

OPTYMALNE KSZTAŁTOWANIE KRATOWNIC PRZY UWZGLĘDNIENIU  
WARUNKÓW STATECZNOŚCI

RENATA WOJDANOWSKA-ZAJĄC i MICHAŁ ŻYCZKOWSKI (KRAKÓW)

## 1. Uwagi wstępne

Zaproponowana przez W. KRZYSIA i M. ŻYCZKOWSKIEGO [21] klasyfikacja problemów kształtowania wytrzymałościowego wymienia (w sposób ogólny) pięć typowych wielkości, które można wyznaczać: wymiar przekroju, kształt przekroju, kształt osi lub powierzchni środkowej, kształt brzegu i sposób podparcia. W przypadku układów kratowych możemy mieć do czynienia w pewnym stopniu ze wszystkimi wymienionymi zagadnieniami. Podstawowym problemem jest wyznaczanie wielkości przekrojów  $F_i$  poszczególnych prętów; z reguły przyjmuje się  $F_i = \text{const}$  na długości pręta, choć w przypadku ściskania, a więc narażenia na wyboczenie, zastosowanie prętów niepryzmatycznych mogłoby spowodować dodatkowe (zazwyczaj niewielkie) oszczędności na materiale i ciężarze konstrukcji. Kształt przekroju w przypadku rozciągania nie ma znaczenia, może natomiast być istotny przy wyboczeniu a także, przy ewentualnym dodatkowym wpływie zginania (przy obciążeniu na długości pręta). Dobieranie kształtu osi można tu rozumieć jako ustalanie konfiguracji kratownicy, a więc kierunku i długości prętów, gdy ograniczymy się, jak zazwyczaj, jedynie do prętów prostych. Problem kształtu brzegu redukuje się jedynie do ewentualnego ustalania optymalnych wymiarów gabarytowych kratownicy. W pewnych przypadkach może również występować zagadnienie optymalnego rozmieszczenia podpór.

Przegląd ważniejszych prac dotyczących optymalnego kształtowania kratownic, a opublikowanych do roku 1962, podaje praca Z. WASIUTYŃSKIEGO i A. BRANDTA [47], natomiast opublikowanych głównie w latach 1960–1964 — praca M. I. REJTMANA i G. S. SZAPIRO [35], a w latach 1962–1968 — C. Y. SHEUA i W. PRAGERA [38]. Autorzy stwierdzają, że problem kształtowania kratownic statycznie wyznaczalnych o danej konfiguracji jest trywialny, bowiem wielkość powierzchni przekrojów należy wtedy dobrać wprost z warunków wytrzymałościowych. Natomiast kratownica statycznie niewyznaczalna, przy ustalonym obciążeniu i ograniczeniu jedynie warunkami wytrzymałościowymi, nie może być kratownicą optymalną; optymalizacja polega tu na najdogodniejszym przyjęciu zerowych przekrojów prętów nadliczbowych. Twierdzenie takie wykazał jeszcze w ubiegłym stuleciu M. LEVY; metody optymalnego usuwania zbędnych prętów omawiają I. M. RABINOWICZ [28], Ju. A.

RADCIG [29 i 31], A. I. WINOGRADOW [48 i 49], F. I. SLUSARCZUK [42 i 43], N. A. SIEROW [39 i 40], N. S. WOLKOWA, JU. A. RADCIG, N. CH. CHASANSZIN [50] oraz T. S. KIM [12]. Podobne zagadnienia w oparciu o równoważne tu kryterium minimum potencjału rozważali Z. WASIUTYNSKI [46], A. BRANDT, J. KOSMOWSKI i Z. WASIUTYNSKI [4], J. KOSMOWSKI [19], J. GRYZC [10] oraz A. BIERNAWSKI i B. GROCHOWSKI [2].

W ostatnich latach daje się zauważyć silny rozwój prac poświęconych optymalnemu kształtowaniu kratownic przy nieco ogólniejszych założeniach. Przypadek obciążeń złożonych lub obciążeń ruchomych badali N. A. SIEROW [41], K. M. CHUBERIAN [6], A. I. KORSZUNOW i N. A. KOKORIN [18], D. A. MACJULAWICZIUS [25] oraz A. I. BOGATYRIEW [3]. Optymalnym wstępnym sprzężeniem kratownicy wewnętrznie statycznie niewyznaczalnej zajmowali się E. M. WASILIEWA [45] oraz I. A. FIEDOROW [8]. Dodatkowe warunki sztywności kratownicy uwzględniali L. I. KORSZUN [16], A. R. TOAKLEY [44] i G. G. POPE [27]. Optymalnej konfiguracji kratownicy poświęcone są prace D. A. MACJULAWICZIUSA [24], A. G. DOILNICZYNA [7] i A. I. KORSZUNOWA [17].

Oddzielnie wyodrębnimy szczególnie interesujące nas problemy uwzględniania stateczności prętów ściskanych. Pierwsze prace z tego zakresu opublikował L. KIRSTE [14 i 15], który rozwiązał kilka prostych kratownic na podstawie wzorów Eulera i Johnsona-Ostenfelda. Autorami dalszych prac są M. ACHMADALIEW [1] (numeryczne metody obliczeń), I. A. FIEDOROW [8] (uwzględnienie wstępnego sprzężenia), JU. A. RADCIG i A. SZ. ARSLANOW [33], A. N. RAJEWSKI [34] oraz L. A. SCHMIT Jr. i W. M. MORROW [36].

Ustroje kratowe stwarzają duże możliwości optymalnego wykorzystania materiału, gdyż nie istnieją tu «warstwy obojętne», występujące w przypadku zginania lub skręcania. Jednakże pręty ściskane mogą utracić stateczność i odpowiedni warunek ograniczający powinien być uwzględniony przy projektowaniu. Prócz tego kratownica może utracić stateczność jako całość, bez wyoboczenia poszczególnych prętów. Ogólną teorię takiej utraty stateczności podał R. MISES [26], a prosty przykład wyoboczenia płaskiego tego typu omówiono np. w monografii G. BÜRGERMEISTERA i H. STEUPA [5]; zjawisko takie może wystąpić z reguły jedynie przy niewielkich kątach między osiami schodzących się prętów; jest ono raczej rzadko spotykane i nie będziemy się nim zajmowali. Nie uwzględnimy również możliwości wyoboczenia przestrzennego rozpatrywanych krat; problemem tym zajmowali się ostatnio H. SCHOOP i D. HILLIGES [37].

Sformułowanie zagadnienia jest w obecnej pracy zbliżone do ujęcia L. KIRSTEGO [14 i 15]. Nie będziemy więc ustalali konfiguracji kratownicy, lecz będziemy poszukiwali konfiguracji optymalnej. Jednakże zbadamy więcej układów kratowych niż uczynił to KIRSTE, a ponadto w zakresie sprężysto-plastycznym określimy siłę krytyczną wzorem A. YLINENA [51 i 52], obejmującym cały zakres smukłości prętów i prowadzącym w konsekwencji do ujęcia bardziej jednolitego niż wzory Johnsona-Ostenfelda i Eulera. Pewne problemy optymalnego kształtowania płyt kołowych ze względu na ich stateczność w zakresie sprężysto-plastycznym analizowali w oparciu o wzór Ylinena A. GAJEWSKI i M. ŻYCZKOWSKI [9]. Prócz tego podamy przykład

kształtowania w zakresie sprężystym przy jednoczesnym warunku stateczności i ograniczeniu naprężeń; zastosujemy tu metodę transformacji linearyzującej warunki poboczne, zaproponowaną przez W. KRZYSIA i M. ŻYCZKOWSKIEGO w pracy [22].

## 2. Kształtowanie w zakresie sprężystym

Weźmy pod uwagę jeden z najprostszych możliwych ustrojów kratowych, przedstawiony na rys. 1. Rozstęp podpór  $2a$  przyjmijmy za ustalony, natomiast będziemy poszukiwali optymalnego kąta  $\varphi$  i odpowiedniego pola przekroju prętów  $F$ . Siła podłużna w prętach jest co do wartości bezwzględnej równa

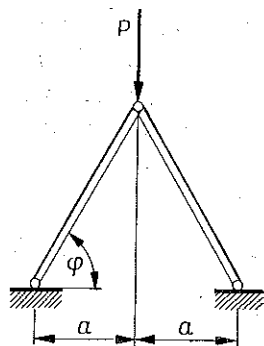
$$(2.1) \quad |N| = \frac{P}{2 \sin \varphi},$$

zatem, stawiając jedynie warunek stateczności prętów w zakresie sprężystym i warunek ograniczonych naprężeń ściskających, otrzymujemy

$$(2.2) \quad \frac{P}{2 \sin \varphi} \leq \frac{\pi^2 EJ}{jl^2}$$

oraz

$$(2.3) \quad \frac{P}{2F \sin \varphi} \leq k_c,$$



Rys. 1

gdzie  $j$  oznacza stopień bezpieczeństwa ze względu na wyboczenie,  $k_c$  naprężenie dopuszczalne na ściskanie,  $l = a/\cos \varphi$  długość prętów oraz  $J$  najmniejszy moment bezwładności przekroju prętów. Będziemy minimalizowali objętość  $V$  kratownicy (a zatem i jej ciężar),

$$(2.4) \quad V = 2Fl = \frac{2Fa}{\cos \varphi},$$

przy warunkach pobocznych w formie nierówności słabych (2.2) i (2.3). Jest to problem parametrycznego kształtowania wytrzymałościowego, czyli z punktu widzenia matematycznego problem nieliniowego programowania: poszukiwanie kresu dolnego funkcji celu  $V = V(F, \varphi)$  w obszarze domkniętym, wyznaczonym nierównościami słabymi (2.2) i (2.3) (oraz ewentualnie innymi oczywistymi ograniczeniami, jak  $F > 0$ ,  $0 < \varphi < \pi/2$ , itp.). Zastosujemy tu metodę transformacji linearyzującej warunki poboczne, zaproponowaną przez W. KRZYSIA i M. ŻYCZKOWSKIEGO w pracy [22]. Wprowadzimy mianowicie nowe zmienne (parametry)  $x_i$ , określone jako stosunki lewych stron nierówności (2.2) i (2.3) do prawych stron tych nierówności:

$$(2.5) \quad x_1 = \frac{Pj \xi a^2}{2\pi^2 EF^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi}$$

oraz

$$(2.6) \quad x_2 = \frac{P}{2Fk_c \sin \varphi},$$

gdzie wprowadzono ponadto bezwymiarowy współczynnik kształtu przekroju  $\xi$  wzorem

$$(2.7) \quad \xi = \frac{F^2}{J}.$$

Współczynnik  $\xi$  będziemy uważali za dany i doбором kształtu przekroju nie będziemy się zajmowali; problem ten był badany w pracy J. B. KELLERA [11] (przekroje zwarte) oraz pracach L. KIRSTEGO [13, 14 i 15] i W. KRZYSIA [20] (przekroje cienkościenne). Odwracając zależności (2.5) i (2.6) do postaci  $F = F(x_1, x_2)$  i  $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$  i podstawiając tak otrzymane związki do funkcji celu (2.4), otrzymujemy do minimalizacji funkcję  $V = V(x_1, x_2)$  przy bardzo prostych warunkach pobocznych  $x_1 \leq 1$ ,  $x_2 \leq 1$ , co ułatwia analizę. Odwrócenie zależności (2.5) i (2.6) prowadzi mianowicie najpierw do równania trygonometrycznego

$$(2.8) \quad \sin \varphi = \frac{\pi^2 EP x_2}{2a^2 j k_c^2 \xi x_1^2} \cos^2 \varphi,$$

skąd ostatecznie znajdziemy

$$(2.9) \quad \cos \varphi = \frac{1}{B\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1+4B^2} - 1}$$

oraz

$$(2.10) \quad F = \frac{BP}{x_1 k_c (\sqrt{1+4B^2} - 1)},$$

gdzie dla skrócenia zapisu przez  $B = B(x_1, x_2)$  oznaczono współczynnik występujący w równaniu (2.8):

$$(2.11) \quad B(x_1, x_2) = \frac{\pi^2 EP x_2}{2a^2 j k_c^2 \xi x_1^2}.$$

Po podstawieniu (2.9) i (2.10) do (2.4) przedstawiamy funkcję celu w postaci

$$(2.12) \quad V = V(x_1, x_2) = \frac{2\sqrt{2} a B^2 P}{k_c x_1} (\sqrt{1+4B^2} - 1)^{-3/2},$$

a po podstawieniu (2.11) i uwolnieniu od niewymierności w mianowniku w postaci

$$(2.13) \quad V = \frac{\sqrt{2} a^3 j k_c \xi}{2 \pi^2 E} \left( x_1^{2/3} x_2^{-2/3} + \sqrt{x_1^{4/3} x_2^{-4/3} + \frac{\pi^4 E^2 P^2}{a^4 j^2 k_c^4 \xi^2} x_1^{-8/3} x_2^{2/3}} \right)^{3/2}.$$

Wygodniejszą do badania funkcję otrzymujemy wprowadzając oznaczenia  $x_1^{2/3} = y_1$ ,  $x_2^{2/3} = y_2$ ; oczywiście warunki poboczne mają tu w dalszym ciągu postać liniową  $y_1 \leq 1$  i  $y_2 \leq 1$ . Wzór (2.13) przepiszemy teraz w postaci

$$(2.14) \quad V = \frac{\sqrt{2} a^3 j k_c \xi}{2 \pi^2 E} \left( y_1 y_2^{-1} + \sqrt{y_1^2 y_2^{-2} + \frac{\pi^4 E^2 P^2}{a^4 j^2 k_c^4 \xi^2} y_1^{-4} y_2} \right)^{3/2}.$$

Wystarczy oczywiście badać funkcję

$$(2.15) \quad f(y_1, y_2) = y_1 y_2^{-1} + \sqrt{y_1^2 y_2^{-2} + \beta^{-2} y_1^{-4} y_2},$$

gdzie  $\beta$  oznacza stały współczynnik, określony wzorem

$$(2.16) \quad \beta = \frac{a^2 j k_e^2 \xi}{\pi^2 EP},$$

a więc zbliżony do «cechy Ylinena» [51 i 52]. Parametr  $\beta$  określa w pewnym stopniu smukłość konstrukcji.

Pochodne cząstkowe funkcji  $f(y_1, y_2)$  wynoszą

$$(2.17) \quad \frac{\partial f}{\partial y_1} = y_2^{-1} + \frac{y_1 y_2^{-2} - 2\beta^{-2} y_1^{-5} y_2}{\sqrt{y_1^2 y_2^{-2} + \beta^{-2} y_1^{-4} y_2}}$$

oraz

$$(2.18) \quad \frac{\partial f}{\partial y_2} = -y_1 y_2^{-2} + \frac{-y_1^2 y_2^{-3} + \frac{1}{2} \beta^{-2} y_1^{-4}}{\sqrt{y_1^2 y_2^{-2} + \beta^{-2} y_1^{-4} y_2}}.$$

Przyrównanie do zera obu tych pochodnych jednocześnie prowadzi, jak łatwo sprawdzić, do sprzeczności, zatem minimum lokalne wewnątrz rozważanego obszaru nie istnieje i co najmniej jeden z parametrów  $y_1$  lub  $y_2$  musi być równy jedności, co odpowiada spełnieniu co najmniej jednego z warunków (2.2) i (2.3) w formie równości. Wniosek ten jest zresztą całkowicie zgodny z przewidywaniami, gdyż trudno byłoby przypuścić, aby dla konstrukcji optymalnej nie wykorzystany był w pełni ani warunek stateczności, ani warunek wytrzymałościowy.

Rozważymy więc po kolei przypadki  $y_1 = 1$  i  $y_2 = 1$ . Przyjmując  $y_1 = 1$  określamy optymalną wartość  $y_2$  z warunku  $\partial f / \partial y_2 = 0$ ; otrzymujemy w ten sposób

$$(2.19) \quad y_2 = 2\beta^{2/3},$$

zatem

$$(2.20) \quad x_2 = 2\sqrt{2} \beta = \frac{2\sqrt{2} a^2 j k_e^2 \xi}{\pi^2 EP}$$

oraz  $B(x_1, x_2) = \sqrt{2}$ ,  $\cos \varphi = 1/\sqrt{2}$ ,  $\varphi = 45^\circ$  i wreszcie

$$(2.21) \quad F = \frac{\sqrt{2} P}{2k_e}.$$

Z warunku  $x_2 \leq 1$  otrzymujemy ponadto  $\beta \leq 1/2\sqrt{2}$ , czyli  $\beta \leq 0,3536$ ; w tym zakresie najmniejszych smukłości optymalny kąt  $\varphi$  wynika jedynie z uwzględnienia warunku wytrzymałościowego.

Przyjmując  $y_2 = 1$  otrzymujemy z warunku  $\partial f / \partial y_1 = 0$

$$(2.22) \quad y_1 = \left(\frac{4}{5}\right)^{1/6} \beta^{-1/3},$$

a zatem

$$(2.23) \quad x_1 = \left(\frac{4}{5}\right)^{1/4} \beta^{-1/2} = \left(\frac{4}{5}\right)^{1/4} \frac{\pi \sqrt{EP}}{ak_e \sqrt{j\xi}}$$

oraz  $B(x_1, x_2) = \sqrt{5}/4$ ,  $\cos \varphi = 2/\sqrt{5}$ ,  $\varphi = 26^\circ 33' 54''$  i wreszcie

$$(2.24) \quad F = \frac{5^{3/4}}{2^{3/2}} \frac{P \sqrt{\beta}}{k_e} = \frac{5^{3/4}}{2^{3/2}} \frac{a \sqrt{Pj\xi}}{\pi \sqrt{E}}$$

Ograniczenie obszaru zmienności wynika tu z warunku  $x_1 \leq 1$ , skąd  $\beta \geq 2/\sqrt{5}$ , czyli  $\beta \geq 0,8944$ . W tym zakresie największych smukłości optymalny kąt  $\varphi$  wynika jedynie z uwzględnienia warunku stateczności prętów.

W przedziale średnich smukłości  $0,3536 \leq \beta \leq 0,8944$  obie pochodne cząstkowe (2.17) i (2.18) są w rozważanym obszarze ujemne i należy przyjąć  $y_1 = y_2 = 1$ , czyli  $x_1 = x_2 = 1$ . Wtedy  $B(x_1, x_2) = 1/2\beta$ , a optymalny kąt  $\varphi$  i przekrój prętów  $F$  określone są wzorami

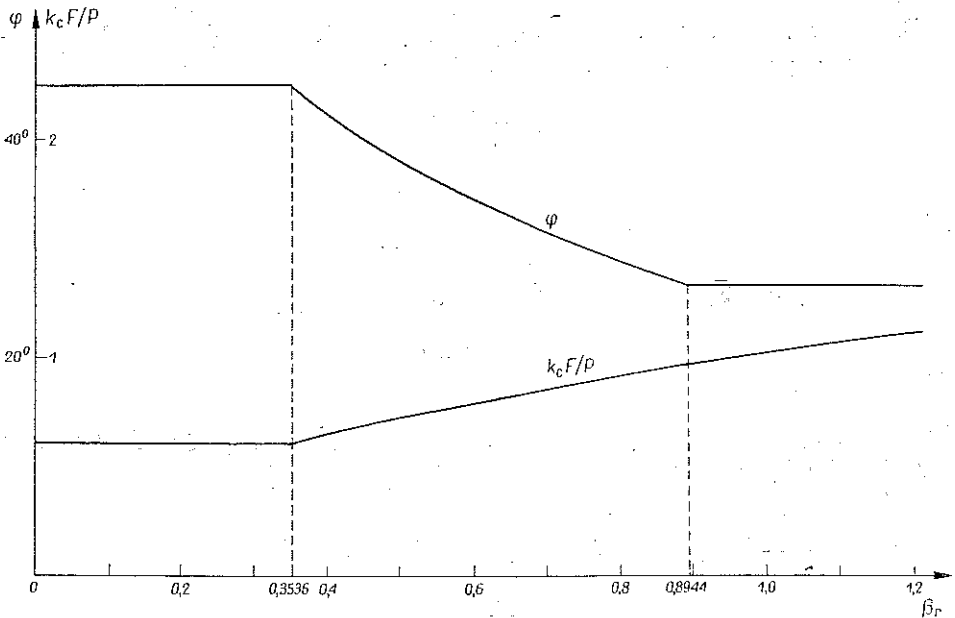
$$(2.25) \quad \cos \varphi = \sqrt{2\beta(\sqrt{\beta^2+1} - \beta)}$$

oraz

$$(2.26) \quad F = \frac{P}{2k_e(\sqrt{\beta^2+1} - \beta)}$$

W tym obszarze wykorzystany jest w pełni zarówno warunek wytrzymałościowy, jak i warunek stateczności prętów.

Wyniki obliczeń przedstawione są na rys. 2.



Rys. 2

### 3. Kształtowanie kratownic statycznie wyznaczalnych przy uwzględnieniu wyboczenia sprężysto-plastycznego

3.1. Rozpocznijmy od analizy kratownicy, omówionej w p. 2. Warunek stateczności prętów wyrazimy teraz wzorem

$$(3.1) \quad \frac{P}{2 \sin \varphi} \leq \frac{\pi^2 E^* J}{j l^2},$$

w którym za moduł wyboczenia sprężysto-plastycznego  $E^*$  podstawimy według A. YLINENA [51 i 52] wyrażenie

$$(3.2) \quad E^* = E \frac{Q - \sigma}{Q - c\sigma}.$$

We wzorze tym  $\sigma = \sigma_K = |N|/F$  oznacza krytyczne naprężenie ściskające w prętach,  $Q$  granicę plastyczności materiału przy czystym ściskaniu,  $c$  pewną bezwymiarową stałą materiałową; tablicę wartości tych stałych podają wspomniane prace A. YLINENA. Warunek (3.1) zastępuje w pewnym sensie oba poprzednio stosowane warunki (2.2) i (2.3); można powiedzieć, że stanowi ich uogólnienie, bowiem przy przejściu granicznym  $c \rightarrow 1$  i formalnym podstawieniu  $Q = jk$  warunek (3.1) rozpada się właśnie na (2.2) i (2.3). Ponieważ w poprzednim punkcie wykazaliśmy, że jeden z warunków (2.2) lub (2.3) jest w każdym razie w przypadku kratownicy optymalnej spełniony w formie równości, więc obecnie uzasadnione będzie przyjęcie, że warunek (3.1) musi przyjąć formę równości. Po podstawieniu (2.1), (2.7) i (3.2) i prostych przekształceniach otrzymujemy związek

$$(3.3) \quad f(F, \varphi) = (2QF \sin \varphi - cPj) \frac{Pj \xi a^2}{2\pi^2 E} - (2QF \sin \varphi - Pj) F^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi = 0.$$

Ze związku tego należałoby wyznaczyć funkcję  $\varphi = \varphi(F)$  lub  $F = F(\varphi)$ , wstawić do (2.4) i badać objętość  $V$  jako funkcję jednej zmiennej,  $F$  lub  $\varphi$ . Z uwagi na trudności w efektywnym określeniu wspomnianych funkcji (równanie trzeciego stopnia ze względu na  $F$  lub czwartego stopnia ze względu na  $\sin \varphi$ ) zastosujemy wzory na pochodne funkcji złożonej i funkcji uwikłanej pisząc warunek ekstremum  $V$  w postaci

$$(3.4) \quad \frac{\partial V}{\partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial F} \frac{dF}{d\varphi} = 0,$$

a wobec

$$(3.5) \quad \frac{dF}{d\varphi} = - \frac{\partial f / \partial \varphi}{\partial f / \partial F}$$

otrzymujemy ostatecznie

$$(3.6) \quad \frac{\partial V}{\partial \varphi} \frac{\partial f}{\partial F} = \frac{\partial V}{\partial F} \frac{\partial f}{\partial \varphi}.$$

Podstawienie odpowiednich pochodnych cząstkowych prowadzi do związku

$$(3.7) \quad \frac{Pj \xi a^2}{\pi^2 EF^2} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + \sin \varphi \cos^2 \varphi (10 \sin^2 \varphi - 4 \cos^2 \varphi) + \\ + \frac{Pj}{QF} \cos^2 \varphi (\cos^2 \varphi - 4 \sin^2 \varphi) = 0.$$

Równanie to daje się rozwiązać ze względu na pole powierzchni przekroju  $F$ ; podstawienie do (3.3) doprowadzi wtedy do równania o jednej niewiadomej  $\varphi$ . Zamiast niewiadomego pola powierzchni  $F$  wprowadzimy nową bezwymiarową niewiadomą  $s$ , równą stosunkowi naprężenia krytycznego w pręcie do granicy plastyczności

$$(3.8) \quad s = \frac{\sigma_k}{Q} \frac{Pj}{2QF \sin \varphi}.$$

Rugując z równań (3.3) i (3.7) parametr  $Pj \xi a^2 / \pi^2 E$  określamy najpierw niewiadomą  $s$  wzorem

$$(3.9) \quad s = \frac{1}{2c(1 - 5\sin^2 \varphi)} \left\{ \sqrt{(1 - c)[9\sin^4 \varphi - (7\sin^2 \varphi - 2)^2 c]} - \right. \\ \left. - (7\sin^2 \varphi - 2)c - 3\sin^2 \varphi \right\},$$

a podstawienie (3.9) do (3.3) prowadzi do następującego związku, określającego funkcję odwrotną względem poszukiwanej:

$$(3.10) \quad \Lambda = \frac{1}{4} (1 - \sin^2 \varphi) (1 - 2\sin^2 \varphi) (1 - 5\sin^2 \varphi)^{-2} \sin^{-1} \varphi \times \\ \times \left( \{(1 - c)[9\sin^4 \varphi - (7\sin^2 \varphi - 2)^2 c]\}^{1/2} + (7\sin^2 \varphi - 2)c + 3\sin^2 \varphi \right)^2 \times \\ \times \left( \{(1 - c)[9\sin^4 \varphi - (7\sin^2 \varphi - 2)^2 c]\}^{1/2} - (7\sin^2 \varphi - 2)c + 3\sin^2 \varphi \right)^{-1},$$

gdzie parametr  $\Lambda$  określa w pewnym stopniu smukłość kratownicy i jest zdefiniowany wzorem zbliżonym do (2.16):

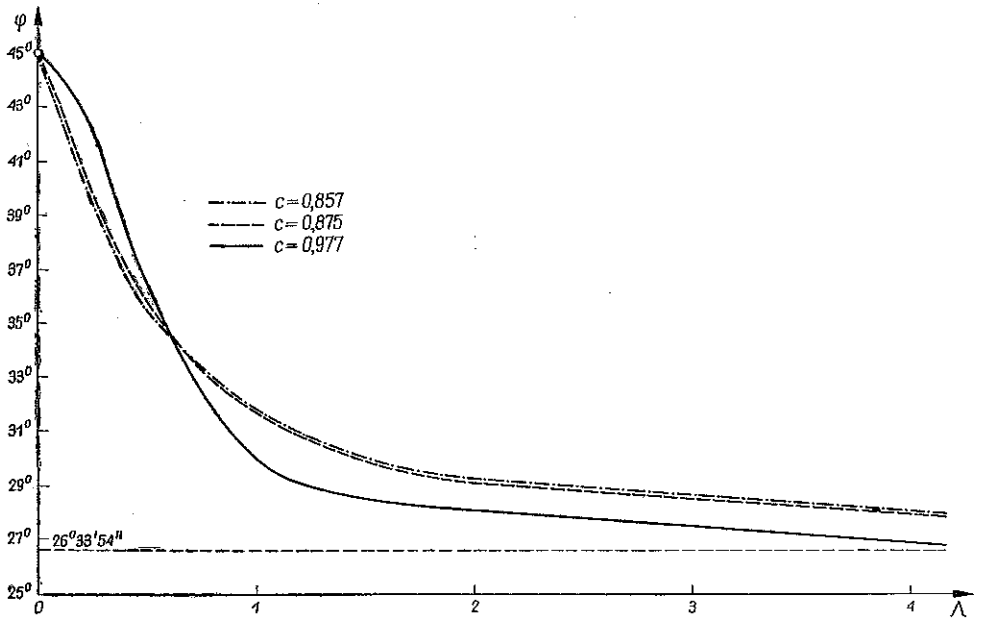
$$(3.11) \quad \Lambda = \frac{a^2 Q^2 \xi}{\pi^2 EPj}.$$

Opierając się na wzorze (3.10) sporządzono wykres funkcji odwrotnej  $\varphi = \varphi(\Lambda)$ , określającej poszukiwany kąt optymalny  $\varphi$  (rys. 3), a w oparciu o wzór (3.9) — wykres funkcji  $s = s(\varphi)$ , dającej orientację co do optymalnego naprężenia krytycznego w prętach (rys. 4). Wartości stałej materiałowej  $c$  przyjęto przy tym według YLINENA kolejno:  $c = 0,857$  (stop magnezu elektron),  $c = 0,875$  (sośnina fińska) oraz  $c = 0,977$  (stal węglowa St 37 i St 52).

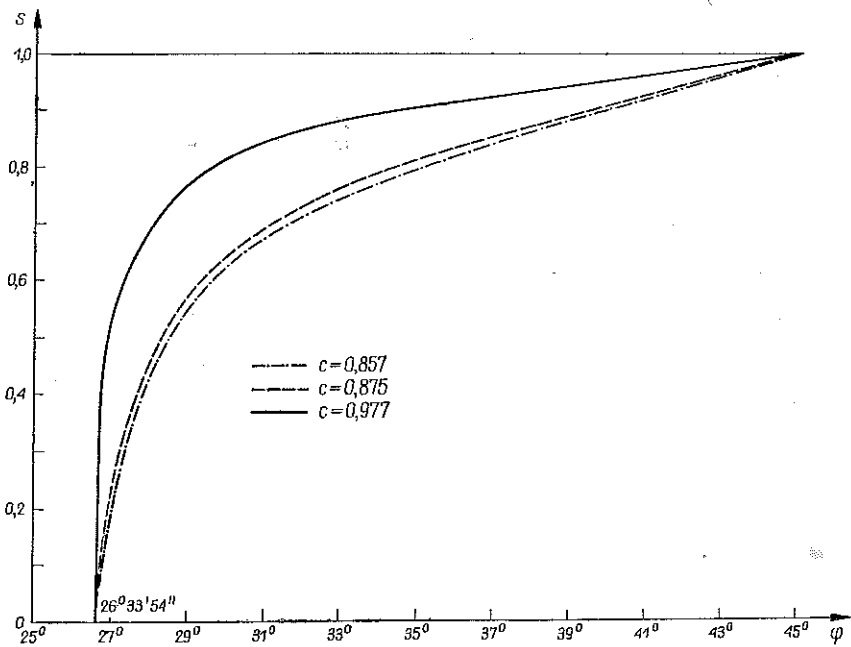
**3.2.** Rozpatrzmy obecnie podstawowy układ kratowy zamknięty, trójprętowy symetryczny, przedstawiony na rys. 5. Odległość  $a$  podobnie jak poprzednio przyjmiemy za ustaloną. Objętość kratownicy określi tu wzór

$$(3.12) \quad V = 2F_1 l + 2F_2 a,$$





Rys. 3



Rys. 4

gdzie  $l = a/\cos \varphi$ . Siły podłużne w prętach są równe

$$(3.13) \quad N_1 = -\frac{P}{2 \sin \varphi}, \quad N_2 = \frac{P}{2} \operatorname{ctg} \varphi.$$

Uzasadnione będzie tu pełne wykorzystanie materiału prętów, oznaczonych wskaźnikiem 1 z uwagi na wyboczenie sprężysto-plastyczne, a pręta 2 — na rozciąganie. Warunki poboczne dla funkcji celu (3.12) napiszemy więc w postaci równości

$$(3.14) \quad |N_1| = \frac{\pi^2 E^* F_1^2}{\xi j l^2}, \quad N_2 = k_r F_2,$$

gdzie  $E^*$  jest określone wzorem Ylinena (3.2), natomiast  $k_r$  oznacza naprężenie dopuszczalne na rozciąganie. W przypadku granicznym  $Q \rightarrow \infty$  otrzymujemy ze wzoru (3.2)  $E^* = E$ , wzór (3.14) przechodzi we wzór Eulera i najpierw rozpatrzmy ten prostszy przypadek (wyboczenie sprężyste prętów ściskanych bez ograniczenia wartości naprężeń ściskających). Mamy po podstawieniu (3.13) do (3.14) i rozwiązaniu tych równań ze względu na  $F_1$  i  $F_2$ :

$$(3.15) \quad F_1 = \frac{a}{\pi \sqrt{2}} \sqrt{\frac{P j \xi}{E \sin \varphi \cos^2 \varphi}},$$

$$F_2 = \frac{P}{2 k_r} \operatorname{ctg} \varphi,$$

zatem po podstawieniu do (3.12)

$$(3.16) \quad V = V(\varphi) = \frac{a^2 \sqrt{2}}{\pi} \sqrt{\frac{P j \xi}{E}} \sin^{-1/2} \varphi \cos^{-2} \varphi + \frac{P a}{k_r} \operatorname{ctg} \varphi.$$

Warunek  $dV/d\varphi = 0$  prowadzi do związku

$$(3.17) \quad \frac{a^2 \sqrt{2}}{\pi} \sqrt{\frac{P j \xi}{E}} \left( 2 \sin^{1/2} \varphi \cos^{-3} \varphi - \frac{1}{2} \sin^{-3/2} \varphi \cos^{-1} \varphi \right) - \frac{P a}{k_r} \sin^{-2} \varphi = 0,$$

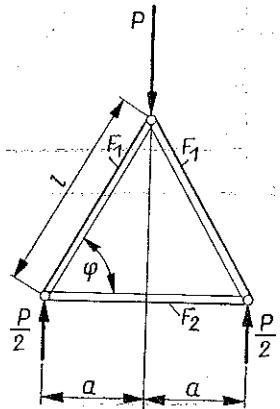
z którego można otrzymać pełne równanie szóstego stopnia względem  $\sin \varphi$ ; wprowadzając jednak parametr  $\beta_r$  podobnym do (2.16) wzorem

$$(3.18) \quad \beta_r = \frac{a^2 j k_r^2 \xi}{\pi^2 E P},$$

określmy funkcję odwrotną względem poszukiwanej następująco:

$$(3.19) \quad \beta_r = \frac{2 \cos^6 \varphi}{\sin \varphi (5 \sin^2 \varphi - 1)^2}.$$

Otrzymanie stąd wykresu funkcji  $\varphi = \varphi(\beta_r)$  nie przedstawia trudności (podamy go łącznie z wykresem dla wyboczenia sprężysto-plastycznego). W każdym razie



Rys. 5

widać, że mamy tu  $\varphi = 90^\circ$  dla  $\beta_r = 0$  (bardzo mała smukłość kratownicy lub małe naprężenia dopuszczalne na rozciąganie) oraz  $\varphi = 26^\circ 33' 54''$  dla  $\beta_r \rightarrow \infty$  (kratownica o bardzo dużej smukłości).

W przypadku ogólnym skończonej wartości granicy plastyczności  $Q$  przebieg obliczeń jest nieco trudniejszy. Pole powierzchni przekroju  $F_2$  pozostaje określone drugim ze wzorów (3.15), natomiast warunek stateczności po podstawieniu wzoru Ylinena (3.2) prowadzi do równania trzeciego stopnia względem  $F_1$ . Jest to równanie (3.3), w którym zamiast  $F$  należy podstawić  $F_1$ .

Będziemy więc poszukiwali minimum objętości kratownicy  $V$ ,

$$(3.20) \quad V = V(F_1, \varphi) = \frac{2F_1 a}{\cos \varphi} + \frac{Pa}{k_r} \operatorname{ctg} \varphi,$$

z warunkiem pobocznym (3.3). Warunek minimum (3.6) prowadzi tu do związku, który zapiszemy następująco:

$$(3.21) \quad \frac{s(1-s)}{1-cs} \frac{Q}{jk_r} - s(3-2s) \frac{Q}{jk_r} + \frac{1-s}{1-cs} - \frac{1-s}{1-cs} \operatorname{tg}^2 \varphi + \\ + (3-2s) \operatorname{tg}^2 \varphi + 2(\operatorname{tg}^2 \varphi - 1) + s(1-2\operatorname{tg}^2 \varphi) = 0;$$

przez  $s$  oznaczono tu stosunek  $\sigma_{1k}/Q$ , określony wzorem (3.8), w którym zamiast  $F$  występuje obecnie  $F_1$ . Wprowadzenie wielkości  $s$  o prostej interpretacji fizycznej pozwala na sparametryzowanie równań (3.3) i (3.21), z równania (3.21) obliczamy mianowicie  $\operatorname{tg} \varphi$

$$(3.22) \quad \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{\frac{Q}{jk_r} s(2-s-3cs+2cs^2) + (1-2cs+cs^2)}{4-3s-5cs+4cs^2}},$$

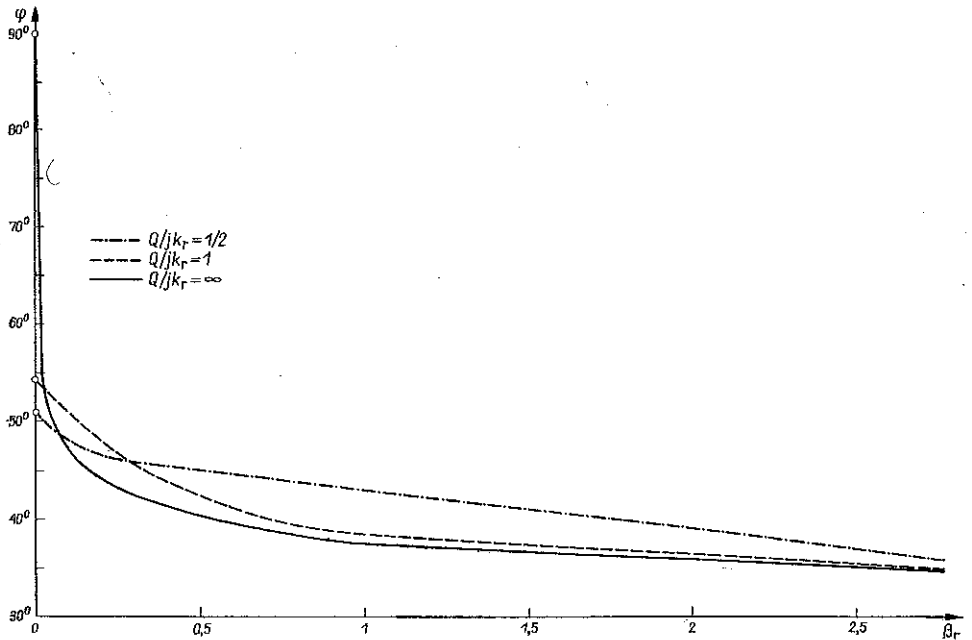
a z równania (3.3) określamy odpowiednią «smukłość» kratownicy wzorem

$$(3.23) \quad \Lambda = \frac{1}{2} (1-s) (4-3s-5cs+4cs^2) s^{-2} (1-cs)^{-1} \left[ \frac{Q}{jk_r} s(2-s-3cs+2cs^2) + \right. \\ \left. + (1-2cs+cs^2) \right]^{-1/2} \left[ \frac{Q}{jk_r} s(2-s-3cs+2cs^2) + (5-3s-7cs+5cs^2) \right]^{-1/2},$$

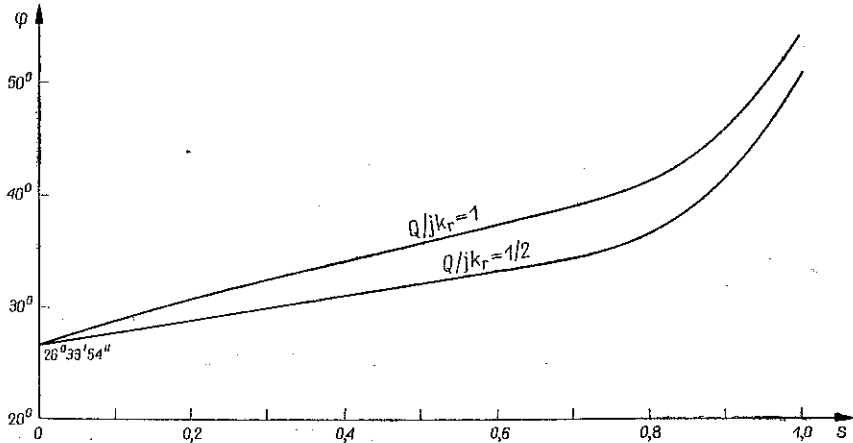
przy czym  $\Lambda$  jest zdefiniowane wzorem (3.11). Tak więc równania (3.22) i (3.23) określają poszukiwaną funkcję  $\varphi = \varphi(\Lambda)$  za pośrednictwem parametru  $s$ . Aby uzyskać korelację z rozwiązaniem, uzyskanym poprzednio dla prostszego przypadku granicznego  $Q \rightarrow \infty$ , wystarczy zauważyć, że

$$(3.24) \quad \beta_r = \left( \frac{jk_r}{Q} \right)^2 \Lambda.$$

Zależność  $\varphi = \varphi(\beta_r)$  przedstawiono na wykresie (rys. 6) dla różnych wartości parametru  $Q/jk_r$ . Ponadto rys. 7 podaje zależność  $\varphi = \varphi(s)$ , (3.22), określającą związek między optymalnym kątem,  $\varphi$  a naprężeniem krytycznym w prętach ściskanych. Wartość stałej Ylinena przyjęto  $c = 0,977$  (stal węglowa).



Rys. 6



Rys. 7

**3.3.** Obecnie zajmiemy się kształtowaniem kratownicy, omówionej w p. 3.2, ale poddanej działaniu sił o przeciwnym zwrocie (rys. 8). Przypadek ten rozważał L. KIRSTE [14 i 15] w oparciu o wzory Eulera i Johnsona-Ostenfelda. Tym razem pręt poziomy jest ściskany, pręty ukośne — rozciągane, zatem warunki poboczne dla funkcji celu  $V$  (3.12) przyjmujemy w postaci równości

$$(3.25) \quad N_1 = k_r F_1, \quad |N_2| = \frac{\pi^2 E^* F_2}{4\xi j a^2}.$$

Tok obliczeń jest podobny jak poprzednio. W przypadku granicznym  $Q \rightarrow \infty$  otrzymujemy rozwiązanie w postaci funkcji odwrotnej

$$(3.26) \quad \beta_r = \frac{(\operatorname{tg}^2 \varphi - 1)^2}{2 \operatorname{tg} \varphi},$$

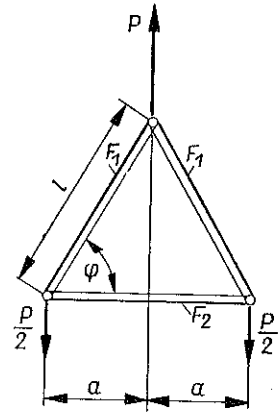
natomiast w przypadku ogólnym otrzymujemy przedstawienie parametryczne rozwiązania:

$$(3.27) \quad \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{1 + \frac{1}{\frac{Q}{jk_r} s} \frac{1 - 2cs + cs^2}{2 - s - 3cs + 2cs^2}},$$

$$(3.28) \quad \Lambda = \frac{1 - s}{8s^2(1 - cs)} \times \sqrt{\frac{\frac{Q}{jk_r} s(2 - s - 3cs + 2cs^2)}{\frac{Q}{jk_r} s(2 - s - 3cs + 2cs^2) + (1 - 2cs + cs^2)}},$$

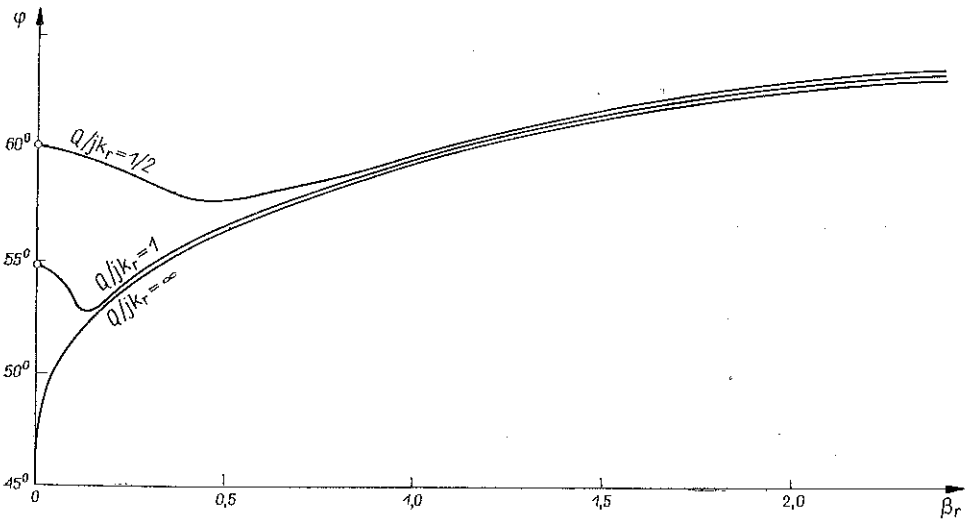
przy czym parametr  $s$  oznacza tu

$$(3.29) \quad s = \frac{\sigma_2}{Q} = \frac{Pj \operatorname{ctg} \varphi}{2QF_2}.$$

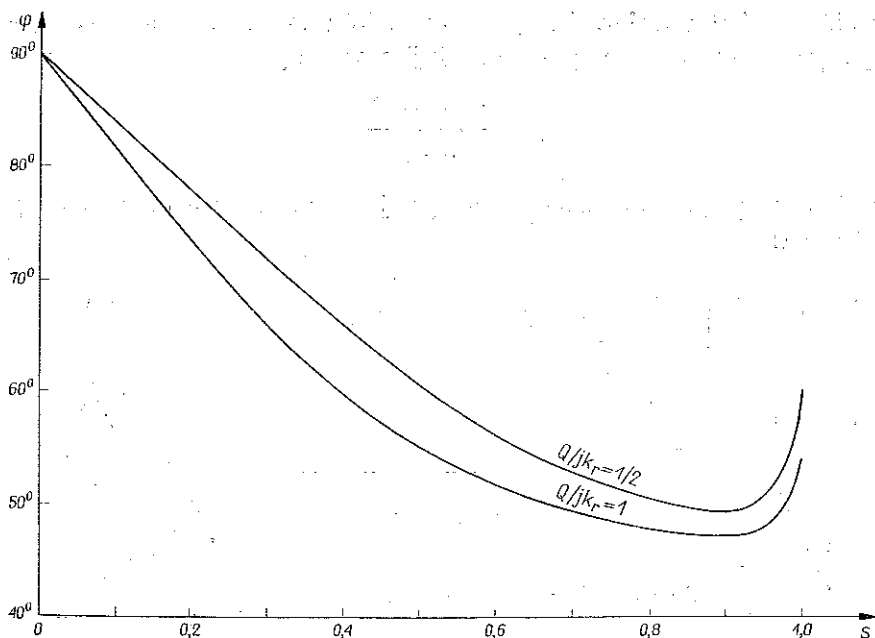


Rys. 8

Parametr smukłości  $\Lambda$  jest zdefiniowany wzorem (3.11); również wzór (3.24), wiążący parametry  $\Lambda$  i  $\beta_r$ , pozostaje bez zmiany. Zależność  $\varphi = \varphi(\beta_r)$  przedstawiono na rys. 9 dla różnych wartości  $Q/jk_r$ , natomiast rys. 10 przedstawia zależność  $\varphi = \varphi(s)$ . Przyjęto  $c = 0,977$  jak poprzednio.



Rys. 9



Rys. 10

3.4. Zajmiemy się jeszcze dwuprętowym układem kratowym, przedstawionym na rys. 11. Odległość  $a$  przyjmijmy za ustaloną; optymalne kształtowanie sprowadzi się do doboru kątów  $\varphi$  i  $\psi$  oraz pól powierzchni przekrojów  $F_1$  i  $F_2$ . Problem jest o tyle trudniejszy od poprzednio rozważanych, że mamy tu o jeden «stopień swobody» więcej.

Funkcja celu będzie tu w postaci

$$(3.30) \quad V = F_1 l_1 + F_2 l_2$$

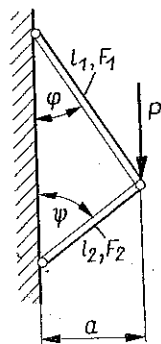
przy dwóch warunkach pobocznych, które przyjmijmy w formie równości

$$(3.31) \quad N_1 = k_r F_1, \quad |N_2| = \frac{\pi^2 E^* F_2^2}{\xi j l_2^2}$$

Siły podłużne w prętach wynoszą

$$(3.32) \quad N_1 = \frac{P}{\sin \varphi (\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \psi)},$$

$$(3.33) \quad |N_2| = \frac{P}{\sin \psi (\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \psi)};$$



Rys. 11

zatem z pierwszego z warunków (3.31) możemy obliczyć pole powierzchni  $F_1$ :

$$(3.34) \quad F_1 = \frac{P}{k_r \sin \varphi (\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \psi)},$$

natomiast drugi warunek przybiera postać

$$(3.35) \quad \frac{P}{\sin \varphi (\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \psi)} = \frac{\pi^2 E F_2^2 \sin^2 \psi}{\xi j a^2} \frac{Q F_2 \sin \psi (\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \psi) - P j}{Q F_2 \sin \psi (\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \psi) - c P j}$$

Rozważymy najpierw prostszy przypadek graniczny  $Q \rightarrow \infty$ , co praktycznie oznacza narażenie pręta 2 jedynie na wyboczenie sprężyste. Wtedy z równania (3.35) można bez trudu określić niewiadomą  $F_2$ :

$$(3.36) \quad F_2 = \frac{a}{\pi} \sqrt{\frac{P j \xi}{E \sin^3 \psi (\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \psi)}}$$

i podstawiając (3.34) i (3.36) do (3.30) określamy funkcję celu już bez żadnych warunków pobocznych:

$$(3.37) \quad V = \frac{P a}{k_r \sin^2 \varphi (\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \psi)} + \frac{a^2}{\pi} \sqrt{\frac{P j}{E \sin^5 \psi (\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \psi)}}$$

Warunki konieczne analitycznego minimum  $\partial V / \partial \varphi = 0$  i  $\partial V / \partial \psi = 0$  prowadzą do układu równań

$$(3.38) \quad \frac{1 - 2 \sin \varphi \cos \varphi (\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \psi)}{\sin^2 \varphi \sqrt{\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \psi}} + \frac{1}{2 \sin^{5/2} \psi} \sqrt{\frac{a^2 j k_r^2 \xi}{\pi^2 E P}} = 0,$$

$$\frac{1}{\sin^2 \varphi \sqrt{\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \psi}} + \frac{1 - 5 \sin \psi \cos \psi (\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \psi)}{2 \sin^{5/2} \psi} \sqrt{\frac{a^2 j k_r^2 \xi}{\pi^2 E P}} = 0.$$

Równania (3.38) określają optymalne kąty  $\varphi$  i  $\psi$  jako funkcję «parametru smukłości»  $\beta_r$ , zdefiniowanego wzorem (3.18) (oczywiście przy zmienionym sensie wymiaru  $a$ ). Nie widząc możliwości określenia funkcji  $\varphi = \varphi(\beta_r)$  i  $\psi = \psi(\beta_r)$  wzorami bezpośrednimi, podamy rozwiązanie «częściowo odwrotne», mianowicie funkcje  $\psi = \psi(\varphi)$  i  $\beta_r = \beta_r(\varphi)$ . Rugując z równań (3.38) parametr  $\beta_r$  otrzymujemy najpierw

$$(3.39) \quad [1 - 2 \sin \varphi \cos \varphi (\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \psi)] [1 - 5 \sin \psi \cos \psi (\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \psi)] - 1 = 0,$$

skąd dochodzimy do równania kwadratowego względem  $\operatorname{tg} \varphi$  lub  $\operatorname{tg} \psi$ :

$$(3.40) \quad 5 \operatorname{tg} \psi (1 - \operatorname{tg}^2 \varphi) = 2 \operatorname{tg} \varphi (\operatorname{tg}^2 \psi - 4).$$

Rozwiązując je ze względu na  $\operatorname{tg} \psi$  i pozostawiając jedynie dodatni pierwiastek dochodzimy do związku

$$(3.41) \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{5(1 - \operatorname{tg}^2 \varphi) + \sqrt{25 + 14 \operatorname{tg}^2 \varphi + 25 \operatorname{tg}^4 \varphi}}{4 \operatorname{tg} \varphi}.$$

Pierwsze z równań (3.38) daje teraz

$$(3.42) \quad \beta_r = \frac{a^2 j k_r^2 \xi}{\pi^2 E P} = \frac{4 \operatorname{tg}^4 \psi (2 \operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \psi - \operatorname{tg}^2 \varphi \operatorname{tg} \psi)^2}{\operatorname{tg}^3 \varphi (\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \psi) (1 + \operatorname{tg}^2 \psi)^{5/2}},$$

gdzie za  $\operatorname{tg} \psi$  należy podstawić (3.41); nie uczyniono tego, by nie komplikować wzoru (3.42).

W przypadku ogólnym skończonej granicy plastyczności  $Q$  określenie  $F_2$  ze wzoru (3.35) natrafia na trudności. Będziemy więc poszukiwali funkcji

$$(3.43) \quad V(\varphi, \psi, F_2) = \frac{Pa}{k_r \sin^2 \varphi (\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \psi)} + \frac{F_2 a}{\sin \psi}$$

z warunkiem pobocznym

$$(3.44) \quad f(\varphi, \psi, F_2) = QF_2 \sin \psi (\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \psi) - cPj \frac{Pj\xi a^2}{\pi^2 E} - \\ - [QF_2 \sin \psi (\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \psi) - Pj] F_2^2 \sin^3 \psi (\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \psi) = 0.$$

Dwa warunki minimum typu (3.6) prowadzą do równań

$$(3.45) \quad \frac{Q}{jk_r} \frac{\sin^2 \psi}{\sin^2 \varphi} [1 - \sin 2\varphi (\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \psi)] = \frac{d(s)}{s}, \\ \frac{Q}{jk_r} \frac{\sin^2 \psi}{\sin^2 \varphi} - \sin 2\psi (\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \psi) \frac{b(s)}{s} = \frac{d(s)}{s},$$

gdzie funkcje  $b(s)$  i  $d(s)$  są określone wzorami

$$(3.46) \quad b(s) = \frac{5 - 3s - 7cs + 5cs^2}{2(2 - s - 3cs + 2cs^2)}, \quad d(s) = -\frac{1 - 2cs + cs^2}{2 - s - 3cs + 2cs^2},$$

natomiast  $s$  oznacza bezwymiarowe naprężenie krytyczne w pręcie ściskanym:

$$(3.47) \quad s = \frac{\sigma_{2k}}{Q} = \frac{Pj}{Q F_2 \sin \psi (\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \psi)}.$$

Funkcje  $b(s)$  i  $d(s)$  wprowadzono tak, aby łatwo było przejść do granicy przy  $Q \rightarrow \infty$ , czyli  $s \rightarrow 0$ .

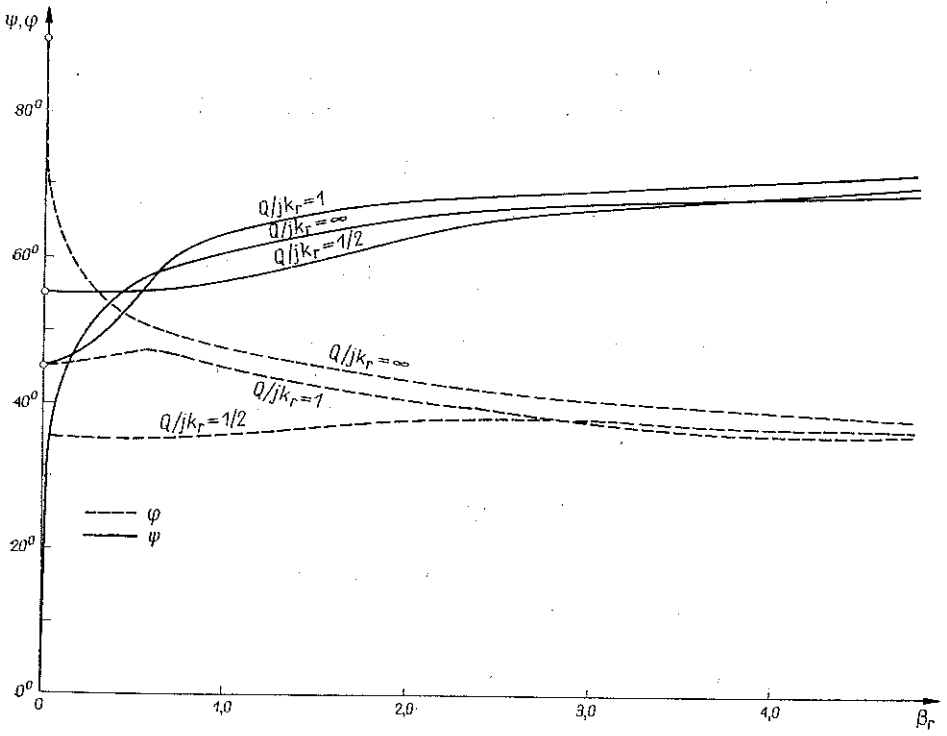
Z równań (3.45) wyrazimy  $\varphi$  i  $\psi$  jako funkcje parametru  $s$ . Odejmując je stronami dochodzimy najpierw do prostego związku

$$(3.48) \quad \frac{Q}{jk_r} \frac{\operatorname{tg} \psi}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{b(s)}{s},$$

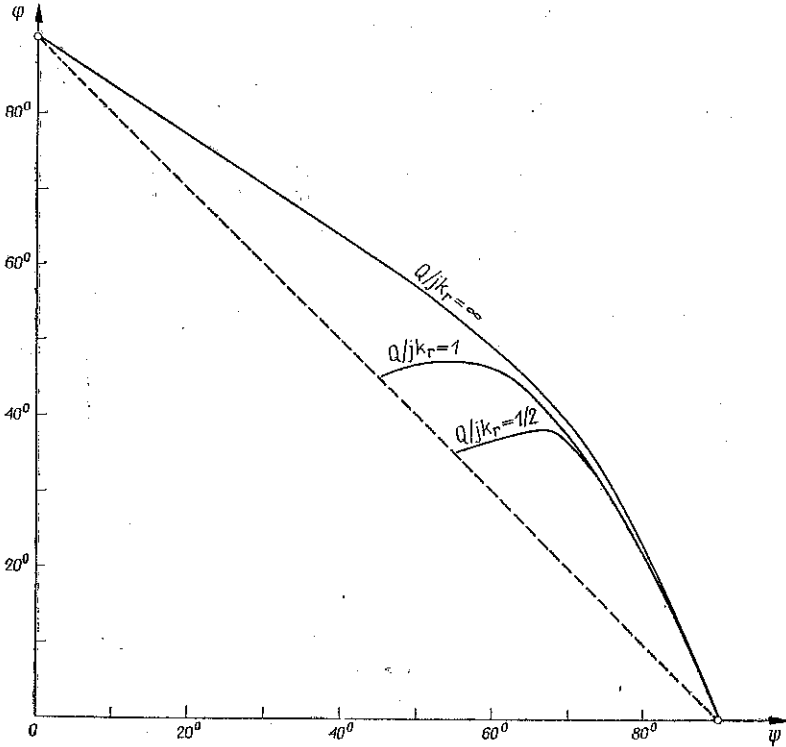
a następnie obliczamy funkcję tangens obu kątów:

$$(3.49) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{b(s)} \sqrt{\frac{\frac{Q}{jk_r} s \left\{ b^2(s) + \frac{Q}{jk_r} s [d(s) + 2b(s)] \right\}}{\frac{Q}{jk_r} s - d(s)}}, \\ \operatorname{tg} \psi = \sqrt{\frac{b^2(s) + \frac{Q}{jk_r} s [d(s) + 2b(s)]}{\frac{Q}{jk_r} s \left[ \frac{Q}{jk_r} s - d(s) \right]}}.$$





Rys. 12



Rys. 13

[363]

Parametr smukłości  $\Lambda$  zdefiniowany wzorem (3.11) (przy zmienionym sensie wymiaru  $a$ ) wyrażamy wreszcie przez parametr  $s$  z równania (3.44):

$$(3.50) \quad \Lambda = \frac{1-s}{1-cs} \left( \frac{Q}{jk_r} \right)^{1/2} \frac{b^2(s) + \frac{Q}{jk_r} s [d(s) + 2b(s)]}{s^{3/2} \left[ \frac{Q}{jk_r} s + b(s) \right]^2 \left[ \frac{Q}{jk_r} s - d(s) \right]^{1/2}}$$

Związek między parametrami  $\beta_r$  i  $\Lambda$  pozostaje bez zmiany (3.24). Poszukiwane zależności  $\varphi(\beta_r)$  i  $\psi(\beta_r)$  przedstawiono na rys. 12. Ponadto rys. 13 podaje zależność między kątami  $\varphi$  i  $\psi$  przy różnych wartościach parametru  $Q/jk_r$ . Stałą  $c$  przyjęto wszędzie  $c = 0,977$ .

#### 4. Uwagi końcowe

Zbadane przez nas układy kratowe są wprawdzie układami możliwie najprostszymi, jednak posiadającymi podstawowe znaczenie dla kratownic bardziej złożonych. Ich optymalizacja może przebiegać na podobnej drodze, jedna kotrzymywane wtedy coraz bardziej złożone układy równań algebraicznych i trygonometrycznych muszą być z reguły rozwiązywane jedynie na drodze numerycznej.

#### Literatura cytowana w tekście

1. М. Ахмададьев, Алгоритм расчета статически неопределимых ферм наименьшего объема на ЭЦВМ методом последовательных приближений, Изв. АН УЗССР, Серия Техн. Наук, 1966/3, 39-42.
2. A. BIERNAWSKI, B. GROCHOWSKI, O kształtowaniu kratownic na minimum potencjału, Rozpr. Inżyn., 2, 8 (1960), 137-165.
3. А. И. Богатырев, Расчет ферм наименьшего веса методами математического программирования, Сб. трудов Ленингр. Инст. Инж. Жел.-Дор. Транспорта, вып. 284, 1968, 132-146.
4. A. BRANDT, J. KOSMOWSKI, Z. WASIUTYŃSKI, O kształtowaniu kratownic na minimum potencjału przez przesuwanie nieobciążonych węzłów łączących trzy pręty, Rozpr. Inżyn., 2, 5 (1957), 157-205.
5. G. BÜRGERMEISTER, H. STEUP, H. KRETZSCHMAR, Stabilitätstheorie, t. II, Akademie-Verlag, Berlin 1963.
6. К. М. Хуберьян, Усилия в статически неопределимой форме, отвечающие ей наименьшему весу, при расчете на многие загрузки, Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и машиностр., 1960/3, 24-29.
7. А. Г. Дойльницын, Приближенные формулы для определения веса, оптимальных высот и прогибов ферм из алюминиевых сплавов, Сб. Тр. Ленингр. Инст. Инж. Жел.-Дор. Транспорта вып. 208, 1963, 117-138.
8. I. A. Федоров, К вопросу о ферме наименьшего веса, Строит. мех. и Расч. Сооружений, 1967/6, 11-14.
9. A. GAJEWSKI, M. ŻYCZKOWSKI, Obliczanie sprężystej i sprężysto-plastycznej stateczności płyt kołowych o zmiennej sztywności metodą odwrotną, Rozpr. Inżyn., 3, 13 (1965), 587-622.
10. J. GRYZCZ, O przekształceniach ustroju czterowęzłowego przez wymianę prętów, Rozpr. Inżyn., 1, 8 (1960), 31-43.

11. J. B. KELLER, *The shape of the strongest column*, Arch. Mat. Mech. and Anal., 4, 5 (1960), 275–285.
12. Т. С. КИМ, *Расчет статически неопределенных ферм наименьшего веса*, Строит. мех. и Расч. Сооружений, 1968/2, 20–22.
13. L. KIRSTE, *Druckstäbe geringsten Gewichts*, Österr. Ing.-Archiv, 1–2, 12 (1958), 36–41.
14. L. KIRSTE, *Beitrag zum Problem das «Tragwerks-Mindestgewichts»*, Z. Flugwiss., 8 (1960), 12, 352–359.
15. L. KIRSTE, *Ein weiterer Beitrag zum Problem des «Tragwerks-Mindestgewichts»*, Z. Flugwiss., 9 (1961), 11, 343–347.
16. Л. И. Коршин, *Расчет ферм минимального объема с обеспечением допустимой жесткости*, Сборник 3 Всесоюз. Съезда по Теор. и Прикл. Мех. Анн. Докл., Москва 1968, 172.
17. А. И. Коршунов, *Оптимальная высота статически определимых ферм*, Тр. Казанского Авиаци. Инст., вып. 91, 1966, 82–90.
18. А. И. Коршунов, Н. А. Кокорин, *Статически неопределимые фермы минимального веса при подвижной нагрузке*, Сборник «Материалы Научно-Техн. Конф. 1966», Казань 1966, 56–62.
19. J. KOSMOWSKI, *Wyznaczenie układu prętów w czterowęzłowym polu kratownicy z warunku minimum potencjału*, Rozpr. Inżyn., 1, 8 (1960), 3–30.
20. W. KRZYŚ, *Оптималне kształтование з уваги на stateczność ściskanych słupów cienkościemnych o profilu zamkniętym*, Zesz. Nauk. Pol. Krak., Mechanika, 4, 1967.
21. W. KRZYŚ, M. ŻYCZKOWSKI, *Klasyfikacja problemów kształтования wytrzymałościowego*, Czas. Techn., 2, 68 (1963), 1–3.
22. W. KRZYŚ, M. ŻYCZKOWSKI, *Pewna metoda tzw. parametrycznego kształтования wytrzymałościowego*, Rozpr. Inżyn., 4, 11 (1963), 643–666.
23. А. Г. Любимов, *О расчете ферм наименьшего веса*, Труды Харьковского Инст. Жел.-Дор. Трансп., 91, 68–80.
24. Д. А. Маццолавичиус, *Алгоритмы линейного программирования для синтеза стержневых статически определимых конструкций минимального веса*, Сборник «Строит. Мех. и Констр.», Вильнюс 1964, 33–49.
25. Д. А. Маццолавичиус, *К задаче синтеза упругой шарнирностержневой конструкции минимального веса в случае многих загружений при более общей системе ограничений*, Лит. Мех. Сборник, 1967/1, 126–131.
26. R. MISES, *Über die Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie*, Z. ang. Math. Mech., 3 (1923), 406.
27. G. G. POPE, *The design of optimum structures of specified basic configuration*, Int. J. Mech. Sci., 4, 10 (1968), 251–263.
28. И. М. Рабинович, *К теории статически неопределимых ферм*, Трансжелдориздат, Москва 1933.
29. Ю. А. Радциг, *Об определении наименьшего объема статически неопределимых ферм*, Труды Казанск. Авиаци. Инст., вып. 17, Казань 1946.
30. Ю. А. Радциг, *Расчет статически неопределимых ферм при временном нагружении*, Труды Казанск. Авиаци. Инст., вып. 32, Казань 1956, 3–43.
31. Ю. А. Радциг, *Статически неопределимые фермы наименьшего объема*, Труды Казанск. Авиаци. Инст., вып. 51, Казань 1960.
32. Ю. А. Радциг, *Рациональное определение прочных размеров статически неопределимых ферм наименьшего объема с помощью ЭВМ*, Сборник «ЭЦВМ в строит. механ.» Л.М. 1966, Стройиздат, 197–205.
33. Ю. А. Радциг, А. Ш. Арсланов, *Расчет статически неопределимых ферм наименьшего веса с учетом устойчивости стержней*, Сб. Всесой. Конф. по Пробл. Устойчив. Вильнюс 1967, 120.
34. А. Н. Раевский, *Расчет металлических ферм с обеспечением равноустойчивости всех сжатых элементов*, Сб. Всесой. Конф. по Проблемам Устойчив., Вильнюс 1967, 120–121.

35. М. И. Рейтман, Г. С. Шапиро, *Теория оптимального проектирования в строительной механике, теории упругости и пластичности*, Итоги Науки, Механика, Упругость и Пластичность 1964, Москва 1966, 81–124.
36. L. A. SCHMIT, Jr., W. M. MORROW, *Structural synthesis with buckling constraints*, Proc. ASCE, 89 (1963), ST2, 107–126.
37. H. SCHOOP, D. HILLIGES, *Die Stabilität eines räumlichen Gelenkfachwerkes*, Ing.-Archiv, 4, 36 (1967), 213–225.
38. C. Y. SHEU, W. PRAGER, *Recent developments in optimal structural design*, Appl. Mech. Reviews, 10, 21 (1968), 985–992.
39. Н. А. Серов, *Методы расчета статически неопределимых ферм с обеспечением минимального веса*, Научн. Тр. Ленингр. Инж.-Строит. Института, вып. 23, 1956, 67–83.
40. Н. А. Серов, *Расчет статически неопределимых ферм с обеспечением минимального веса*, Научн. Докл. Выс. Школы, Строительство, 1, 1958, 79–87.
41. Н. А. Серов, *Расчет статически неопределимых ферм с обеспечением минимального веса на несколько равномерно действующих комбинаций нагрузки или на подвижную нагрузку*, Сб. Научн. Тр. Ленингр. Инж.-Строит. Инст., вып. 30, 1959, 26–40.
42. Ф. И. Слюсарчук, *Исследование объема статически неопределимых ферм, несущих однократную нагрузку*, Труды Новосыб. Инст. Жел.-Дор. Трансп., вып. 11, 1955, 233–275.
43. Ф. И. Слюсарчук, *К вопросу о существовании равнопрочных решений в статически неопределимых ферм*, Труды Новосыб. Инст. Жел.-Дор. Трансп., вып. 11, 1955, 276–305.
44. A. R. TOAKLEY, *The optimum design of triangulated frameworks*, Inst. J. Mech. Sci., 2, 10 (1968), 115–127.
45. Е. М. Васильева, *К определению оптимальной величины усилия в затяжке предварительно напряженной фермы*, Строит. Мех. и Расчет Сооружений, 2, 1967, 46–47.
46. Z. WASIUTYŃSKI, *O przekształcaniu kratownic przez wprowadzanie nowych węzłów*, Ks. Jubil. prof. M. T. Hubera, Gdańsk 1950, 415–433.
47. Z. WASIUTYŃSKI, A. BRANDT, *The present state of knowledge in the field of optimum design of structures*, Appl. Mech. Rev., 5, 16 (1963), 341–349.
48. А. И. Виноградов, *О наиболее выгоднейшем исключении лишних связей в фермах с заданными напряжениями*, Строит. Мех. и Расчет Сооруж., 5, 1959, 7–13.
49. А. И. Виноградов, *К вопросу о расчете стержневых систем наименьшего веса*, Сб. «Исследования по теории Сооружений», вып. 8, Москва 1959, 499–521.
50. Н. С. Волкова, Ю. А. Радциг, Н. Х. Хазаншин, *О расчете статически неопределимых ферм наименьшего веса*, Строит. Мех. и Расчет Сооружений, 4, 1961, 10–14.
51. A. YLINEN, *Eräs aksiaalisen jämyystilan muodonmuutosfunktio*, Tekn. Aikakauslehti, 1, 38 (1948), 9–14.
52. A. YLINEN, *A method of determining the buckling stress and the required cross-sectional area for centrally loaded straight columns in elastic and inelastic range*, Mem. Ass. Ponts et Charp., 16 (1956), 529–550.

#### Резюме

### ОПТИМАЛЬНЫЙ РАСЧЕТ РЕШЕТЧАТЫХ ФЕРМ С УЧЕТОМ УСТОЙЧИВОСТИ

В работе определяется оптимальная конфигурация систем четырех решетчатых ферм, представленных на рис. 1, 5, 8 и 11. В качестве критерия расчета, принимается минимальный объем (вес) всей фермы, тогда как побочные условия принимаются или в виде прочности или условия устойчивости отдельных стержней, сжатых в упругой области, или же наконец условие упруго—пластической устойчивости для сжатых стержней и условие прочности для растягиваемых стержней. В упругой области, использовался метод преобразования, линеаризирующего побочные условия, предложенный В. Кржысем и М. Жичковским в рабо-

те (22). В неупругой области, определяется критическая сила используя, универсальные формулы А. Илинена, позволяющие на однородную запись во всем рассматриваемом интервале гибкости. Результаты даются в явном или неявном виде или же в параметрическом виде и кроме того результаты иллюстрируется графически, подчиняя оптимальные углы наклона стержней параметров гибкости фермы.

### Summary

#### OPTIMAL DESIGN OF TRUSSES WITH CONSIDERATION OF THE CONDITIONS OF STABILITY

In the paper the optimal configuration has been determined of four truss systems, presented in Fig. 1, 5, 8 and 11. As a criterion of design the minimal volume (weight) was assumed, and as auxiliary conditions — either the conditions of strength and stability of the individual bars compressed in the elastic range, or the condition of elastic-plastic stability for compressed bars and the condition of strength for stretched bars. In the elastic range the method of transformation linearizing auxiliary conditions was utilized, given by W. Krzyś and M. Życzkowski in paper (22).

In the inelastic range the critical force was determined by the universal formulae of A. Ylinen, which enable the uniform notation in the entire interval of slenderness ratio considered. The results have been presented either in explicit form or implicit or parametrical form, and moreover have been graphically illustrated, making the optimal angles of inclination of the bars dependent on the parameter of slenderness ratio of the truss.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 15 stycznia 1969 r.*

---