frac{\sqrt{1-i\omega}}{2}} - \cos \omega T \operatorname{Im} e^{-\eta \frac{\sqrt{1-i\omega}}{2}} \right)^2,$$

$$\frac{1}{D} \sigma_{\tau_{sc}^0}^2 = \frac{1}{4} \sin^2 \omega T + \frac{1}{2} \sin^2 \omega T \operatorname{Re} \sqrt{1-i\omega} + \frac{1}{4} \sin 2\omega T \operatorname{Im} \sqrt{1-i\omega} + (\operatorname{Im} \sqrt{1-i\omega})^2.$$

Zależności (3.8)₂ i (3.9)₂ dla $\omega = 1$ i 10 zilustrowano na rys. 3 i 4.

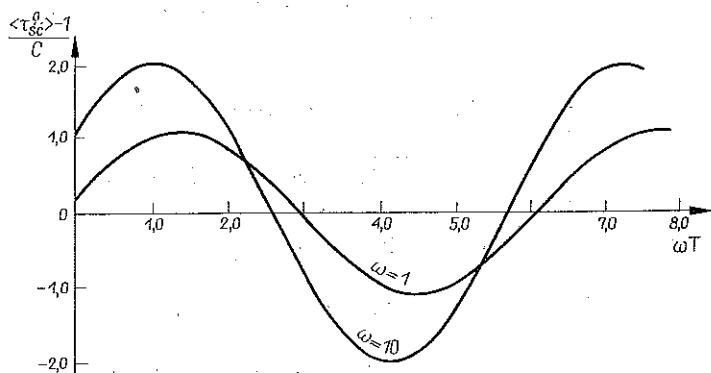
3. Niech obecnie funkcja $f(T)$ w zależności (1.4) będzie procesem losowym, który może przyjmować jedynie dwie wartości $\pm C$. Liczba zmian wartości $f(T)$ w przedziale $(T, \Delta T)$ jest funkcją przypadkową podlegającą rozkładowi Poissona o parametrze (aT) . Dla uogólnienia założymy, że tak określoną funkcję pomnożono przez funkcję Heaviside'a $H(T)$. Jak łatwo stwierdzić, średnia wartość $f(T)$ i jej funkcja korelacyjna $K_{f_1, f_2}(T_1, T_2)$ będą wynosić:

$$(3.10) \quad \langle f(T) \rangle = 0,$$

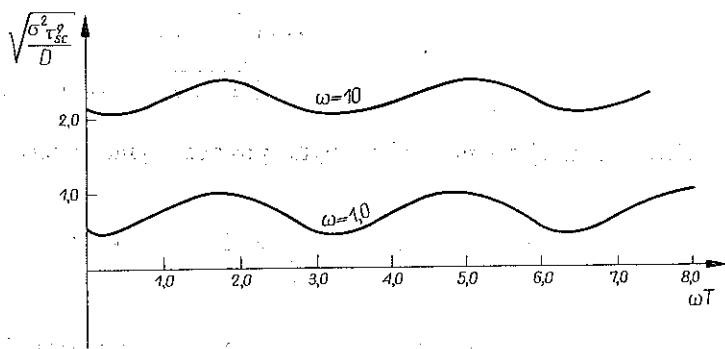
$$K_{f_1, f_2}(T_1, T_2) = CH(T_1)H(T_2)e^{-2a(T_2-T_1)}.$$

Uwzględniając (3.10) wartość średnią i funkcję korelacyjną procesu $h(T)$ przedstawimy formułami następującymi:

$$(3.11) \quad \langle h(T) \rangle = 1, \\ K_{hh}(T_1, T_2) = K_{f_1, f_2}(T_1, T_2).$$



Rys. 3



Rys. 4

Podstawiając (3.11) do (2.1)_{1,3} otrzymujemy dla wartości oczekiwanych profili u/U_0 i τ_{sc}^0 wyrażenia analogiczne do (3.2) i (3.5)₁, natomiast wariancje procesów u/U_0 , τ_{sc}^0 będą wynosiły zgodnie z (2.2) po wykorzystaniu (3.10)₂:

$$(3.12) \quad \frac{1}{c} \frac{\sigma_u^2}{U_0} = 1 - \frac{e^{-\frac{1}{2}\eta}}{2} \left[e^{-\frac{\sqrt{1-2a}}{2}\eta} \operatorname{erfc} \left(\frac{\eta}{4T^{1/2}} - \sqrt{1-2a} T^{1/2} \right) + \right. \\ \left. + e^{\frac{\sqrt{1-2a}}{2}\eta} \operatorname{erfc} \left(\frac{\eta}{4T^{1/2}} + \sqrt{1-2a} T^{1/2} \right) + e^{-\frac{\sqrt{1+2a}}{2}\eta} \operatorname{erfc} \left(\frac{\eta}{4T^{1/2}} - \right. \right. \\ \left. \left. - \sqrt{1+2a} T^{1/2} \right) + e^{\frac{\sqrt{1+2a}}{2}\eta} \operatorname{erfc} \left(\frac{\eta}{4T^{1/2}} + \sqrt{1+2a} T^{1/2} \right) \right] +$$

$$(3.12) \quad \text{c.d.} \quad + \frac{1}{4} e^{-\eta} \left[e^{-\frac{\sqrt{1-2a}}{2}\eta} \operatorname{erfc} \left(\frac{\eta}{4T^{1/2}} - \sqrt{1-2a} T^{1/2} \right) + \right. \\ \left. + e^{-\frac{\sqrt{1-2a}}{2}\eta} \operatorname{erfc} \left(\frac{\eta}{4T^{1/2}} + \sqrt{1-2a} T^{1/2} \right) \right] \left[e^{-\frac{\sqrt{1+2a}}{2}\eta} \operatorname{erfc} \left(\frac{\eta}{4T^{1/2}} - \right. \right. \\ \left. \left. - \sqrt{1+2a} T^{1/2} \right) + e^{\sqrt{1+2a}} \operatorname{erfc} \left(\frac{\eta}{4T^{1/2}} + \sqrt{1+2a} T^{1/2} \right) \right],$$

$$\frac{1}{c} \sigma_{\tau_{sc}^0}^2 = 1 + \frac{1}{2\pi^{1/2}} \left[-2e^{-T} T^{1/2} - 2\pi^{1/2} \operatorname{erf}(T^{1/2}) + T^{-1/2} e^{-T(1-2a)} + \right. \\ \left. + \sqrt{1-2a} \pi^{1/2} \operatorname{erf}(\sqrt{1-2a} T^{1/2}) + T^{-1/2} e^{-T(1+2a)} + \right. \\ \left. + \sqrt{1+2a} \pi^{1/2} \operatorname{erf}(\sqrt{1+2a} T^{1/2}) \right] + \frac{1}{4\pi} \{ [e^{-T} T^{-1/2} + \pi^{1/2} \operatorname{erf}(T^{1/2})]^2 - \\ - [e^{-T} T^{-1/2} + \pi^{1/2} \operatorname{erf}(T^{1/2})] [e^{-T(1-2a)} T^{-1/2} + \\ + \sqrt{1-2a} \pi^{1/2} \operatorname{erf}(\sqrt{1-2a} T^{1/2}) + e^{-T(1+2a)} T^{-1/2} + \\ + \sqrt{1+2a} \pi^{1/2} \operatorname{erf}(\sqrt{1+2a} T^{1/2})] + [e^{-T(1-2a)} T^{-1/2} + \\ + \sqrt{1-2a} \pi^{1/2} \operatorname{erf}(\sqrt{1-2a} T^{1/2})] [e^{-T(1+2a)} T^{-1/2} + \\ + \sqrt{1+2a} \pi^{1/2} \operatorname{erf}(\sqrt{1+2a} T^{1/2})] \}.$$

Wyrażenia (3.12) są funkcjami niestacjonarnymi posiadającymi granice dla $T \rightarrow 0$ i $T \rightarrow \infty$:

$$\frac{1}{c} \sigma_{\frac{u}{U_0}}^2 = 1, \quad \frac{1}{c} \sigma_{\tau_{sc}^0}^2 = 1,$$

$$(3.13) \quad \frac{1}{c} \sigma_{\frac{u}{V_0}}^2 = 1 - e^{-\frac{1}{2}\eta(1+\sqrt{1-2a})} - e^{-\frac{1}{2}\eta(1+\sqrt{1+2a})} + e^{-1/2(\sqrt{1-2a}+\sqrt{1+2a})\eta-\eta},$$

$$\frac{1}{c} \sigma_{\tau_{sc}^0}^2 = \frac{1}{4} (1 + \sqrt{1-2a} + \sqrt{1+2a} + \sqrt{1-4a^2}).$$

Wielkości (3.12)₂ oraz (3.13)₃ przedstawiono odpowiednio na rys. 5 i 6.

W teorii laminarnej warstwy przyściennej, poza wielkościami wartości oczekiwanej i wariancji, interesującym będzie również prawdopodobieństwo przebywania wielkości losowej τ_{sc}^0 w przedziale $0 < \tau_{sc}^0 < \infty$. Jeżeli przyjąć, że funkcja $h(T)$ ma rozkład normalny, to prawdopodobieństwo to wyniesie [6]

$$(3.14) \quad P(0 < \tau_{sc}^0 < \infty) = \frac{1}{2} + \Phi \left(\frac{\langle \tau_{sc}^0 \rangle}{\sigma_{\tau_{sc}^0}} \right),$$

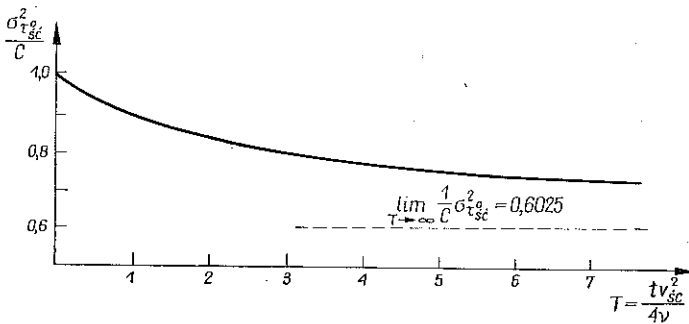
gdzie

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2/2} d\xi$$

jest całką prawdopodobieństwa.

Z (3.14) wynika, że dla spełnienia warunku $P \approx 1$ (warunek ten można przyjąć w naszym przypadku za pewnego rodzaju kryterium stabilności laminarnego przepływu) funkcja $\Phi(\langle \tau_{sc}^0 \rangle / \sigma_{\tau_{sc}^0})$ musi być równa 0,5, czyli z dużą dokładnością (10⁻⁴%) musi być spełniony warunek

$$(3.15) \quad \frac{\langle \tau_{sc}^0 \rangle}{\sigma_{\tau_{sc}^0}} = 5.$$

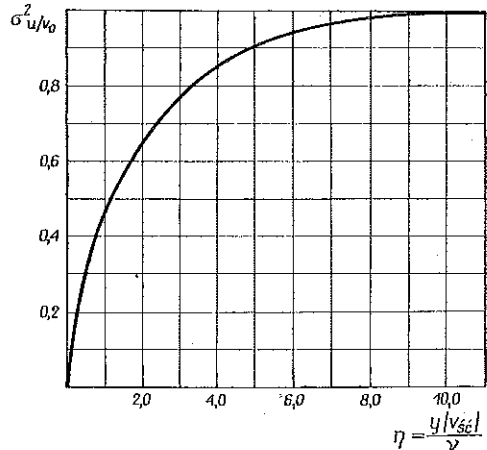


Rys. 5

W ogólnym przypadku zgodnie z (2.1)₃ i (2.2)₂ lewy wyraz równości (3.15) będący uwikłaną funkcją T można napisać w postaci związku

$$(3.16) \quad \frac{\langle \tau_{sc}^0 \rangle}{\sigma_{\tau_{sc}^0}} = \frac{1 + C\psi(\omega T)}{D\varphi(\omega T)},$$

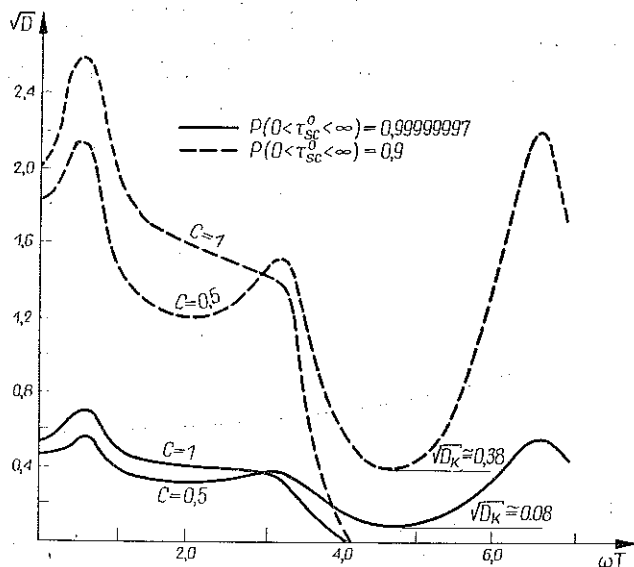
który połączony z (3.15) określa warunki dla C i D oraz T , przy których nie występuje oderwanie strugi dla pewnych lub wszystkich wartości $T = tv_{sc}^2/4v$. Jako przykład rozpatrzmy ten problem dla wymuszenia (3.6) ($\omega = 1$, rys. 7). Z rys. 7 wynika, że dla średniej wartości amplitudy funkcji $f(T)$ $C = 1$ prawdopodobieństwo określone równością (3.14) osiąga wartość bliską jedności tylko do pewnego zakresu $\omega T \approx 4$ i tylko dla stosunkowo niedużych wartości \sqrt{D} . Jeżeli przyjąć $C = 0,5$, to (jak wynika z rys. 7) istnieje pewna krytyczna wartość $\sqrt{D_K}$, dla której z prawdopodobieństwem $P \approx 1$ nie nastąpi



Rys. 6

w ogóle oderwanie strugi. Dla porównania na rys. 7 przedstawiono te same zależności dla $P = 0,9$.

W niniejszej pracy rozpatrzono stosunkowo prosty przykład (problem liniowy) zastosowania metody korelacyjnej do badania laminarnej warstwy przyściennej o losowym zaburzeniu prędkości potencjalnego strumienia. Nie mniej jednak może



Rys. 7

ona w zasadzie znaleźć zastosowanie do badania wszystkich problemów laminarnej warstwy przyściennej, dla których znana jest metoda rozwiązania deterministycznego (np. metoda kolejnych przybliżeń [3], metoda małego parametru [4], czy wreszcie metoda Lina [5]).

Literatura cytowana w tekście

1. J. WATSON, *A solution of the Navier-Stokes equation illustrating the response of laminar boundary layer to given change in the external stream velocity*, Quart. J. Mech. Appl. Math., 11, 1958.
2. J. T. STUART, *A solution of the Navier-Stokes and energy equations illustrating the response of skin friction and temperature of an infinite plate thermometer to fluctuations in the stream velocity*, Proc. Roy. Soc., A 231, 1955, 116-130.
3. H. SCHLICHTING, *Grenzschicht-Theorie*, Verlag G. Braun, Karlsruhe 1965.
4. M. J. LIGHTHILL, *The response of laminar skin friction and heat transfer to fluctuations in the stream velocity*, Proc. Roy. Soc., A 224, 1954.
5. C. C. LIN, *Motion in the boundary layer with a rapidly oscillating external flow*, Proc. 9th. Intern. Congress Appl. Mech., Brussel 1957 (cyt. z. 3).
6. W. S. PUGACZEW, *Teoria funkcji przypadkowych i jej zastosowanie do zagadnień sterowania automatycznego*, MON, Warszawa 1960.
7. W. W. BOLOTIN, *Metody statystyczne w mechanice budowli*, Arkady, Warszawa 1968.
8. А. С. МОУНН, А. М. ЯГЛОМ, *Статическая гидромеханика*, ч. I. Наука, 1965.
9. I. I. GICHMAN, A. W. SKOROCHOD, *Wstęp do teorii procesów stochastycznych*, PWN, Warszawa 1968.

Резюме

НЕКОТОРЫЙ КЛАСС СЛУЧАЙНЫХ ПРОФИЛЕЙ СКОРОСТИ

Работа касается определения статистических случайных характеристик профилей скорости и значений трения для течения, вдоль бесконечной плоской стены с предположенной скоростью отсасывания жидкости.

Скорость потенциального потока, является временной случайной функцией с известным ожидаемым значением и известной корреляционной функции. Используя метод корреляционного метода, определяются ожидаемые значения процессов (2.1) и (2.3), корреляционные функции (2.2) и (2.4), а также определяются средние квадратуры скорости трения (2.5) и (2.6). Приведенные решения даются для нескольких стохастических процессов (стационарных и нестационарных) скорости потенциального потока.

Summary

A CERTAIN CLASS OF CHANCE VELOCITY PROFILES

The paper concerns the determination of statistical chance characteristics of velocity profiles and values of friction for flow along an infinite plane wall with an assumed constant velocity of fluid sucking off.

The velocity of the potential stream is a time chance function of known expectation value and correlation function. Utilizing the method of correlation analysis the expectation values were determined of the processes (2.1) and (2.3) the correlation function (2.2) and (2.4) and the mean squares of velocity and friction (2.5), (2.6) were determined. The given solutions have been selected for a several assumed stochastic courses (stationary and nonstationary) of the velocities of the potential stream. The more interesting results have been illustrated with figures.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA W GLIWICACH

Praca została złożona w Redakcji dnia 26 lutego 1969 r.
