

STANY SPRĘŻYSTE PODCZAS ZMIAN FAZOWYCH

J. MADEJSKI (RZESZÓW)

1. Wstęp

W ogrzewanych lub chłodzonych przedmiotach powstają stany sprężyste odkształceń i naprężeń, wywołane przez rozszerzalność substancji pod wpływem pola temperatury. Gdy pola te są zmienne w czasie, to akumulacja defektów, związanych z odkształceniami trwałymi, może doprowadzić do zniszczenia przedmiotu. Zjawisko to nazywane bywa uderzeniem (udarem) cieplnym. Podobny efekt mogą mieć występujące w procesie zmian pola temperatury zmiany fazowe (np. przemiany alotropowe), które z reguły wiążą się ze zmianą gęstości. W procesie tym w głąb materiału przemieszcza się granica rozdziału faz, przed którą znajduje się stara faza o gęstości ρ_1 ; za granicą rozdziału faz jest już nowa faza o gęstości ρ_2 .

Dla zmiany fazowej o entalpii Δh z równania Clausiusa-Clapeyrona wynika

$$(1.1) \quad \frac{\rho_1}{\rho_2} - 1 = \frac{\rho_1 \Delta h}{T} \frac{dT}{dp} = 3\kappa,$$

przy czym 3κ stanowi odkształcenie objętościowe, powstałe w wyniku zmiany fazowej w stanie neutralnym (beznaprężeniowym), a κ jest odkształceniem liniowym, gdy odkształcenia te są dostatecznie małe, tj. dla $\kappa \ll 1$. Taki przypadek zachodzi np. dla przemiany alotropowej $\alpha - \text{Fe} \rightarrow \gamma - \text{Fe}$, odbywającej się w temperaturze 906°C . Dla fazy α mamy $\rho_1 = 7,682 \text{ g/cm}^3$, a dla fazy γ $\rho_2 = 7,764 \text{ g/cm}^3$ ([1], str. 46), co daje $\kappa = -3,5 \cdot 10^{-3}$. W tym przypadku można więc posłużyć się teorią liniową, a dla substancji izotropowej w nowej fazie przyjąć równanie fizyczne w postaci

$$(1.2) \quad \sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + (\lambda e - 3K\kappa) \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

w którym σ_{ij} i ε_{ij} stanowią tensory naprężeń i odkształceń, $e = \varepsilon_{kk}$ jest dylatacją, a μ i λ stałymi Lamégo, przy czym $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$. Uwzględniając ponadto rozszerzalność cieplną substancji w równaniu fizycznym otrzymamy dla nowej fazy

$$(1.3) \quad \sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + [\lambda e - 3K(\kappa + \alpha T)] \delta_{ij},$$

gdzie α jest współczynnikiem rozszerzalności liniowej, a T stanowi nadwyżkę temperatury w stosunku do rozkładu początkowego. Równanie (1.3) stanowi uogólnienie równania fizycznego termosprężystości.

Dla starej fazy stosuje się równania (1.2)–(1.3) podstawiając $\kappa = 0$. Na granicy rozdziału faz muszą być spełnione warunki ciągłości przemieszczeń u_i ($i = 1, 2, 3$) oraz warunki ciągłości składowych naprężeń normalnych i stycznych, działających na powierzchni rozdziału faz.

Poniżej rozpatrzemy przykłady podanej teorii ograniczając się do uproszczonego równania fizycznego (1.2).

2. Przykład wydrążonej kuli

Gdy prędkość ruchu granicy rozdziału faz jest umiarkowana, to zagadnienie można potraktować quasi-statycznie. Oznaczając przez r współrzędną promieniową mamy dla $r = y$ granicę faz, przy czym zakłada się, że stara faza znajduje się w obszarze $r < y$, a nowa w obszarze $r > y$.

W sferycznym układzie współrzędnych i przy założeniu symetrii sferycznej jedyną składową przemieszczenia jest składowa promieniowa $u = u(r)$. Tak dla starej jak i dla nowej fazy spełnia ona równanie

$$(2.1) \quad u_{,rr} + \frac{2}{r} u_{,r} - \frac{2u}{r^2} = 0,$$

o rozwiązaniu

$$(2.2) \quad u = \frac{A}{r^2} + Br.$$

Odształcenia wyrażają się wzorami

$$(2.3) \quad \varepsilon_{11} = u_{,r} = \varepsilon_r, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = u/r = \varepsilon_t, \quad \varepsilon_{ij} = 0 \text{ dla } i \neq j.$$

Naprężenia w przypadku statycznym i quasi-statycznym spełniają równanie równowagi

$$(2.4) \quad 2(\sigma_r - \sigma_t) + r\sigma_{r,r} = 0,$$

przy czym

$$(2.5) \quad \sigma_{11} = \sigma_r, \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_t, \quad \sigma_{ij} = 0 \text{ dla } i \neq j.$$

Po podstawieniu (1.2) i (2.3) do (2.4) otrzymujemy właśnie równanie (2.1), odnoszące się do obu faz, przy czym stałe A i B mogą być różne, tzn. dla starej fazy mamy

$$(2.6) \quad u = u'(r) = \frac{A_1}{r^2} + B_1 r,$$

a dla nowej fazy

$$(2.7) \quad u = u''(r) = \frac{A_2}{r^2} + B_2 r.$$

Ponieważ jednak warunek zwartości wymaga, aby przemieszczenia na granicy rozdziału faz były takie same, więc

$$(2.8) \quad u'(y) = u''(y).$$

Na granicy faz działają tylko naprężenia normalne σ_r , przy czym w starej fazie $\sigma_r = \sigma'_r(r)$, a w nowej fazie $\sigma_r = \sigma''_r(r)$. Warunek ciągłości tych naprężeń wymaga, aby

$$(2.9) \quad \sigma'_r(y) = \sigma''_r(y).$$

Ponadto muszą być podane warunki brzegowe, które polegają na określeniu ciśnień na wewnętrznej ($r = a$) i zewnętrznej ($r = b$) powierzchni przedmiotu. Mamy więc

$$(2.10) \quad \sigma'_r(a) = -p_a, \quad \sigma''_r(b) = -p_b.$$

Warunki (2.8)–(2.10) umożliwiają wyznaczenie stałych A_1, A_2, B_1 i B_2 . Mamy mianowicie po uwzględnieniu (2.2), (2.3) i (1.2)

$$(2.11) \quad \sigma'_r = -\frac{4\mu_1 A_1}{r^3} + 3K_1 B_1, \quad \sigma'_t = \frac{2\mu_1 A_1}{r^3} + 3K_1 B_1$$

oraz

$$(2.12) \quad \sigma''_r = -\frac{4\mu_2 A_2}{r^3} + 3K_2(B_2 - \kappa), \quad \sigma''_t = \frac{2\mu_2 A_2}{r^3} + 3K_2(B_2 - \kappa).$$

W związku z tym warunki (2.8)–(2.10) przybierają postać

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \frac{A_1}{y^3} + B_1 &= \frac{A_2}{y^3} + B_2, & -\frac{4\mu_1 A_1}{y^3} + 3K_1 B_1 &= -\frac{4\mu_2 A_2}{y^3} + 3K_2(B_2 - \kappa), \\ -\frac{4\mu_1 A_1}{a^3} + 3K_1 B_1 &= -p_a, & -\frac{4\mu_2 A_2}{b^3} + 3K_2(B_2 - \kappa) &= -p_b. \end{aligned}$$

Po rozwiązaniu tego układu równań otrzymujemy

$$(2.14) \quad \begin{aligned} A_1 &= \frac{y^3}{W} \left\{ -4\mu_2 \kappa \left(1 - \frac{y^3}{b^3} \right) - \right. \\ &\quad \left. - p_a \left[1 + \frac{4\mu_2}{3K_1} + \frac{4\mu_2 y^3}{3K_2 b^3} \left(1 - \frac{K_2}{K_1} \right) \right] + p_b \left(1 + \frac{4\mu_2}{3K_2} \right) \right\}, \\ B_1 &= -\frac{p_a}{3K_1} + \frac{4\mu_1 A_1}{3K_1 a^3}, \\ A_2 &= \frac{y^3}{W} \left\{ -4\mu_1 \kappa \left(1 - \frac{y^3}{a^3} \right) - \right. \\ &\quad \left. - p_a \left(1 + \frac{4\mu_1}{3K_1} \right) + p_b \left[1 + \frac{4\mu_2}{3K_2} + \frac{4\mu_1 y^3}{3K_1 a^3} \left(1 - \frac{K_1}{K_2} \right) \right] \right\}, \\ B_2 &= \kappa - \frac{p_b}{3K_2} + \frac{4\mu_2 A_2}{3K_2 b^3}, \end{aligned}$$

przy czym

$$(2.15) \quad W = 4\mu_1 \left(1 - \frac{y^3}{a^3}\right) \left(1 + \frac{4\mu_2 y^3}{3K_2 b^3}\right) - 4\mu_2 \left(1 - \frac{y^3}{b^3}\right) \left(1 + \frac{4\mu_1 y^3}{3K_1 a^3}\right).$$

W szczególnym przypadku, gdy stałe sprężystości są takie same dla obu faz, $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, $K_1 = K_2 = K$, oraz dla $p_a = p_b = p$, otrzymujemy

$$(2.16) \quad A_1 = \frac{\kappa}{1 + \frac{4\mu}{3K}} \frac{a^3 b^3}{b^3 - a^3} \left(1 - \frac{y^3}{b^3}\right), \quad B_1 = -\frac{p}{3K} + \frac{4\mu}{3K} \frac{A_1}{a^3},$$

$$A_2 = \frac{\kappa}{1 + \frac{4\mu}{3K}} \frac{a^3 b^3}{b^3 - a^3} \left(1 - \frac{y^3}{a^3}\right), \quad B_2 = \kappa - \frac{p}{3K} + \frac{4\mu}{3K} \frac{A_2}{b^3}.$$

W związku z tym np.

$$(2.17) \quad \sigma'_r = -p + \frac{4\mu\kappa}{1 + \frac{4\mu}{3K}} \frac{b^3}{b^3 - a^3} \left(1 - \frac{y^3}{b^3}\right) \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right),$$

$$\sigma''_r = -p + \frac{4\mu\kappa}{1 + \frac{4\mu}{3K}} \frac{a^3}{b^3 - a^3} \left(1 - \frac{y^3}{a^3}\right) \left(1 - \frac{b^3}{r^3}\right).$$

Na początku zmiany fazowej, gdy $y = b$, w przedmiocie panuje stały rozkład naprężeń $\sigma_r = \sigma'_r = -p$. Przy końcu zmiany fazowej, gdy $y = a$, mamy ponownie $\sigma_r = \sigma''_r = -p$.

Oznaczmy przez q ciśnienie między-fazowe,

$$(2.18) \quad \sigma'_r(y) = \sigma''_r(y) = -q.$$

W omawianym szczególnym przypadku wynosi ono

$$(2.19) \quad q = p - \frac{4\mu\kappa}{1 + \frac{4\mu}{3K}} \frac{(b^3 - y^3)(y^3 - a^3)}{y^3(b^3 - a^3)}$$

i posiada ekstremum dla $y = (ab)^{1/2}$. Mamy więc

$$(2.20) \quad q_{\text{ex}} = p - \frac{4\mu\kappa}{1 + \frac{4\mu}{3K}} \frac{(b/a)^{3/2} - 1}{(b/a)^{3/2} + 1}.$$

Nadwyżka ($q_{\text{ex}} - p$) dla wzmiankowanej uprzednio przemiany alotropowej $\alpha - \text{Fe} \rightarrow \gamma - \text{Fe}$ i przy założeniu, że moduł Younga $E = 2,2 \cdot 10^6$ kp/cm² i współczynnik Poissona $\nu = 0,29$, wynosi

$$q_{\text{ex}} - p = 7,25 \cdot 10^3 \frac{(b/a)^{3/2} - 1}{(b/a)^{3/2} + 1} \text{ kp/cm}^2,$$

co przy $b/a = 2$ daje $q_{\text{ex}} - p = 3,46 \cdot 10^3$ kp/cm².

Na rys. 1 i 2 przedstawiono dla przykładu rozkłady bezwymiarowych naprężeń

$$\frac{\sigma_r + p}{4\mu\kappa} \left(1 + \frac{4\mu}{3K}\right), \quad \frac{\sigma_t + p}{4\mu\kappa} \left(1 + \frac{4\mu}{3K}\right)$$

w funkcji r/a dla kilku wartości y/a przy $b/a = 4$. Widoczna jest nieciągłość składowej σ_t na granicy rozdziału faz. Rysunek 3 przedstawia rozkład bezwymiarowego wyteżenia (intensywności naprężeń)

$$\frac{\sigma_r - \sigma_t}{4\mu\kappa} \left(1 + \frac{4\mu}{3K}\right).$$

Bezwzględna wartość tej wielkości osiąga $3/2$ w nowej fazie na początku zmiany fazowej i w starej fazie na końcu zmiany fazowej. Stany te zaznaczono gwiazdkami na rys. 3.

W przypadku zbiornika cienkościennego o grubości ścianek $d = b - a$ przy oznaczeniu $u = y - a$ oraz gdy $a \rightarrow \infty$, otrzymuje się w danym szczególnym przypadku $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $p_a = p_b = p$ następujący wynik:

$$(2.21) \quad \sigma'_r = -p = \sigma''_r, \quad \sigma'_t = -p + \frac{6\mu\kappa}{1 + \frac{4\mu}{3K}} \frac{d-u}{d}, \quad \sigma''_t = -p - \frac{6\mu\kappa}{1 + \frac{4\mu}{3K}} \frac{u}{d}.$$

W ogólnym przypadku kuli $a = 0$ otrzymujemy

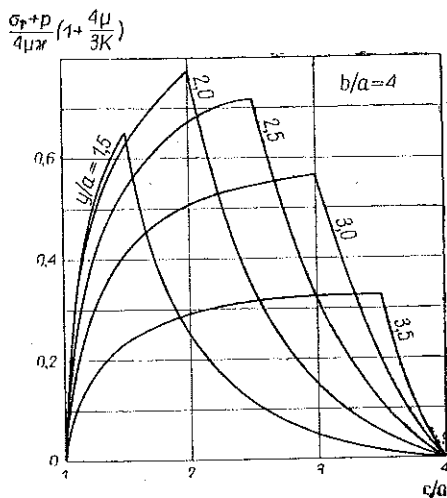
$$(2.22) \quad \sigma'_r = 3K_1 B_1 = \sigma'_t,$$

naprężenia zaś w nowej fazie określają wzory (2.12), przy czym

$$(2.23) \quad A_2 = y^3 \frac{\frac{p_b}{3K_2} \left(1 - \frac{K_2}{K_1}\right) - \kappa}{1 + \frac{4\mu_2}{3K_2} \frac{y^3}{b^3} + \frac{4\mu_2}{3K_1} \left(1 - \frac{y^3}{b^3}\right)},$$

B_2 określone jest przez wzór (2.14). Stała z (2.22) wynosi

$$(2.24) \quad B_1 = \kappa - \frac{p_b}{3K_2} + \frac{A_2}{y^3} \left(1 + \frac{4\mu_2}{3K_2} \frac{y^3}{b^3}\right).$$



Rys. 1

W danym przypadku intensywność naprężeń w starej fazie równa się zeru, a dla nowej fazy mamy

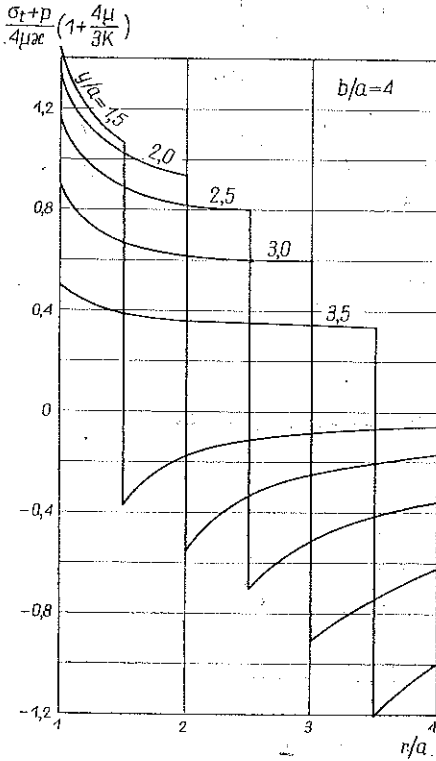
$$(2.25) \quad \sigma_r - \sigma_t = 6\mu_2 \frac{y^3}{r^3} \frac{\kappa - \frac{p_b}{3K_2} \left(1 - \frac{K_2}{K_1}\right)}{1 + \frac{4\mu_2}{3K_2} \frac{y^3}{b^3} + \frac{4\mu_2}{3K_1} \left(1 - \frac{y^3}{b^3}\right)}$$

Gdy $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ oraz $K_1 = K_2 = K$, to

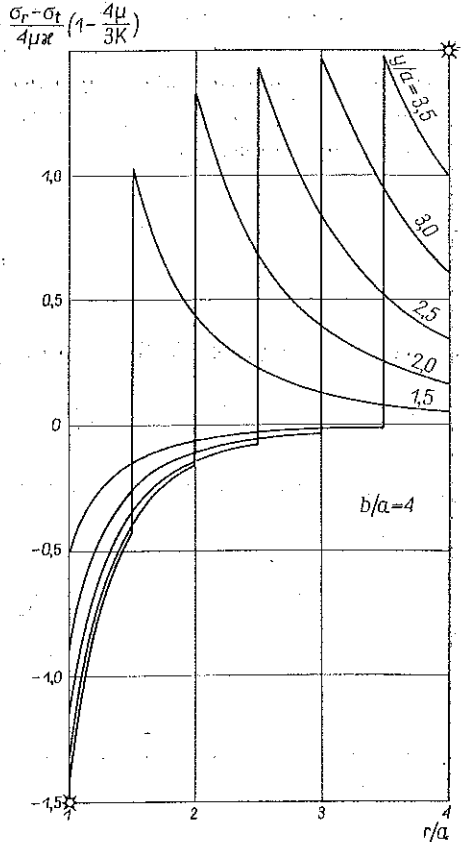
$$(2.26) \quad \sigma_r - \sigma_t = \frac{6\mu\kappa}{1 + \frac{4\mu}{3K}} \frac{y^3}{r^3}, \quad r > y.$$

A zatem największe wyężenie jest na granicy rozdziału faz po stronie nowej fazy; wynosi ono

$$(2.27) \quad (\sigma_r - \sigma_t)_{\max} = \frac{6\mu\kappa}{1 + \frac{4\mu}{3K}}$$



Rys. 2



Rys. 3

3. Przykład okrągłej rury

Przy założeniach poprzednich mamy, w przypadku symetrii osiowej odkształceń i jedynej składowej promieniowej przemieszczenia $u = u(r)$, równanie

$$(3.1) \quad u,_{rr} + \frac{1}{r} u,_{,r} - \frac{u}{r^2} = 0,$$

które wynika z równania równowagi

$$(3.2) \quad \sigma_r - \sigma_t + r\sigma_{r,r} = 0,$$

w którym

$$(3.3) \quad \sigma_{11} = \sigma_r, \quad \sigma_{22} = \sigma_t,$$

podczas gdy $\sigma_{ij} = 0$ dla $i \neq j$, a $\sigma_{33} = \sigma_z$ może być w zasadzie dowolne. Ponadto wykorzystano równania (1.2) przy następujących założeniach:

$$(3.4) \quad \varepsilon_{11} = u,_{,r} = \varepsilon_r, \quad \varepsilon_{22} = u/r = \varepsilon_t$$

oraz $\varepsilon_{ij} = 0$ dla $i \neq j$ w założeniu, że $\varepsilon_{33} = \varepsilon_z$ zależy co najwyżej od współrzędnej wzdłużnej z . Rozwiązaniem ogólnym równania (3.1) jest funkcja

$$(3.5) \quad u = \frac{A}{r} + Br,$$

w której, podobnie jak w p. 2, stałe A i B są różne dla obu faz, a na granicy faz $u'(y) = u''(y)$ zgodnie z warunkiem (2.8), wymaganym również tutaj. Naprężenia określają wzory:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \sigma'_r &= -\frac{2\mu_1 A_1}{r^2} + 3K_1 B_1 + \lambda_1 (\varepsilon'_z - B_1), \\ \sigma'_t &= \frac{2\mu_1 A_1}{r^2} + 3K_1 B_1 + \lambda_1 (\varepsilon'_z - B_1), \\ \sigma'_z &= 3K_1 \varepsilon'_z - 2\lambda_1 (\varepsilon'_z - B_1) \end{aligned}$$

dla starej fazy $r < y$ oraz

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \sigma''_r &= -\frac{2\mu_2 A_2}{r^2} + 3K_2 (B_2 - \varkappa) + \lambda_2 (\varepsilon''_z - B_2), \\ \sigma''_t &= \frac{2\mu_2 A_2}{r^2} + 3K_2 (B_2 - \varkappa) + \lambda_2 (\varepsilon''_z - B_2), \\ \sigma''_z &= 3K_2 (\varepsilon''_z - \varkappa) - 2\lambda_2 (\varepsilon''_z - B_2) \end{aligned}$$

dla nowej fazy $r > y$.

Rozpatrzmy przypadek, gdy $\varepsilon_r'' = \varepsilon_z'' = 0$, tzn. płaski stan odkształceń. Wtedy

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \sigma_r' &= -\frac{2\mu_1 A_1}{r^2} + B_1(3K_1 - \lambda_1), \\ \sigma_t' &= \frac{2\mu_1 A_1}{r^2} + B_1(3K_1 - \lambda_1), \\ \sigma_z' &= 2\lambda_1 B_1 \end{aligned}$$

przy $r \leq y$ oraz

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \sigma_r'' &= -\frac{2\mu_2 A_2}{r^2} + B_2(3K_2 - \lambda_2) - 3K_2 \kappa, \\ \sigma_t'' &= \frac{2\mu_2 A_2}{r^2} + B_2(3K_2 - \lambda_2) - 3K_2 \kappa, \\ \sigma_z'' &= 2\lambda_2 B_2 - 3K_2 \kappa \end{aligned}$$

przy $r \geq y$.

Gdy z zewnątrz rury działa ciśnienie p_b przy $r = b$, wewnątrz zaś ciśnienie p_a przy $r = a$, a $r = y$ oznacza granicę rozdziału faz, to stałe A_1 , A_2 , B_1 i B_2 muszą spełnić warunki (2.8)–(2.10). Otrzymuje się stąd

$$(3.10) \quad \begin{aligned} A_1 &= \frac{y^2}{W} \left\{ -2\mu_2 \kappa' \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - p_a \left[1 + \frac{2\mu_2}{3K_1'} + \frac{2\mu_2 y^2}{3K_2' b^2} \left(1 - \frac{K_2'}{K_1'} \right) \right] + p_b \left(1 + \frac{2\mu_2}{3K_2'} \right) \right\}, \\ B_1 &= -\frac{p_a}{3K_1'} + \frac{2\mu_1 A_1}{3K_1' a^2}, \\ A_2 &= \frac{y^2}{W} \left\{ -2\mu_1 \kappa' \left(1 - \frac{y^2}{a^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - p_a \left(1 + \frac{2\mu_1}{3K_1'} \right) + p_b \left[1 + \frac{2\mu_1}{3K_2'} + \frac{2\mu_1 y^2}{3K_1' a^2} \left(1 - \frac{K_1'}{K_2'} \right) \right] \right\}, \\ B_2 &= \kappa' - \frac{p_b}{3K_2'} + \frac{2\mu_2 A_2}{3K_2' b^2}, \end{aligned}$$

przy czym

$$(3.11) \quad W = 2\mu_1 \left(1 - \frac{y^2}{a^2} \right) \left(1 + \frac{2\mu_2 y^2}{3K_2' b^2} \right) - 2\mu_2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right) \left(1 + \frac{2\mu_2 y^2}{3K_2' a^2} \right)$$

oraz

$$(3.12) \quad 3K_1' = 3K_1 - \lambda_1, \quad 3K_2' = 3K_2 - \lambda_2, \quad \kappa' = \kappa \frac{K_2}{K_2'}.$$

W przypadku tych samych stałych sprężystości dla obu faz oraz $p_a = p$, $p_b = 0$ otrzymujemy

$$(3.13) \quad \begin{aligned} A_1 &= \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \left[\frac{\kappa'}{1 + \frac{2\mu}{3K'}} \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right) + \frac{p}{2\mu} \right], & B_1 &= -\frac{p}{3K'} + \frac{2\mu A_1}{3K' a^2}, \\ A_2 &= \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \left[\frac{\kappa'}{1 + \frac{2\mu}{3K'}} \left(1 - \frac{y^2}{a^2} \right) + \frac{p}{2\mu} \right], & B_2 &= \kappa' + \frac{2\mu A_2}{3K' b^2}. \end{aligned}$$

Obliczmy wyężenie σ_i ze wzoru

$$(3.14) \quad 2\sigma_i^2 = (\sigma_r - \sigma_t)^2 + (\sigma_t - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2.$$

Otrzymujemy ogólnie

$$(3.15) \quad \begin{aligned} \sigma'_i &= 2\mu_1 \left(\frac{3A_1^2}{r^4} + B_1^2 \right)^{1/2}, & r &< y, \\ \sigma''_i &= 2\mu_2 \left(\frac{3A_2^2}{r^4} + B_2^2 \right)^{1/2}, & r &> y. \end{aligned}$$

Dla przypadku $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, $K_1 = K_2 = K$ oraz $p_b = 0$, $p_a = p$ otrzymujemy

$$(3.16) \quad \begin{aligned} \frac{\sigma'_i}{2\mu\kappa'} \left(1 + \frac{3K'}{2\mu} \right) &= \left\{ \left[1 + 3 \left(\frac{3K' a^2}{2\mu r^2} \right)^2 \right] \left(\frac{b^2}{b^2 - a^2} \right)^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2} + p^+ \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - 2p^+ \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{y^2}{b^2} + p^+ \right) + p^{+2} \right\}^{1/2}, \\ \frac{\sigma''_i}{2\mu\kappa'} \left(1 + \frac{3K'}{2\mu} \right) &= \left\{ \left[1 + 3 \left(\frac{3K' b^2}{2\mu r^2} \right)^2 \right] \left(\frac{a^2}{b^2 - a^2} \right)^2 \left(1 - \frac{y^2}{a^2} + p^+ \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(1 + \frac{3K'}{2\mu} \right) \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{y^2}{a^2} + p^+ \right) + 1 + \frac{3K'}{2\mu} \right\}^{1/2}, \end{aligned}$$

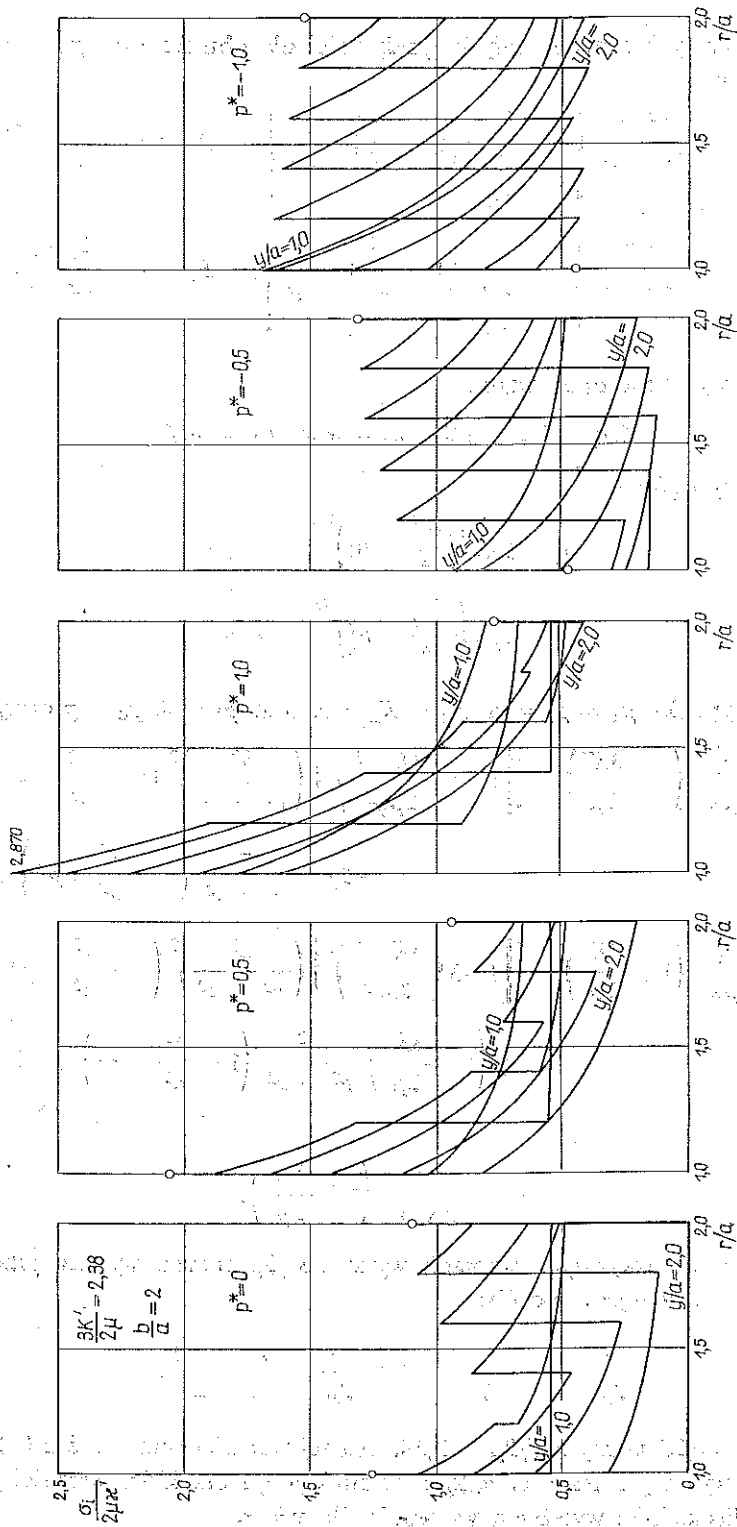
przy czym

$$(3.17) \quad p^+ = \frac{p}{3K' \kappa'} \left(1 + \frac{3K'}{2\mu} \right).$$

Występujący w powyższych wzorach wyraz $3K'/2\mu$ można wyrazić przez liczbę Poissona w następujący sposób:

$$(3.18) \quad \frac{3K'}{2\mu} = \frac{1}{1 - 2\nu}, \quad 1 + \frac{3K'}{2\mu} = \frac{2(1 - \nu)}{1 - 2\nu}.$$

Np. dla $\nu = 0,29$ mamy $3K'/2\mu = 2,38$. Dla tej wartości oraz dla $b/a = 2$ zostały wykonane wykresy zależności $\sigma_i/2\mu\kappa'$ w funkcji r/a dla kilku wartości p^+ i y/a (rys. 4). Nieciągłości wyężenia występują dla $y = r$.



Rys. 4

4. Współistnienie naprężeń temperaturowych i fazowych

Dla zbadania tego problemu rozpatrzmy najpierw przypadek trywialny $\lambda = 0$, $2\mu = E = 3K$. Z równania (1.3) otrzymujemy

$$(4.1) \quad \sigma = E [\varepsilon - (\kappa + \alpha T)]$$

dla nowej fazy. Dla starej fazy o tych samych wartościach E i α mamy

$$(4.2) \quad \sigma = E (\varepsilon - \alpha T).$$

W przypadku przemiany $\alpha - \text{Fe} \rightarrow \gamma - \text{Fe}$ o wartości $\kappa = -3,5 \cdot 10^{-3}$, poprzedzanej ogrzaniem od $T = 0$ do $T = 906^\circ\text{C}$, mamy przy $\alpha = 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ deg}^{-1}$

$$\frac{\sigma}{E} - \varepsilon = -9,96 \cdot 10^{-3}$$

na początku przemiany. Natomiast przy końcu przemiany mamy według (4.1)

$$\frac{\sigma}{E} - \varepsilon = 3,5 \cdot 10^{-3} - 9,96 \cdot 10^{-3} = -6,46 \cdot 10^{-3}.$$

Zmiana fazowa wywołuje w danym przypadku odprężenie, gdyż $\kappa < 0$. W przypadku $\kappa > 0$ nastąpiłby wzrost naprężeń.

Rozpatrzmy teraz przypadek symetrii sferycznej, w którym składowe odkształceń i naprężeń określone są przez wzory (2.3) i (2.5). Korzystając z (1.3) mamy

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= (2\mu + \lambda) \varepsilon_r + 2\lambda \varepsilon_t - 3K(\kappa + \alpha T), \\ \sigma_t &= 2(\mu + \lambda) \varepsilon_t + \lambda \varepsilon_r - 3K(\kappa + \alpha T) \end{aligned}$$

dla nowej fazy. Podobne wzory przy $\kappa = 0$ i odpowiednim oznakowaniu stałych sprężystości odnoszą się do starej fazy. Podstawienie (4.3) do równania równowagi daje po uwzględnieniu (2.3) równanie niejednorodne

$$(4.4) \quad u_{,rr} + \frac{2}{r} u_{,r} - \frac{2u}{r^2} = \frac{3K\alpha}{2\mu + \lambda} T_{,r}$$

o rozwiązaniu

$$(4.5) \quad u = \frac{A}{r^2} + Br + \frac{K\alpha}{2\mu + \lambda} \frac{3}{r^2} \int r^2 T dr,$$

dla obu faz. Dalszy tok postępowania jest identyczny, jak w p. 2, tzn. muszą być spełnione warunki (2.8)–(2.10), służące do określenia czterech stałych całkowania A_1, A_2, B_1 i B_2 . W związku z tym ograniczymy się w tym miejscu do przypadku kuli nieobciążonej ciśnieniem zewnętrznym przy tych samych stałych sprężystości dla obu faz. Dla starej fazy ($0 \leq r \leq y$) otrzymujemy

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \sigma'_r &= 3K \left(B_1 - \frac{4\mu\alpha}{2\mu + \lambda} \psi \right), \\ \sigma'_t &= 3K \left[B_1 + \frac{2\mu\alpha}{2\mu + \lambda} (\psi - T) \right], \end{aligned}$$

przy czym

$$(4.7) \quad \psi = \frac{1}{r^3} \int_0^r r^2 T dr.$$

Dla nowej fazy ($y \leq r \leq b$) mamy

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \sigma_r'' &= -\frac{4\mu A_2}{r^3} + 3K \left(B_2 - \kappa - \frac{4\mu\alpha}{2\mu + \lambda} \psi \right), \\ \sigma_t'' &= \frac{2\mu A_2}{r^3} + 3K \left[B_2 - \kappa + \frac{2\mu\alpha}{2\mu + \lambda} (\psi - T) \right]. \end{aligned}$$

Z warunków (2.8), (2.9) i (2.10) przy $p_b = 0$ otrzymujemy

$$(4.9) \quad \begin{aligned} B_1 &= \frac{4\mu\alpha}{2\mu + \lambda} \psi(b) + \frac{\kappa}{1 + \frac{3K}{4\mu}} \left(1 - \frac{y^3}{b^3} \right), \\ A_2 &= -\frac{\kappa y^3}{1 + \frac{4\mu}{3K}}, \\ B_2 &= \frac{4\mu\alpha}{2\mu + \lambda} \psi(b) + \frac{\kappa}{1 + \frac{3K}{4\mu}} \left(1 + \frac{3K}{4\mu} - \frac{y^3}{b^3} \right), \end{aligned}$$

co pozwala obliczyć naprężenia. W szczególności intensywność naprężeń określają wzory

$$(4.10) \quad \begin{aligned} \frac{\sigma_r' - \sigma_t'}{3K} &= \frac{2\mu\alpha}{2\mu + \lambda} [T - 3\psi(r)] \quad \text{dla } 0 \leq r \leq y, \\ \frac{\sigma_r'' - \sigma_t''}{3K} &= \frac{2\mu\alpha}{2\mu + \lambda} [T - 3\psi(r)] + \frac{\frac{3}{2}\kappa}{1 + \frac{3K}{4\mu}} \frac{y^3}{r^3} \quad \text{dla } y \leq r \leq b. \end{aligned}$$

5. Wnioski

Powyższe wyniki otrzymano dla przypadków, w których granica rozdziału faz przesuwa się na tyle wolno, że można zjawisko potraktować jako quasi-statyczne. Z analizy tych przypadków wynika, że naprężenia spowodowane przez zmiany fazowe są co najmniej rzędu naprężeń termicznych, spowodowanych przez zmiany temperatury. Zależy to oczywiście od wartości parametru κ , który przykładowo dla przemiany alotropowej $\alpha - \text{Fe} \rightarrow \gamma - \text{Fe}$ wynosi $-3,5 \cdot 10^{-3}$. W innych przy-

padkach bezwzględna wartość tego parametru może być znacznie większa. Np. dla przemiany alotropowej grafit \rightarrow diament mamy $\rho_1 = 2,25 \text{ g/cm}^3$, $\rho_2 = 3,51 \text{ g/cm}^3$, co daje $\kappa = -0,120$ w temperaturze pokojowej, przy czym wartość $|\kappa|$ rośnie z temperaturą, gdyż $\alpha_1 = 7,9 \cdot 10^{-6} \text{ deg}^{-1}$, a $\alpha_2 = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ deg}^{-1}$. W związku z tym w wielu przypadkach decydujące znaczenie będą miały naprężenia «fazowe», a nie naprężenia temperaturowe (termiczne). Do przypadków tych należy np. krzepnięcie, w którym z nielicznymi wyjątkami jest $\rho_2 > \rho_1$. W tym przypadku dla cieczy należy przyjąć $K = \lambda$ oraz $\mu = 0$. Odwrotny proces topienia nie może wywoływać stanu naprężeń w starej fazie, a najwyżej może go zmienić w sensie odprężenia.

Największe znaczenie mogą mieć zmiany fazowe w stałym stanie skupienia. Charakter tych zmian może być w zasadzie dowolny, gdyż czynnik kontrolujący te zmiany (dyfuzja, przewodzenie ciepła, promieniowanie, absorpcja itd.) wpływa tylko na prędkość zmiany faz, tj. na ruch granicy rozdziału faz. Najłatwiejsza wydaje się analiza teoretyczna tych procesów, w których zmiana fazowa polega na wyłącznych zmianach strukturalnych; należą do nich zmiany martenzytyczne (bezdyfuzyjne), jak np. przejście od układu przestrzennie centrycznego regularnego w licy i cyrkonie do ściśle wypełnionej siatki układu heksagonalnego lub analogiczne przejście w kobaltcie lub niklu, posiadających pierwotnie siatkę regularną płasko-centryczną. Do tej grupy należy również rekrytalizacja, która odgrywa poważną rolę w ceramikach. Segregacja i homogenizacja stopów jest wprawdzie kontrolowana przez dyfuzję, ale na krótką metę, toteż może być również analizowana w powyższy sposób.

Na uwagę zasługują zmiany fazowe, wywołane przez strumień neutronów i promieniowanie α , β , γ , a także przez ciężkie produkty rozszczepienia o wysokiej energii. HAUSER i SCHENK [2] zwrócili uwagę na stosunkowo małą ilość danych, jakimi się obecnie dysponuje — zważywszy, że zmiany takie mogą występować w stalach, stopach rozszczepialnych i cyrkonii. Na tym miejscu warto podać, że krzemionka SiO_2 o strukturze trygonalnej β (kwarc) może przejść do układu heksagonalnego α (trydymit) w temperaturze 573°C lub wyższej. Poddana promieniowaniu neutronów o dawce $7 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-2}$ doznaje tej przemiany alotropowej już w temperaturze poniżej 200°C , przy czym przy dawce $5 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-2}$ wpływ neutronów zanika. Gęstość fazy β wynosi $\rho_1 = 2,65 \text{ g/cm}^3$, a fazy α $\rho_2 = 2,30 \text{ g/cm}^3$, skąd $\kappa = 0,051$, co jest wartością dość dużą.

Cyrkonia ZrO_2 o siatce jednoskośnej w temperaturze pokojowej ma dwie fazy wysokotemperaturowe, tetragonalną i regularną. Przejście do pierwszej z nich następuje przy 900°C , a do drugiej przy 1900°C . Pod wpływem promieniowania temperatura drugiej zmiany fazowej może zniżyć się z 1900°C do 100°C . Wymaga to według jednych danych dawki neutronów prędkich $9,4 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-2}$, a według innych danych strumienia fragmentów rozszczepienia (ok. 10^{16} rozszczepień na cm^3). HAUSER i SCHENK [2] zwracają uwagę na fakt, że opisane zjawisko ma znaczenie w technice reaktorowej z uwagi na stosowanie podlegających korozji koszulek cyrkonowych do prętów paliwowych, tym bardziej że wysokotemperaturowe fazy cyrkonii (faza o siatce regularnej) sprzyjają rozwijaniu się korozji.

Tak więc zmiany strukturalne, których oczekuje się w wysokich temperaturach, mogą w warunkach napromieniowania zachodzić w temperaturach znacznie niższych, co może doprowadzić do nieprzewidzianych spiętrzeń naprężeń, a nawet zniszczenia elementów konstrukcyjnych. Dla oceny tych naprężeń konieczne są dane co do gęstości faz i ich współczynników rozszerzalności liniowej, które w niewielkiej ilości są rozsiiane w literaturze, a które należałoby zgromadzić i ewentualnie uzupełnić.

Literatura cytowana w tekście

1. K. WESOŁOWSKI, *Metaloznawstwo*, t. I, PWT, Warszawa 1954.
2. O. HAUSER, M. SCHENK, *Radiation-induced phase transformations*, tłumaczenie AERE-Trans 1008 z Kernenergie, 12, 6 (1963), 655.
3. Н. И. Безухов, *Введение в теорию упругости и пластичности*, Стройиздат, Москва 1950.

Резюме

НАПРЯЖЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ ВО ВРЕМЯ ФАЗОВЫХ ИЗМЕНЕНИЙ

С помощью линейной теории анализируются напряженные состояния, которые сопутствуют фазовым изменениям. Рассматриваются, подробно, случаи сферической и осевой симметрии. Обращается внимание на значение явления в случае облучения, передвигающего фазовые изменения в твердом агрегатном состоянии к более низким температурам.

Summary

ELASTIC STATES DURING PHASE TRANSFORMATIONS

Elastic states created by phase changes are analyzed by the proposed linear theory. Examples of a spherical reservoir and a thick-walled tube are given and the coexistence of stresses caused by temperature variations and phase transformations discussed. The importance of states of stress and strain created by nuclear radiation-induced phase changes is emphasized.

WYŻSZA SZKOŁA INŻYNIERSKA
W RZESZOWIE

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 stycznia 1969 r.