

**BŁONOWY STAN ODKSZTAŁCENIA W POWŁOKACH OBROTOWYCH  
DRUGIEGO STOPNIA O DODATNIEJ KRZYWIZNIE GAUSSA(\*)**

K. H. SCHLÜSSLER i W. FÖRSTER (FREIBERG, NRD)

**1. Wstęp**

W pracy [1] przez zdefiniowanie pewnych zastępczych wielkości przekrojowych i transformację współrzędnych powierzchniowych udało się sprowadzić jednorodny układ równań różniczkowych teorii błonowej powłok obrotowych o dodatniej krzywiznie Gaussa do równań Cauchy'ego-Riemanna. Wielkości przekrojowe stają się wtedy funkcjami analitycznymi zmiennej zespolonej.

Nasuwa się pytanie, czy istnieje również możliwość powiązania w podobny sposób przemieszczenia powłoki z funkcjami zespolonymi, a przez to ułatwienia rozwiązania odpowiedniego układu równań różniczkowych. Temu zagadnieniu poświęcona jest niniejsza praca.

**2. Układy współrzędnych, pojęcia geometryczne**

Między współrzędnymi kartezjańskimi  $z^k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) i bezwymiarowymi współrzędnymi krzywoliniowymi  $x^a$  ( $a = 1, 2$ ) na rozpatrywanej powierzchni powłoki, wykorzystując związek

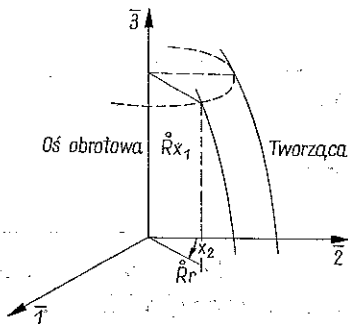
$$(2.1) \quad \hat{R}r = \hat{R} \sqrt{ax^1^2 + bx^1 + c}$$

i oznaczenia podane na rys. 1, znajdziemy następujące związki:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} z^1 &= \hat{R}r \sin x^2 = \hat{R} \sqrt{ax^1^2 + bx^1 + c} \sin x^2, \\ z^2 &= \hat{R}r \cos x^2 = \hat{R} \sqrt{ax^1^2 + bx^1 + c} \cos x^2, \\ z^3 &= \hat{R}x^1. \end{aligned}$$

Równanie tworzącej dla badanej powierzchni otrzymujemy ze związku (2.2) w następującej postaci:

$$(2.3) \quad r^2 - (ax^1^2 + bx^1 + c) = 0.$$



Rys. 1

(\*) Z niemieckiego przetłumaczył K. WILMAŃSKI.

Jej kształt zależy od wartości przyjmowanych przez współczynniki  $a, b$  i  $c$ . Na podstawie wartości wyznacznika charakterystycznego

$$(2.4) \quad D = \begin{vmatrix} a & 0 & \frac{1}{2}b \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2}b & 0 & c \end{vmatrix} = \frac{1}{4}(b^2 - 4ac) \neq 0$$

i współczynnika  $a$  można wyróżnić rodzaje powierzchni obrotowych drugiego stopnia zestawione w tabelicy 1.

Tabela 1

$D > 0, a < 0$	$D \geq 0, a > 0$		$D > 0, a = 0$
Tworząca lub tworzące			
Elipsa	Hiperbola		Parabola
Powierzchnie obrotowe			
Elipsoida	$D < 0$ Hiperboloida jednopowłokowa	$D > 0$ Hiperboloida dwupowłokowa	Paraboloida

Z równania (2.3) otrzymujemy następujące współrzędne wektorów bazy na powierzchni:

$$(2.5) \quad c_{\alpha}^k = \frac{\partial z^k}{\partial x^{\alpha}} = z^k|_{\alpha},$$

gdzie pochodne cząstkowe względem  $x^{\alpha}$  oznaczono pionową krótką kreską. Natomiast pochodną względem  $x^1$  oznaczać będziemy przecinkiem w górnej części różniczkowanej wielkości.

Po rozwinięciu związku (2.5) mamy

$$(2.6) \quad c_1^k = \dot{R}(r' \sin x^2, r' \cos x^2, 1), \quad c_2^k = \dot{R}(r \cos x^2, -r \sin x^2, 0).$$

Dla pierwszego tensora podstawowego powierzchni, stosując konwencję sumacyjną, mamy

$$(2.7) \quad a_{\alpha\beta} = c_{\alpha}^k c_{\beta}^l \delta_{kl},$$

$$a_{11} = \dot{R}^2(1+r'^2), \quad a_{22} = \dot{R}^2 r^2, \quad a_{12} = 0,$$

$$\bar{a} = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = \dot{R}^4 r^2(1+r'^2)$$

oraz dla jego współrzędnych kontrawariantnych

$$(2.8) \quad a^{11} = \frac{1}{\dot{R}^2(1+r'^2)}, \quad a^{22} = \frac{1}{\dot{R}^2 r^2}, \quad a^{12} = 0.$$

Jednostkowy wektor ortogonalny do powierzchni ma następujące współrzędne kowariantne:

$$(2.9) \quad N_k = \frac{\varepsilon_{kpa} c_1^p c_2^a}{\sqrt{a_{11} a_{22}}} = \frac{1}{\sqrt{1+r'^2}} (\sin x^2; \cos x^2, -r').$$

Natomiast dla współrzędnych kowektorów bazy powierzchniowej mamy

$$(2.10) \quad \begin{aligned} c_k^\alpha &= \delta_{kl} c_\beta^l a^{\alpha\beta}, \\ c_k^1 &= \frac{1}{\hat{R}(1+r'^2)} (r' \sin x^2, r' \cos x^2, 1), \\ c_k^2 &= \frac{1}{\hat{R}r} (\cos x^2, \sin x^2, 0). \end{aligned}$$

Wreszcie dla symboli Christoffela drugiego rodzaju w przyjętym układzie współrzędnych otrzymujemy zależności:

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha &= c_k^\alpha c_\beta^k |_\gamma, \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{r' r''}{1+r'^2}, \quad \Gamma_{22}^2 = 0, \quad \Gamma_{12}^1 = 0, \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{r'}{r}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{r r'}{1+r'^2}, \quad \Gamma_{11}^2 = 0, \end{aligned}$$

które prowadzą do następujących wzorów dla drugiego tensora podstawowego powierzchni:

$$(2.12) \quad \begin{aligned} b_{\alpha\beta} &= c_\alpha^k |_\beta N_k, \quad b_\alpha^\beta = b_{\alpha\gamma} a^{\gamma\beta}, \\ b_{11} &= \frac{\hat{R}r''}{\sqrt{1+r'^2}}, \quad b_{22} = -\frac{\hat{R}r}{\sqrt{1+r'^2}}, \quad b_{12} = 0, \\ b_1^1 &= \frac{r''}{\hat{R}(1+r'^2)^{3/2}}, \quad b_2^2 = -\frac{1}{\hat{R}r\sqrt{1+r'^2}}, \quad b_2^1 = 0. \end{aligned}$$

Krzywizna Gaussa ma wtedy postać

$$(2.13) \quad K = b_1^1 b_2^2 = -\frac{r''}{\hat{R}^2 r^4 (1+r'^2)^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4 \hat{R}^2 r^4 (1+r'^2)^2};$$

jest więc zawsze dodatnia, gdy  $D > 0$ . Tym samym wykluczamy z rozważań hiperboloidy jednowłokowe.

### 3. Równania podstawowe

Punktem wyjścia będą równania równowagi napisane za pomocą współrzędnych kontrawariantnych sił  $N^{\alpha\beta}$  w powłoce wolnej od obciążeń powierzchniowych

$$(3.1) \quad N^{\alpha\beta} |_\alpha = 0, \quad b_{\alpha\beta} N^{\alpha\beta} = 0,$$

równania definiujące tensor odkształcenia powłoki za pomocą współrzędnych wektora przemieszczenia  $v^\alpha$ ,  $w$

$$(3.2) \quad D^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (v^\alpha |^\beta + v^\beta |^\alpha - 2b^{\alpha\beta} w)$$

oraz związki fizyczne

$$(3.3) \quad D^{\alpha\beta} = \frac{1}{Eh} [(1+\nu) N^{\alpha\beta} - \nu a^{\alpha\beta} a_{\gamma\delta} N^{\gamma\delta}],$$

gdzie  $E$  oznacza moduł Younga,  $\nu$  liczbę Poissona oraz długość pionowa kreska oznacza pochodną kowariantną w przyjętym układzie współrzędnych.

W dalszych rozważaniach będą użyteczne współrzędne fizyczne tensorów na powierzchni. Dla tensora dwukrotnie kontrawariantnego otrzymujemy

$$(3.4) \quad A^{(\alpha\beta)} = \sqrt{\frac{a_{\beta\beta}}{a^{\alpha\alpha}}} A^{\alpha\beta}, \quad A^{(11)} = \dot{R}^2 (1+r'^2) A^{11},$$

$$A^{(12)} = \dot{R}^2 r \sqrt{1+r'^2} A^{12}, \quad A^{(22)} = \dot{R}^2 r^2 A^{22}$$

oraz dla wektora kontrawariantnego  $v^A$

$$(3.5) \quad v^{(A)} = v \sqrt{a_{AA}}, \quad v^{(1)} = \dot{R} \sqrt{1+r'^2} v^1, \quad v^{(2)} = \dot{R} r v^2.$$

#### 4. Stan naprężenia

Po wykorzystaniu definicji pochodnej kowariantnej i wstawieniu współrzędnych fizycznych równania równowagi mają postać

$$(4.1) \quad (rN^{(11)})|_1 - r' N^{(22)} + \sqrt{1+r'^2} N^{(12)}|_2 = 0,$$

$$(rN^{(12)})|_1 + r' N^{(12)} + \sqrt{1+r'^2} N^{(22)}|_2 = 0,$$

$$-\frac{rr''}{1+r'^2} N^{(11)} + N^{(22)} = 0.$$

Wyliminujmy teraz z tych równań  $N^{(22)}$  i zdefiniujmy następujące wielkości:

$$(4.2) \quad N_1 = \frac{r}{\sqrt{1+r'^2}} N^{(11)}, \quad N_2 = \kappa r^2 N^{(12)}, \quad \kappa = \frac{1}{\sqrt{D}} = \frac{2}{\sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

Otrzymujemy wtedy równania równowagi w uproszczonej postaci

$$(4.3) \quad \kappa r^2 N_1|_1 + N_2|_2 = 0, \quad \kappa r^2 N_2|_1 - N_1|_2 = 0.$$

Przeprowadzając przekształcenie współrzędnych

$$a = a(x^1)$$

z dodatkowym warunkiem

$$(4.4) \quad \frac{da}{dx^1} x^2 = 1,$$

otrzymujemy z (4.3) równania Cauchy'ego-Riemanna

$$(4.5) \quad N_1|_\alpha + N_2|_2 = 0, \quad N_2|_\alpha - N_1|_2 = 0.$$

Przyjmując definicję

$$(4.6) \quad z = x^2 + ia$$

można teraz uważać wielkości  $N_1$  i  $N_2$  za część rzeczywistą i urojoną funkcji analitycznej

$$(4.7) \quad N(z) = N_1 + iN_2.$$

Powyższe rozważania odpowiadają drodze, po której szedł WŁASOW. Można rozważać trzy przypadki zestawione w tablicy 2 ze względu na geometrię powłoki.

Tablica 2

	Powłoka eliptyczna	Powłoka hiperboliczna	Powłoka paraboliczna
$a$	$-\text{arc th} \left[ \frac{x}{2}(b+2ax^1) \right]$	$-\text{arc ch} \left[ \frac{x}{2}(b+2ax^1) \right]$	$\frac{1}{2} \ln \left( x^1 + \frac{c}{b} \right)$
$x^1$	$-\frac{1}{xa} \text{th } a - \frac{b}{2a}$	$-\frac{1}{xa} \text{ch } a - \frac{b}{2a}$	$e^{2a} - \frac{c}{b}$
$r^2$	$-\frac{1}{x^2 a \text{ch}^2 a}$	$-\frac{1}{x^2 a \text{sh}^2 a}$	$be^{2a}$
$r'$	$-\sqrt{-a} \text{sh } a$	$-\sqrt{a} \text{ch } a$	$\frac{1}{2} \sqrt{b} e^{-a}$

### 5. Stan przemieszczenia

Napiszmy związki fizyczne za pomocą współrzędnych fizycznych:

$$(5.1) \quad D^{(11)} = \frac{1}{Eh} [N^{(11)} - \nu N^{(22)}], \quad D^{(22)} = \frac{1}{Eh} [N^{(22)} - \nu N^{(11)}],$$

$$2D^{(12)} = \frac{2(1+\nu)}{Eh} N^{(12)},$$

i wprowadźmy odpowiednio współrzędne fizyczne do związku (3.2) dla tensora odkształcenia; otrzymujemy wówczas wzory

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{1+r'^2} v^{(1)}|_1 - \frac{r''}{\sqrt{1+r'^2}} w = (1+r'^2) \frac{\dot{R}}{Eh} [N^{(11)} - \nu N^{(22)}], \\
 (5.2) \quad & r v^{(2)}|_2 + \frac{r r'}{\sqrt{1+r'^2}} v^{(1)} + \frac{r}{\sqrt{1+r'^2}} w = r^2 \frac{\dot{R}}{Eh} [N^{(22)} - \nu N^{(11)}], \\
 & \sqrt{1+r'^2} v^{(1)}|_2 + r v^{(2)}|_1 - r' v^{(2)} = r \sqrt{1+r'^2} \frac{2(1+\nu) \dot{R}}{Eh} N^{(12)}.
 \end{aligned}$$

Jeżeli z tych równań wyeliminujemy przemieszczenie  $w$ , to otrzymamy

$$\begin{aligned}
 & (\sqrt{1+r'^2} v^{(1)}|_1 + r'' v^{(2)}|_2 = \frac{\dot{R}}{Eh} [(1+r'^2) (N^{(11)} - \nu N^{(22)}) + \\
 (5.3) \quad & \qquad \qquad \qquad + r r'' (N^{(22)} - \nu N^{(11)})], \\
 & (\sqrt{1+r'^2} v^{(1)}|_2 + r'' v^{(2)}|_1 - r' v^{(2)} = \frac{2(1+\nu) \dot{R}}{Eh} r \sqrt{1+r'^2} N^{(12)}.
 \end{aligned}$$

Analogicznie do wielkości sił przekrojowych można teraz wprowadzić zastępcze przemieszczenia:

$$(5.4) \quad u_1 = \sqrt{1+r'^2} v^{(1)}, \quad u_2 = \frac{1}{\kappa r} v^{(2)}.$$

W ten sposób równania (5.3) przyjmą postać

$$\begin{aligned}
 & \kappa r^2 u_2|_1 + u_1|_2 = \frac{2(1+\nu) \dot{R}}{Eh} r \sqrt{1+r'^2} N^{(12)}, \\
 (5.5) \quad & \kappa r^2 u_1|_1 - u_2|_2 = \frac{\dot{R}}{Eh} \left[ \kappa r^2 (1+r'^2) (N^{(11)} - \nu N^{(22)}) - \frac{1}{\kappa} (N^{(22)} - \nu N^{(11)}) \right].
 \end{aligned}$$

Po wykorzystaniu transformacji współrzędnych (4.4) lewe strony związków (5.5) przyjmują postać równań Cauchy'ego-Riemanna. Po wykorzystaniu zastępczych sił przekrojowych (4.2)<sub>1</sub> z prawej strony związków (5.5) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 & u_2|_\alpha + u_1|_2 = \frac{2(1+\nu) \dot{R}}{Eh} N_2 \frac{\sqrt{1+r'^2}}{\kappa r}, \\
 (5.6) \quad & u_1|_\alpha - u_2|_2 = \frac{\sqrt{1+r'^2}}{\kappa r} \frac{\dot{R} N_1}{Eh} \left[ 2\nu + \kappa^2 r^2 (1+r'^2) + \frac{1}{\kappa^2 r^2 (1+r'^2)} \right].
 \end{aligned}$$

Przechodząc do zmiennych zespolonych

$$(5.7) \quad z = x^2 + ia, \quad \bar{z} = x^2 - ia$$

i funkcji zespolonych

$$(5.8) \quad \begin{aligned} u &= u_2 + iu_1, & \bar{u} &= u_2 - iu_1, \\ N &= N_1 + iN_2, & \bar{N} &= N_1 - iN_2 \end{aligned}$$

oraz uwzględniając następujące reguły różniczkowania:

$$(5.9) \quad \begin{aligned} (\dots)|_z &= (\dots)|_z + (\dots)|_{\bar{z}}, \\ (\dots)|_a &= i [(\dots)|_z - (\dots)|_{\bar{z}}] \end{aligned}$$

można obydwie równania różniczkowe (5.6) przedstawić w postaci jednego równania różniczkowego w dziedzinie liczb zespolonych. Równanie to ma postać: w przypadku powierzchni eliptycznych

$$(5.10) \quad u|_{\bar{z}} = -\dot{R} \frac{\sqrt{-a}}{2Eh} \cos \frac{z-\bar{z}}{2} \sqrt{1+a \sin^2 \frac{z-\bar{z}}{2}} \left[ 2(1+\nu)\bar{N} - \frac{N+\bar{N}}{2} \frac{(1+a)^2}{a \cos^2 \frac{z-\bar{z}}{2} \left(1+a \sin^2 \frac{z-\bar{z}}{2}\right)} \right];$$

w przypadku powierzchni hiperbolicznych

$$(5.11) \quad u|_{\bar{z}} = i\dot{R} \frac{\sqrt{a}}{2Eh} \sin \frac{z-\bar{z}}{2} \sqrt{1+a \sin^2 \frac{z-\bar{z}}{2}} \left[ 2(1+\nu)\bar{N} - \frac{N+\bar{N}}{2} \frac{(1+a)^2}{a \sin^2 \frac{z-\bar{z}}{2} \left(1+a \cos^2 \frac{z-\bar{z}}{2}\right)} \right];$$

w przypadku powierzchni parabolicznych

$$(5.12) \quad u|_{\bar{z}} = -\dot{R} \frac{\exp i \frac{z-\bar{z}}{2}}{4Eh} \sqrt{b} \sqrt{1 + \frac{1}{4} b \exp i(z-\bar{z})} \times \left[ 2(1+\nu)\bar{N} + \frac{N+\bar{N}}{2} \frac{\left[ b - 4 \exp \{-i(z-\bar{z})\} \sqrt{1 + \frac{1}{4} b \exp i(z-\bar{z})} \right]^2}{4 \exp \{-i(z-\bar{z})\} \sqrt{1 + \frac{1}{4} b \exp i(z-\bar{z})}} \right].$$

Łatwo zauważyć, że wszystkie przypadki odkształceń nie zmieniające pierwszego tensora podstawowego powierzchni  $u|_{\bar{z}} = 0$  są zawarte w powyższych związkach dla funkcji analitycznych.

Należy jeszcze określić przemieszczenie  $w$  w kierunku normalnej zewnętrznej do powierzchni środkowej powłoki. Wykorzystamy w tym celu równania (5.2)<sub>1</sub>

i (5.2)<sub>2</sub>. Na miejsce przemieszczeń  $v^{(1)}$  i  $v^{(2)}$  podstawmy wielkości  $u_1$  i  $u_2$  oraz zamiast  $N^{(1)}$  i  $N^{(2)}$  — wielkości  $N_1$  i  $N_2$ . Otrzymamy wówczas następującą zależność:

$$-2w = \kappa r \sqrt{1+r'^2} (u_{1|_z} + u_{2|_z}) + \frac{2r'}{\sqrt{1+r'^2}} u_1 - \frac{\dot{R} N_1}{Eh} \left[ \kappa^2 r^2 (1+r'^2)^2 - \frac{1}{\kappa^2 r^2} \right]$$

lub, uwzględniając związki (5.11),

$$(5.13) \quad -2w = \kappa r \sqrt{1+r'^2} (u|_z + \bar{u}|_{\bar{z}}) - i \frac{r'}{\sqrt{1+r'^2}} (u - \bar{u}) + \frac{\dot{R} (N + \bar{N})}{Eh} \frac{1}{\kappa^2 r^2} [\kappa^4 r^4 (1+r'^2)^2 - 1].$$

Dla rozpatrywanych trzech przypadków mamy ostatecznie równania:

w przypadku powierzchni eliptycznych

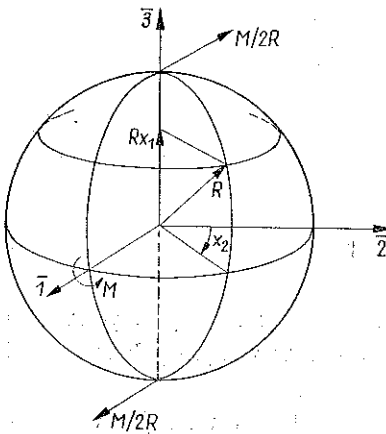
$$(5.14) \quad -2w = \frac{1}{\sqrt{-a}} \frac{\sqrt{1-a \operatorname{sh}^2 \alpha}}{\operatorname{ch} \alpha} (u|_z + \bar{u}|_{\bar{z}}) + i \frac{\sqrt{-a \operatorname{sh} \alpha}}{\sqrt{1-a \operatorname{sh}^2 \alpha}} (u - \bar{u}) - \dot{R} \frac{N + \bar{N}}{Eh} a \operatorname{ch}^2 \alpha \left[ \frac{(1-a \operatorname{sh}^2 \alpha)^2}{a^2 \operatorname{ch} \alpha} - 1 \right];$$

w przypadku powierzchni hiperbolicznych

$$(5.15) \quad -2w = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\sqrt{1+a \operatorname{ch}^2 \alpha}}{\operatorname{sh} \alpha} (u|_z + \bar{u}|_{\bar{z}}) + i \frac{\sqrt{a \operatorname{ch} \alpha}}{\sqrt{1+a \operatorname{ch}^2 \alpha}} (u - \bar{u}) + \dot{R} \frac{N + \bar{N}}{Eh} a \operatorname{sh}^2 \alpha \left[ \frac{(1+a \operatorname{ch}^2 \alpha)^2}{a^2 \operatorname{sh}^4 \alpha} - 1 \right];$$

w przypadku powierzchni parabolicznych

$$(5.16) \quad -2w = \frac{2}{\sqrt{b}} e^\alpha \sqrt{1 + \frac{1}{4} b e^{-2\alpha}} (u|_z + \bar{u}|_{\bar{z}}) - \frac{i}{2} \sqrt{b} e^{-\alpha} \frac{u - \bar{u}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} b e^{-2\alpha}}} + \dot{R} \frac{N + \bar{N}}{Eh} \cdot \frac{1}{4} b e^{-2\alpha} \left[ \frac{4}{b^2} e^{4\alpha} \left( 1 + \frac{1}{4} b e^{-2\alpha} \right)^2 - 1 \right].$$



Rys. 2

## 6. Przykład

Z budowy równań (5.10) i (5.14) wynika, że powłoka kulista, dla której  $a = -1$ ,  $c = 1$ ,  $b = 0$ , jest najprostszym przypadkiem wśród badanej przez nas klasy powłok obrotowych. Poniżej obliczymy przemieszczenia tej powłoki wywołane momentem, którego wektor jest styczny do powierzchni powłoki w punkcie  $x' = 0$ ,



$x^2 = \pi/2$  (rys. 2). Przy zastosowaniu współrzędnej zespolonej

$$z = x^2 + ia = x^2 + i \operatorname{arctg} x^1$$

funkcja określająca siły w przekroju poprzecznym powłoki ma postać

$$(6.1) \quad N(z) = \frac{M}{4\pi R^2} \frac{i \cos z}{(1 - \sin z)^2}$$

Uwzględniając zależność

$$N(z) = N_1 + iN_2 = r^2 [N^{(11)} + iN^{(12)}]$$

dla współrzędnych fizycznych tych sił otrzymujemy wzory

$$(6.2) \quad N^{(11)} = -\frac{Mx^1 r^2}{4\pi R^2} \frac{\left(1 + \cos^2 x^2 - \frac{1}{r} \sin x^2\right)}{(1 - r \sin x^2)^3} = -N^{(22)},$$

$$N^{(12)} = \frac{M}{4\pi R^2} r \cos x^2 \frac{(r^2 - x^{1^2} - r \sin x^2)}{(1 - r \sin x^2)^3}$$

Całkując równanie (5.10) dostajemy następującą zależność dla zespolonej funkcji przemieszczenia:

$$(6.3) \quad u = -\frac{(1+\nu)R}{2Eh} \int 2 \cos^2 \frac{z-\bar{z}}{2} \bar{N}(\bar{z}) d\bar{z} + g(z) \quad \text{lub}$$

$$u = \frac{(1+\nu)M}{8\pi REh} \left\{ \int [1 + \cos(z - \bar{z})] \frac{i \cos \bar{z}}{(1 - \sin \bar{z})^2} d\bar{z} + f(z) \right\}.$$

Po wykonaniu całkowania mamy

$$(6.4) \quad u = \frac{(1+\nu)M}{8\pi REh} i \left\{ \frac{1}{1 - \sin \bar{z}} + \sin z \left[ \frac{\sin \bar{z}}{1 - \sin \bar{z}} + \ln(1 - \sin \bar{z}) \right] + \right.$$

$$\left. + 2 \cos z \frac{\cos \bar{z}}{1 - \sin \bar{z}} + (z - \bar{z}) \cos z - i f(z) \right\}.$$

skąd, wydzielając część rzeczywistą i urojoną, otrzymujemy

$$(6.5) \quad u = \frac{(1+\nu)M}{8\pi REh} \left[ \frac{\cos x^2 \operatorname{sh} \alpha (3 \operatorname{ch}^2 \alpha - \sin^2 x^2)}{(\operatorname{ch} \alpha - \sin x^2)^2} - 2\alpha \cos x^2 \operatorname{ch} \alpha - \right.$$

$$\left. - \cos x^2 \operatorname{sh} \alpha \ln(\operatorname{ch} \alpha - \sin x^2) - \sin^2 x^2 \operatorname{ch} \alpha \operatorname{arctg} \frac{\cos x^2 \operatorname{sh} \alpha}{1 - \sin x^2 \operatorname{ch} \alpha} + \right.$$

$$\left. + \operatorname{Re} f(x^2 + ia) \right] + i \frac{(1+\nu)M}{8\pi REh} \left[ \frac{(1 - \sin x^2 \operatorname{ch} \alpha) (3 \operatorname{ch}^2 \alpha - \sin^2 x^2)}{(\operatorname{ch} \alpha - \sin x^2)^2} + \right.$$

$$\left. + 2\alpha \sin x^2 \operatorname{sh} \alpha + \sin x^2 \operatorname{ch} \alpha \ln(\operatorname{ch} \alpha - \sin x^2) - \right.$$

$$\left. - \cos x^2 \operatorname{sh} \alpha \operatorname{arctg} \frac{\cos x^2 \operatorname{sh} \alpha}{1 - \sin x^2 \operatorname{ch} \alpha} + \operatorname{Im} f(x^2 + ia) \right].$$

Funkcja  $f(z)$  odpowiada odkształceniu powłoki bez zmiany pierwszego tensora podstawowego powierzchni środkowej powłoki. Przykładowo może ona być tak dobrana, aby sztywna translacja lub obrót powłoki pozostawiały jako stałe pewne wybrane punkty powłoki.

Powracając do wyjściowego układu współrzędnych i uwzględniając równanie (5.4) otrzymujemy następujące wzory, określające pole przemieszczeń powłoki:

$$(6.6) \quad v^{(1)} = ru_1 = \sqrt{1-x^2} \operatorname{Im} u,$$

$$v^{(1)} = \frac{(1+\nu)M}{8\pi REh} \left[ \frac{(\sqrt{1-x^2} - \sin x^2) \{3 - (1-x^2) \sin^2 x^2\}}{(1 - \sqrt{1-x^2} \sin x^2)^2} + \right.$$

$$+ 2x^1 \sin x^2 \operatorname{arctg} x^1 + \sin x^2 \ln \frac{1 - \sqrt{1-x^2} \sin x^2}{\sqrt{1-x^2}} -$$

$$\left. - x^1 \cos x^2 \operatorname{arctg} \frac{x^1 \cos x^2}{\sqrt{1-x^2} - \sin x^2} + \sqrt{1-x^2} \operatorname{Im} f(x^2 + i \operatorname{arctg} x^1) \right];$$

$$(6.7) \quad v^{(2)} = ru_2 = \sqrt{1-x^2} \operatorname{Re} u,$$

$$v^{(2)} = \frac{(1+\nu)M}{8\pi REh} \left[ \frac{x^1 \cos x^2 \{3 - (1-x^2) \sin^2 x^2\}}{(1 - \sqrt{1-x^2} \sin x^2)^2} - \right.$$

$$- 2 \cos x^2 \operatorname{arctg} x^1 - x^1 \cos x^2 \ln \frac{1 - \sqrt{1-x^2} \sin x^2}{\sqrt{1-x^2}} -$$

$$\left. - \sin x^2 \operatorname{arctg} \frac{x^1 \cos x^2}{\sqrt{1-x^2} - \sin x^2} + \sqrt{1-x^2} \operatorname{Re} f(x^2 + i \operatorname{arctg} x^1) \right].$$

Wreszcie równanie (5.14) w postaci

$$(6.8) \quad -2w = u|_z + \bar{u}|_{\bar{z}} + i(u - \bar{u}) \operatorname{th} \alpha$$

służy do określenia przemieszczenia  $w$ . Wstawiając do powyższego równania związki (6.4) dla przemieszczenia  $u$  otrzymujemy

$$(6.9) \quad w = \frac{(1+\nu)M}{8\pi REh} \left[ \frac{x^1 \sqrt{1-x^2} \sin x^2}{1 - \sqrt{1-x^2} \sin x^2} - \frac{x^1}{\sqrt{1-x^2}} \sin x^2 - \right.$$

$$- 2 \sqrt{1-x^2} \sin x^2 \operatorname{arctg} x^1 + \sqrt{1-x^2} \cos x^2 \operatorname{arctg} \frac{x^1 \cos x^2}{\sqrt{1-x^2} - \sin x^2} -$$

$$\left. - \operatorname{Re} f'(x^2 + i \operatorname{arctg} x^1) + x^1 \operatorname{Im} f(x^2 + i \operatorname{arctg} x^1) \right].$$

## Резюме

БЕЗМОМЕНТНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ СОСТОЯНИЯ  
ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ  
С ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНОЙ ГАУСА

Развивая предложенный В. С. Власовым метод сведения сил сечений в безмоментной теории оболочек вращения второй степени с добавочной кривизной, к аналитическим функциям комплексной переменной в работе получены аналогичные результаты для составляющих вектора перемещения в таких оболочках. Соответствующее дифференциальное уравнение решается, в таком случае, в квадратурах.

Метод решения иллюстрирует пример сферической оболочки, нагруженной моментом с вектором касательным к оболочке.

## Summary

A MEMBRANE STATE OF DEFORMATIONS IN THE SECOND ORDER ROTATING  
SURFACES OF A GAUSS POSITIVE CURVATURE

When following the idea prior to Wlasow to describe the membrane forces of second order surfaces with positive Gaussian curvature as a function of a complex variable using an appropriate transformation of coordinates, the authors succeeded to get on an analogue way the coordinates of the displacement vector. The solution of the corresponding differential equation is possible by simple integration. The special example of a spherical shell loaded by an external couple serves to illustrate the general way.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 23 lipca 1968 r.*