

OPTYMALNE KSZTAŁTOWANIE PRĘTA
ŚCISKANEGO SIŁĄ SKIEROWANĄ DO BIEGUNA

ANTONI GAJEWSKI, MICHAŁ ŻYCZKOWSKI (KRAKÓW)

1. Wstęp

W celu zmniejszenia ciężaru ściskanych elementów lub dla zadośćuczynienia wymaganiom konstrukcyjnym stosuje się często pręty o przekroju poprzecznym, zmieniającym się w sposób ciągły lub skokowy. Wśród nich pręty o kształcie optymalnym wyróżniają się najmniejszym ciężarem przy danej sile krytycznej. Problematyka poświęcona doborowi tych kształtów nabiera w ostatnich latach coraz większego znaczenia.

Chociaż problem, sformułowany przez J. L. LAGRANGE'A [13], znany jest od wieku XVIII, to pierwsze rozwiązanie, dotyczące kolumn o przekroju kołowym, uzyskał T. CLAUSEN [3] dopiero w r. 1849. Dalszy rozwój nastąpił w związku z pracami H. BLASIUSA [1], N. G. CZENCOWA [4], J. B. KELLERA [7] oraz J. TADJBAKSHA i J. B. KELLERA [19]. W dwóch ostatnich pracach autorzy rozważyli problem określenia optymalnego kształtu słupów ściskanych stałą siłą, utwierdzonych na jednym końcu oraz utwierdzonych, swobodnie lub przegubowo podpartych na drugim końcu. Nieco odmienne podejście do zagadnienia reprezentuje praca M. ŻYCZKOWSKIEGO [21]. Polega ono, uwzględniając wymagania prostoty konstrukcji, na dobieraniu optymalnego kształtu pręta ściskanego spośród pewnej klasy prętów np. stożkowych (tzw. kształtowanie parametryczne). Sama metoda kształtowania parametrycznego w zastosowaniu do różnych problemów omówiona jest szerzej w pracach W. KRZYSIA i M. ŻYCZKOWSKIEGO [9 i 10].

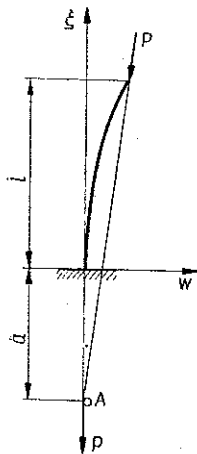
Pierwsze próby podania optymalnego kształtu pręta przy ograniczeniu naprężeń ściskających należy przypisać E. L. NIKOLAI [14], a sformułowanie ściśle zagadnienia w zakresie sprężysto-plastycznym P. LAASONENOWI [12]. Wykorzystując wzór A. YLINENA autor uzyskał rozwiązanie metodą kolejnych przybliżeń, podał wyniki liczbowe oraz kształt pręta. Również W. KRZYŚ [11] posługując się metodą N. G. CZENCOWA znalazł optymalny (ze względu na stateczność ogólną oraz stateczność ścianki) kształt jednostronnie utwierdzonego pręta cienkościennego o profilu zamkniętym.

W wymienionych dotychczas pracach obciążenie prętów realizowano przez obciążenie siłami o stałych punktach zaczepienia i stałych kierunkach nie zmieniających się podczas wybożenia — nazywanych dalej w skrócie eulerowskimi. Przypadek obciążenia siłą o zmieniającym się kierunku w czasie wybożenia podano

w książkach W. J. FIEODOSJEW [6], JA. G. PANOWKO i J. J. GUBANOWEJ [15], G. BÜRGERMEISTERA i H. STEUPA [2]; w wymienionych tam przykładach siła skierowana jest zawsze w stronę stałego punktu — bieguna i działa na koniec pręta przyzmatycznego, utwierdzonego na drugim końcu. Wpływ sprężystego zamocowania na stateczność w taki sam sposób obciążonego pręta przyzmatycznego analizuje R. ROSMAN [16], który w dalszym ciągu [17 i 18] bada stateczność sprężystie zamocowanych prętów o liniowo i kwadratowo zmieniających się sztywnościach. Również siła podśledząca, śledząca i nadśledząca zmienia podczas wyboczenia swój kierunek, lecz problemem optymalizacji przy tak działającej sile nie będziemy się w tej pracy zajmowali.

W pracy niniejszej przedstawimy ściśle rozwiązanie problemu optymalizacji kształtu pręta jednostronnie utwierdzonego, ściskanego siłą skierowaną do stałego punktu (bieguna), położonego na osi nieodkształconego pręta. Oprócz pewnego znaczenia teoretycznego przypadek tak obciążonego pręta ma duże znaczenie praktyczne; występuje np. wtedy, gdy przez blok umieszczony na kierunku osi pręta przełożona jest lina zaczepiona do jego swobodnego końca (por. np. [2, 6 i 15]). Przykłady zastosowań praktycznych można znaleźć w pracy J. JA. KOGANA [8] oraz D. DMITRIJUKA [5].

Problem rozwiązany w niniejszej pracy należy do zagadnień konserwatywnych stateczności, ponieważ obciążenie opisane wyżej posiada potencjał. W związku ze zmianą kierunku działania siły podczas wyboczenia, charakterystyczną dla problemów niekonserwatywnych, można by tu mówić o «pseudoniekonserwatywności». Jednak statyczne kryterium stateczności okazuje się wystarczające do rozwiązania zagadnienia. Ograniczymy się przy tym do kształtowania ze względu na wyboczenie sprężyste.



Rys. 1

2. Sformułowanie zagadnienia

Wspornikowy pręt nieprzyzmatyczny (rys. 1) jest obciążony siłą P o zmieniającym się podczas wyboczenia kierunku, lecz skierowaną do stałego punktu A — bieguna. Punkt ten jest położony na osi nieodkształconego pręta w odległości a od punktu utwierdzenia, przy czym odległość ta jest liczona jako dodatnia, gdy punkt A znajduje się poniżej utwierdzenia, a ujemna, gdy powyżej.

Zadaniem naszym jest znalezienie optymalnego kształtu pręta na podstawie statycznego kryterium stateczności. Pręt taki powinien posiadać najmniejszą objętość przy danej sile krytycznej, powodującej utratę stateczności przez wyboczenie. Korzystamy wobec tego w dalszym ciągu ze znanego równania linii ugięcia pręta

$$(2.1) \quad \frac{d^2}{d\xi^2} \left(EJ \frac{d^2 w}{d\xi^2} \right) + P \frac{d^2 w}{d\xi^2} = 0,$$

gdzie $w(\xi)$ oznacza ugięcie pręta w punkcie ξ , P siłę działającą na swobodnym końcu i skierowaną do bieguna A , EJ poszukiwaną sztywność pręta, którą będziemy wyrażać wzorem

$$(2.2) \quad EJ = E_0 J_0 g(\xi);$$

E_0 jest modułem Younga w pewnym ustalonym punkcie ξ_0 , J_0 momentem bezwładności przekroju poprzecznego w tym punkcie, a funkcja $g(\xi)$ jest nieznaną, przy czym $g(\xi_0) = 1$. Samo położenie punktu ξ_0 określimy szczegółowo później.

Po wprowadzeniu zmiennych bezwymiarowych

$$(2.3) \quad y = \frac{w}{l}, \quad x = \frac{\xi}{l}$$

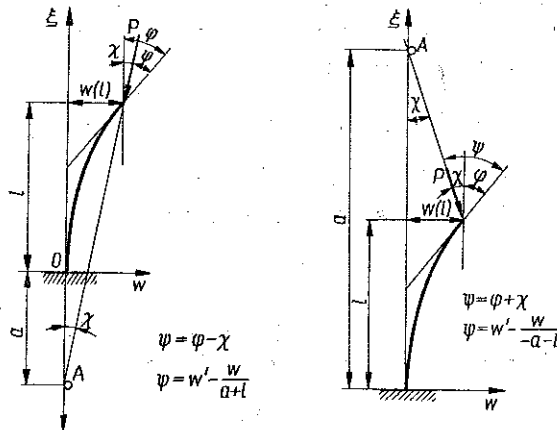
równanie (2.1) napiszemy w postaci

$$(2.4) \quad (gy''')'' + \beta y'' = 0,$$

gdzie kreski oznaczają różniczkowanie względem x , a β jest bezwymiarową siłą krytyczną:

$$(2.5) \quad \beta = \frac{Pl^2}{E_0 J_0}.$$

Oczywiście równanie (2.1) należy uzupełnić przez właściwe w naszym przypadku warunki brzegowe; dwa z nich — to warunki geometryczne stwierdzające, że ugięcie i kąt ugięcia w utwierdzeniu są równe zero, a dwa dalsze — to warunki statyczne



Rys. 2

stwierdzające, że moment zginający na końcu pręta jest równy zero oraz że siła poprzeczna w tym miejscu jest równa odpowiedniej składowej siły P . Wyprowadzenie ostatniego warunku brzegowego zilustrowano rysunkiem 2. Tak więc otrzymamy

$$(2.6) \quad y(0) = 0, \quad g(1) y''(1) = 0; \\ y'(0) = 0, \quad \left[(gy''')' + \beta \left(y' - \frac{y}{1+a} \right) \right]_{x=1} = 0.$$

Wprowadzony tu bezwymiarowy parametr

$$(2.7) \quad a = \frac{a}{l}$$

określa położenie bieguna, do którego zwrócona jest siła i jak widać może przyjmować dowolne wartości od $-\infty$ do ∞ . Przypadek $a = \pm\infty$ odpowiada obciążeniu siłą eulerowską pręta wspornikowego, a $a = 0$ również obciążeniu siłą eulerowską, ale pręta dwuprzegubowego. Całkując dwukrotnie równanie różniczkowe (2.4) otrzymujemy

$$(2.8) \quad gy'' + \beta y = C_1 + C_2 x,$$

gdzie C_1 i C_2 są dowolnymi stałymi całkowania. Wprowadzając następnie nową zmienną zależną określoną wzorem

$$(2.9) \quad v(x) = y(x) - \frac{C_1}{\beta} - \frac{C_2}{\beta} x,$$

przekształcamy równanie (2.8) do postaci, będącej punktem wyjścia do dalszych rozważań opartych na metodzie CZENCOWA [4], stosowanej przez niego do problemu optymalizacji pręta obciążonego siłą eulerowską,

$$(2.10) \quad gv'' + \beta v = 0.$$

Z czterech warunków brzegowych (2.6) otrzymujemy, po wykorzystaniu podstawienia (2.9) i równania (2.10) oraz wyeliminowaniu stałych C_1 i C_2 , tylko dwa warunki brzegowe dla funkcji $v(x)$:

$$(2.11) \quad v(0) - \alpha v'(0) = 0, \quad v(1) = 0.$$

Aby nie zawęzić zagadnienia założymy, że pręt może być niejednorodny, tzn. że podany jest sposób zmiany modułu Younga; przyjmujemy, że

$$(2.12) \quad E = E_0 f(x),$$

gdzie $f(x)$ jest daną z góry funkcją, przy czym $f(x_0) = 1$. Wobec tego, pole powierzchni przekroju poprzecznego pręta może być wyrażone wzorem:

$$(2.13) \quad A(x) = A_0 \left[\frac{g(x)}{f(x)} \right]^n.$$

Funkcja $g(x)$ określa sposób zmiany sztywności pręta, funkcja $f(x)$ sposób zmiany modułu Younga, a funkcja $g(x)/f(x)$ sposób zmiany momentu bezwładności przekroju poprzecznego. Wykładnik zależy od kształtu przekroju poprzecznego pręta i w przypadku pręta płaskozbieżnego o stałej wysokości przekroju $n = 1$ (wyboczenie z płaszczyzny zbieżności), w przypadku pręta o stałej szerokości przekroju i zmiennej wysokości $n = 1/3$ (wyboczenie w płaszczyźnie zbieżności), a w przypadku pręta wszechstronnie równomiernie zbieżnego $n = 1/2$ [21].

3. Zagadnienie wariacyjne

Wyprowadzenie podstawowego w tym problemie równania różniczkowego ugiętej linii pręta optymalnego można przeprowadzić co najmniej dwoma sposobami; pierwszy z nich opiera się na rozważaniach podanych przez CZENCOWA [4], a drugi na metodzie energetycznej, zaproponowanej równocześnie przez M. TAYLORA [20] i M. ŻYCKOWSKIEGO [23], a stosowanej również przez W. KRZYSIA [11]. Podamy tu oba te sposoby.

3.1. Metoda Czencowa. Istota tej metody polega na poszukiwaniu minimum funkcyjalu objętości pręta

$$(3.1) \quad V = \int_0^l A(\xi) d\xi = A_0 l \int_0^1 \left[\frac{g(x)}{f(x)} \right]^{\alpha} dx$$

przy dodatkowym warunku w postaci równania różniczkowego (2.10). Wyrażając z tego równania funkcję $g(x)$ przez v i v'' otrzymujemy

$$(3.2) \quad V = \int_0^1 \psi \left(\frac{v}{v''} \right) dx,$$

gdzie

$$(3.3) \quad \psi \left(\frac{v}{v''} \right) = A_0 l \left(\frac{-\beta v}{f v''} \right)^{\alpha}.$$

Równanie Eulera-Lagrange'a dla funkcyjalu (3.2) można napisać w prostej postaci

$$(3.4) \quad t v'' - t'' v = 0,$$

w której nowa zmienna t jest określona wzorem

$$(3.5) \quad t = \dot{\psi} \frac{v}{(v'')^2},$$

a pochodna funkcji ψ względem argumentu v/v'' wzorem

$$(3.6) \quad \dot{\psi} = \frac{d\psi}{d\left(\frac{v}{v''}\right)} = -A_0 l \alpha \frac{\beta}{f} \left(\frac{-\beta v}{f v''} \right)^{\alpha-1}.$$

Po jednokrotnym scałkowaniu równania (3.4) otrzymujemy

$$(3.7) \quad v' t - v t' = C_1,$$

gdzie C_1 jest dowolną stałą całkowania.

Niewątpliwie najistotniejszym punktem metody Czencowa jest wykazanie, że stała C_1 w (3.7) jest równa zero w przypadku, gdy siła działająca jest siłą eulewską. Również i w tym przypadku można wykazać, że $C_1 = 0$. Należy w tym celu wykorzystać drugi z warunków brzegowych (2.11), tzn. obliczyć wartość stałej C_1 ze wzoru (3.7) w punkcie $x = 1$. Jeżeli tylko $v''(1)$ jest różne od zera, to stała

C_1 jest równa zero. Ale założenie $v''(1) \neq 0$ musimy tu przyjąć chcąc, aby sztywność pręta zerowała się na swobodnym końcu. Zachodzi to zawsze w analogicznych przypadkach optymalnych kształtów poszukiwanych w zakresie sprężystym. A zatem przyjmując $C_1 = 0$, z równania (3.7) mamy

$$(3.8) \quad v = C_2 t,$$

gdzie C_2 oznacza dowolną stałą całkowania; w dalszym ciągu korzystając z (3.5) i (3.6) otrzymujemy ostatecznie

$$(3.9) \quad v'' v^{1+\kappa} f^{1+\kappa} = C,$$

gdzie C oznacza dowolną stałą. Do równania tego należy dołączyć warunki brzegowe (2.11).

3.2. Metoda energetyczna. Punktem wyjścia jest tu wzór na siłę krytyczną P wyprowadzony z rozważań energetycznych, zakładających, że energia potencjalna układu musi być minimalna (lokalnie) w wygiętym położeniu równowagi:

$$(3.10) \quad P = \frac{\int_0^l EJw''^2 d\xi}{\int_0^l w'^2 d\xi - \frac{1}{a+l} \left(\int_0^l w' d\xi \right)^2}.$$

Wzór (3.10) jest w naszym przypadku poprawny, ponieważ istnieje zarówno potencjał składowej pionowej siły P , jak również składowej poziomej. Łatwo można wykazać obliczając pracę siły zewnętrznej P na przesunięciu powstałym przy małym ugięciu pręta, że potencjał tej siły jest równy wyrażeniu w mianowniku wzoru (3.10). Jeżeli w (3.10) podstawimy dowolną funkcję $w(\xi)$, spełniającą warunki brzegowe danego zagadnienia, to otrzymamy przybliżoną wartość siły krytycznej; dobór tej funkcji decyduje o dokładności wyniku. Wartość ścisłą uzyskamy, gdy $w(\xi)$ przyjmujemy w postaci rozwiązania równania (2.1) z uwzględnieniem warunków brzegowych (2.6).

Metoda energetyczna polega na poszukiwaniu ekstremum funkcjonału (3.10) przy stałej objętości pręta

$$(3.11) \quad V = \int_0^l A(\xi) d\xi$$

i to zarówno ze względu na funkcję $w(\xi)$ (warunek równowagi, minimum P), jak i ze względu na funkcję $A(\xi)$ (optymalizacja, maksimum P).

W ten sposób otrzymujemy zagadnienie izoperymetryczne, w którym funkcjonał (3.10) jest funkcją trzech innych funkcjonałów. Korzystając z reguł obliczania wariacji można wykazać, że poszukiwane ekstremum funkcjonału (3.10) należy zastąpić przez znajdowanie ekstremum funkcjonału

$$(3.12) \quad F(w', w'') = \int_0^l (EJw''^2 + \lambda_1 w'^2 + \lambda_2 w') d\xi$$

z izoperymetrycznym warunkiem pobocznym (3.11). Wobec tego zgodnie z ogólnie znanymi regułami tworzymy nowy funkcjonał

$$(3.13) \quad F''(y', y'', A) = \int_0^1 (\lambda EA^{\frac{1}{n}} y''^2 + \lambda_1 y'^2 + \lambda_2 y' + \lambda_3 A) dx,$$

w którym wprowadzono bezwymiarowe zmienne x i y , moment bezwładności przekroju wyrażono przez pole powierzchni przekroju,

$$(3.14) \quad J = \frac{1}{\lambda} A^{\frac{1}{n}};$$

λ , λ_1 , λ_2 i λ_3 są pewnymi stałymi mnożnikami.

Problem sprowadzono do zbadania ekstremum bezwarunkowego dla funkcjonału (3.13), zależnego od dwóch funkcji $y(x)$ i $A(x)$ oraz ich pochodnych, a więc do rozwiązania układu równań Eulera oraz określenia dowolnych stałych z warunków brzegowych i warunku izoperymetrycznego.

Obliczając pochodną wariacyjną ze względu na funkcję $y(x)$ otrzymujemy

$$(3.15) \quad \frac{d^2}{dx^2} (EJ y'' - \lambda_1 y) = 0.$$

Jak widać, jest to nieco zmienione równanie (2.1); staje się tu jasne jakie znaczenie fizyczne ma stała λ_1 .

Pochodna wariacyjna ze względu na funkcję $A(x)$ przechodzi w pochodną cząstkową, ponieważ w funkcjonałe (3.13) nie ma pochodnych funkcji $A(x)$:

$$(3.16) \quad \frac{1}{x} \lambda EA^{\frac{1-n}{n}} y''^2 + \lambda_3 = 0.$$

Z równania tego obliczamy $A(x)$, wstawiamy do (3.15) i po prostych przekształceniach [uwzględniając (2.12)] otrzymujemy

$$(3.17) \quad \frac{d^2}{dx^2} \left[f^{\frac{n}{n-1}} (y'')^{\frac{n+1}{n-1}} + Ay \right] = 0,$$

gdzie A oznacza pewną dowolną stałą.

Całkując dwukrotnie mamy

$$(3.18) \quad f^{\frac{n}{n-1}} (y'')^{\frac{n+1}{n-1}} + Ay = C_1 + C_2 x,$$

a po wprowadzeniu nowej zmiennej zależnej, określonej wzorem

$$(3.19) \quad y(x) = \frac{1}{A} [v(x) + C_1 + C_2 x],$$

dostajemy ostatecznie równanie identyczne z równaniem (3.9):

$$(3.20) \quad v'' v^{\frac{1-n}{1+n}} f^{\frac{n}{1+n}} = \bar{C} \quad \text{lub} \quad v v''^{\frac{1+n}{1-n}} f^{\frac{n}{1-n}} = \bar{C}.$$

Należy do niego dołączyć warunki brzegowe (2.11).

Wyprowadzone dwoma sposobami równanie (3.9) lub (3.20) określa linię ugięcia pręta optymalnego przy danym sposobie zmienności modułu Younga, przy czym funkcja $v(x)$ jest linią ugięcia w zmienionym [za pomocą podstawienia (2.9) lub (3.19)], układzie współrzędnych x, v . Jest to równanie różniczkowe nieliniowe drugiego rzędu.

4. Optymalizacja prętów jednorodnych

Zbadamy najpierw problem optymalnego kształtowania pręta jednorodnego, tzn. założymy, że moduł Younga jest stały i wynosi E_0 . Wobec tego w równaniu (3.20) założymy $f(x) \equiv 1$, co w znacznym stopniu ułatwi jego rozwiązanie. Otrzymamy więc w tym przypadku równanie zawierające tylko funkcję v w pierwszej potędze i jej drugą pochodną:

$$(4.1) \quad v'' v^{\frac{1-\kappa}{1+\kappa}} = C.$$

Wprowadzając nową zmienną zależną, określoną wzorem

$$(4.2) \quad p(v) = v'(x),$$

oraz uwzględniając, że $v''(x) = p(dp/dv)$, możemy obliczyć nową funkcję $p(v)$:

$$(4.3) \quad p(v) = \pm \sqrt{A_1 v^{\frac{2\kappa}{\kappa+1}} + A_2},$$

skąd

$$(4.4) \quad x = \pm \int \frac{dv}{\sqrt{A_1 v^{\frac{2\kappa}{\kappa+1}} + A_2}},$$

gdzie A_1 i A_2 są dowolnymi stałymi całkowania, które należy wyznaczyć z warunków brzegowych (2.11). Jak widać, otrzymano wyrażenie pozwalające obliczyć funkcję odwrotną, tzn. $x = x(v)$, lub wyrazić rozwiązanie w formie parametrycznej przez odpowiednie wprowadzenie parametru, ułatwiające całkowanie we wzorze (4.4). Omówimy teraz szczegółowo rozwiązanie podanego zagadnienia w trzech szczególnych przypadkach, tzn. gdy $\kappa = 1$, $\kappa = 1/2$ i $\kappa = 1/3$.

4.1. Pręt płasko-zbieżny o stałej wysokości przekroju poprzecznego ($\kappa = 1$). Wykonując całkowanie w równaniu (4.4) dla $\kappa = 1$ otrzymujemy

$$(4.5) \quad v = A_1 + A_2 x + A_3 x^2,$$

gdzie A_1, A_2, A_3 są dowolnymi stałymi całkowania.

Warunki brzegowe (2.11) pozwalają wyrazić dwie spośród stałych całkowania przez pozostałą (która jest ostatecznie dowolna) oraz podać równanie linii ugięcia pręta optymalnego w postaci

$$(4.6) \quad v = C[\alpha + x - (1 + \alpha)x^2], \quad \alpha = \frac{a}{l},$$

gdzie C oznacza stałą dowolną.

Rozkład sztywności pręta obliczamy z równania (2.10):

$$(4.7) \quad g(x) = \frac{1}{2} \beta \frac{\alpha + x - (1 + \alpha)x^2}{1 + \alpha}, \quad \beta = \frac{Pl^2}{E_0 J_0}.$$

Zakładając, że sztywność pręta w pewnym dowolnie wybranym miejscu x_0 jest podana i wynosi J_0 , tzn. że $g(x_0) = 1$ ($0 \leq x_0 \leq 1$), możemy określić siłę krytyczną:

$$(4.8) \quad P_k = \frac{2(1 + \alpha)}{\alpha + x_0 - (1 + \alpha)x_0^2} \frac{E_0 J_0}{l^2}$$

oraz sztywność pręta

$$(4.9) \quad J(x) = \frac{\alpha + x - (1 + \alpha)x^2}{\alpha + x_0 - (1 + \alpha)x_0^2} J_0.$$

Interesującą jest teraz rzeczą zbadać, jaką oszczędność materiału można otrzymać zastępując pręt przyzmatyczny prętem o kształcie optymalnym, przenoszącą tę samą siłę krytyczną. Obliczymy w tym celu objętość pręta o kształcie optymalnym:

$$(4.10) \quad V = A_0 l \int_0^1 g(x) dx = \frac{4\alpha + 1}{6[\alpha + x_0 - (1 + \alpha)x_0^2]} A_0 l, \quad A_0 = A(x_0).$$

Porównując siły krytyczne dla pręta przyzmatycznego i optymalnego (o tych samych modułach Younga)

$$(4.11) \quad P_k^{(0)} = \beta^{(0)} \frac{E_0 J^{(0)}}{l^2} = P_k = \beta \frac{E_0 J_0}{l^2},$$

możemy wyrazić pole powierzchni przekroju poprzecznego pręta przyzmatycznego przez A_0 i β :

$$(4.12) \quad A^{(0)} = A_0 \frac{\beta}{\beta^{(0)}}$$

oraz obliczyć stosunek objętości pręta optymalnego do przyzmatycznego (o tej samej sile krytycznej):

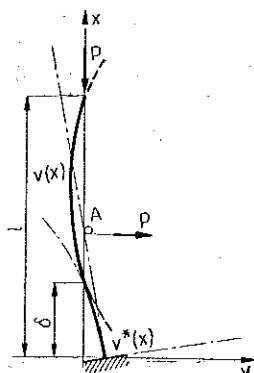
$$(4.13) \quad \frac{V}{V^{(0)}} = \frac{1 + 4\alpha}{12(1 + \alpha)} \beta^{(0)}.$$

We wzorze tym $\beta^{(0)}$ oznacza bezwymiarową siłę krytyczną dla pręta przyzmatycznego, która jak wiadomo w naszym przypadku określona jest równaniem przestępnym

$$(4.14) \quad \operatorname{tg} \sqrt{\beta^{(0)}} + \alpha \sqrt{\beta^{(0)}} = 0.$$

Należy tu zauważyć, że uzyskane rozwiązania (4.8)–(4.13) są poprawne tylko dla pewnych przedziałów zmienności parametru α , mianowicie dla $\alpha \geq 0$ i dla $\alpha \leq -1$; w przedziale $-1 < \alpha < 0$ tracą one sens. Powodem tego jest sposób wyboczenia pręta, jaki zachodzi wtedy, gdy siła jest skierowana do bieguna poło-

żonego w przedziale $-1 < \alpha < 0$. Linia ugięcia po wyboczeniu nie może być łukiem jednej paraboli (parabola nie posiada punktu przegięcia), może być natomiast złożona z łuków dwóch parabol o przeciwnych krzywiznach.



Rys. 3

Niejednoznaczność znaku drugiej pochodnej funkcji v jest najlepiej widoczna w równaniu (3.16). A zatem linię ugięcia pręta optymalnego dla parametru α , zawartego w przedziale $(-1, 0)$, należy skonstruować z dwóch odcinków parabol pokazanych na rys. 3 i poprawnych dla różnych przedziałów zmienności x :

$$(4.15) \quad \begin{aligned} v &= A_1 + A_2 x + A_3 x^2 & \text{dla } \delta \leq x \leq 1; \\ v^* &= A_1^* + A_2^* x + A_3^* x^2 & \text{dla } 0 \leq x \leq \delta. \end{aligned}$$

Stałe całkowania A_i , A_i^* ($i = 1, 2, 3$) oraz stałą δ należy wyznaczyć (z dokładnością do jednej stałej) z następujących warunków brzegowych i warunków «zszycia» parabol [rys. 3 oraz warunki (2.11)]:

$$(4.16) \quad \begin{aligned} v(1) = 0, \quad v(\delta) = 0, \quad v^*(\delta) = 0, \\ v^*(0) - \alpha v^{*'}(0) = 0, \quad v'(\delta) = v^{*'}(\delta), \quad v''(\delta) = -v^{*''}(\delta). \end{aligned}$$

Po prostych obliczeniach otrzymujemy

$$(4.17) \quad \begin{aligned} v &= A_3 [x^2 - (1 + \delta)x + \delta] & \text{dla } \delta \leq x \leq 1, \\ v^* &= -A_3 [x^2 + (1 - 3\delta)x - \delta(1 - 2\delta)] & \text{dla } 0 \leq x \leq \delta, \end{aligned}$$

gdzie

$$(4.18) \quad \delta = \frac{1}{4} [(1 - 3\alpha) - \sqrt{1 + 2\alpha + 9\alpha^2}].$$

Ostatecznie kształt pręta oraz siła krytyczna określone są wzorami

$$(4.19) \quad \begin{aligned} g(x) &= \frac{\delta + (1 + \delta)x + x^2}{\delta + (1 + \delta)x_0 + x_0^2}, & \delta \leq x \leq 1, \\ g^*(x) &= \frac{x^2 + (1 - 3\delta)x - \delta(1 - 2\delta)}{x_0^2 - (1 + \delta)x_0 + \delta}, & 0 \leq x \leq \delta, \end{aligned}$$

$$(4.20) \quad P_k = \frac{2}{-\delta + (1 + \delta)x_0 - x_0^2} \frac{E_0 J_0}{l^2},$$

gdzie

$$J_0 = J(x_0), \quad 0 \leq x_0 \leq 1, \quad x_0 \neq \delta,$$

a stosunek objętości pręta optymalnego do pryzmatycznego o tej samej sile krytycznej jest równy

$$(4.21) \quad \frac{V}{V^{(0)}} = \frac{1}{12} \beta^{(0)} (1 - 3\delta + 6\delta^2 - 6\delta^3).$$

We wzorze tym $\beta^{(0)}$ należy obliczyć (dla danego α) z równania (4.14), a δ ze wzoru (4.18).

Dane liczbowe przedstawiono w tablicy 1, a zależność oszczędności materiału od pewnego parametru ζ , określającego położenie bieguna, na wykresie (rys. 4). Oszczędność materiału wyrażono wzorem

$$(4.22) \quad Z = 1 - \frac{V}{V^{(0)}}$$

Tablica 1

ζ	α	$\beta^{(0)}$	β	$\frac{V}{V^{(0)}}$	Z(%)	δ
$-\infty$	-1,000	0,0000	0,0000	0,7500	25,00	
-17,54	-1,057	0,1600	0,1079	0,7551	24,49	
-10,80	-1,093	0,2500	0,1695	0,7583	24,17	
-4,419	-1,203	0,4900	0,3379	0,7659	23,41	
-1,794	-1,557	1,0000	0,7158	0,7818	21,82	
-0,8749	-2,143	1,4400	1,0667	0,7950	20,50	
-0,3184	-4,141	1,9600	1,517	0,8093	19,07	
-0,1190	-9,401	2,2500	1,787	0,8170	18,30	
0,0000	$\pm \infty$	$\pi^2/4 = 2,4674$	2,000	$\pi^2/12 = 0,8225$	17,75	
0,2958	2,381	3,2400	2,754	0,8404	15,96	
0,3936	1,541	3,6100	3,100	0,8481	15,19	
0,4779	1,093	4,0000	3,453	0,8554	14,46	
0,6727	0,4866	5,2900	4,541	0,8737	12,63	
0,8121	0,2314	6,7600	5,669	0,8809	11,91	
0,8510	0,1751	7,2900	6,060	0,8790	12,10	
0,8873	0,1270	7,8400	6,462	0,8742	12,58	
0,9217	0,08497	8,4100	6,880	0,8655	13,45	
0,9547	0,0475	9,0000	7,321	0,8521	14,79	
0,9708	0,0301	9,3025	7,552	0,8452	15,68	
0,9868	0,0134	9,6100	7,793	0,8327	16,73	
1,0000	0,0000	$\pi^2 = 9,8696$	8,000	$\pi^2/12 = 0,8225$	17,75	0,0000
1,0205	-0,020112	10,2784	8,325	0,8079	19,21	0,01970
1,0618	-0,058222	11,1111	8,952	0,7898	21,02	0,05465
1,1443	-0,12612	12,7021	10,069	0,7877	21,23	0,10862
1,3134	-0,23864	15,1305	11,743	0,7908	20,92	0,17461
1,8351	-0,45508	17,9324	13,919	0,8073	19,27	0,24188
3,2051	-0,68800	19,2967	15,149	0,8133	18,67	0,27330
26,0851	-0,96166	20,1107	15,923	0,8162	18,38	0,29118
$+\infty$	-1,00000	20,1906	16,000	0,8165	18,35	0,29289

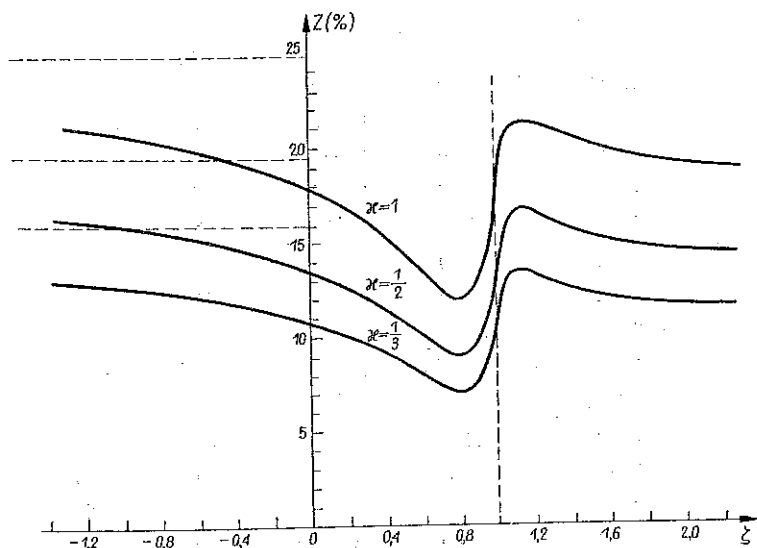
i podano w procentach, a parametr ζ zdefiniowano wzorem $\zeta = 1/(1+a) = l/(a+l)$. Siłę krytyczną β obliczono z różnych wzorów, zależnie od wartości ζ ; tak więc

$$\text{dla } -\infty < \zeta \leq 0 \text{ przyjęto } x_0 = 0, \quad \text{skąd } \beta = \frac{2(1+a)}{a};$$

$$\text{dla } 0 < \zeta \leq 1 \text{ przyjęto } x_0 = \frac{1}{2(1+a)}, \quad \text{skąd } \beta = \frac{8(1+a)^2}{1+4a(1+a)};$$

$$\text{dla } 1 \leq \zeta < +\infty \text{ przyjęto } x_0 = \frac{1}{2}(1+\delta), \quad \text{skąd } \beta = \frac{8}{(1-\delta)^2}.$$

Przy wyborze wartości x_0 kierowano się tym, aby siłę krytyczną zawsze wyrażać przez maksymalny moment bezwładności przekroju pręta.



Rys. 4

4.2. Pręt wszechstronnie równomiernie zbieżny ($\alpha = 1/2$). Również w tym przypadku (zapewne o największym znaczeniu praktycznym) można wykonać efektywne całkowanie we wzorze (4.4) i przedstawić rozwiązanie, wyrażone przez funkcje elementarne w postaci funkcji odwrotnej $x = x(v)$ lub w postaci parametrycznej $x = x(\varphi)$ i $v = v(\varphi)$.

Jeżeli wykonamy podstawienie

$$(4.23) \quad \frac{v^{\frac{2}{3}}}{A_1 v^{\frac{2}{3}} + A_2} = -\frac{1}{A_1} \operatorname{tg}^2 \varphi,$$

to po obliczeniu całki we wzorze (4.4) otrzymamy przedstawienie parametryczne rozwiązania:

$$(4.24) \quad v = A_1' \sin^3 \varphi, \quad x = A_3' + A_2' \left(\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right),$$

w którym A'_1 , A'_2 i A'_3 są pewnymi dowolnymi stałymi całkowania. Przyjmiemy dalej, że wartości $x = 0$ odpowiada pewna wartość φ_0 , a wartości $x = 1$, $\varphi = \varphi_1$ oraz uwzględnimy warunki brzegowe (2.11); drugi z nich, $v(1) = 0$, wskazuje na konieczność przyjęcia $\varphi_1 = 0$. Pozostały warunek pozwala obliczyć związek między φ_0 i α . Ostatecznie przyjmujemy

$$(4.25) \quad v = A \sin^3 \varphi, \\ x = 1 - \frac{\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi}{\varphi_0 - \frac{1}{2} \sin 2\varphi_0}, \quad 0 \leq \varphi \leq \varphi_0$$

oraz

$$(4.26) \quad \alpha = - \frac{2 \sin^3 \varphi_0}{3 \cos \varphi_0 \left(\varphi_0 - \frac{1}{2} \sin 2\varphi_0 \right)},$$

gdzie A jest dowolną stałą, parametr φ zmienia się w granicach od 0 do φ_0 ($0 \leq \varphi \leq \varphi_0$), a parametr φ_0 zależy od położenia bieguna w sposób określony równaniem (4.26).

Moment bezwładności pręta obliczymy w tym przypadku jako funkcję zależną od parametru φ ze wzoru

$$(4.27) \quad g(\varphi) = - \frac{\beta y}{dx^2} = -\beta \frac{v(x')^3}{x' v'' - v' x''},$$

w którym apostrof oznacza różniczkowanie względem φ .

Wykorzystując (4.25) obliczamy

$$(4.28) \quad g(\varphi) = \frac{4}{3} \beta \frac{\sin^4 \varphi}{\left(\varphi_0 - \frac{1}{2} \sin 2\varphi_0 \right)^2},$$

a dalej bezwymiarową siłę krytyczną podając moment bezwładności w pewnym na ogół dowolnie wybranym miejscu pręta. Założymy, że znany jest moment bezwładności dla $x = x_\vartheta$, tzn. dla $\varphi = \vartheta$, założymy, że $g(\vartheta) = 1$. Wobec tego siła krytyczna jest równa

$$(4.29) \quad P_k = \frac{3 \left(\varphi_0 - \frac{1}{2} \sin 2\varphi_0 \right)^2}{4 \sin^4 \vartheta} \frac{E_0 J_\vartheta}{l^2},$$

a moment bezwładności

$$(4.30) \quad J(\varphi) = \frac{\sin^4 \varphi}{\sin^4 \vartheta} J_\vartheta.$$

Długość boku przekroju kwadratowego lub długość promienia przekroju kołowego zmienia się oczywiście według wzoru

$$(4.31) \quad a(\varphi) = \frac{\sin \varphi}{\sin \vartheta} a_\vartheta,$$

gdzie $a_\vartheta = a(\vartheta)$.

Podobnie jak poprzednio możemy tu określić oszczędność materiału w funkcji współczynnika α . Obliczamy w tym celu objętość pręta optymalnego:

$$(4.32) \quad V = A_\vartheta l \int_0^1 g^2 dx = A_\vartheta l \int_{\vartheta_0}^0 g^2 x' d\vartheta,$$

$$V = A_\vartheta l \frac{12\varphi_0 - 8 \sin 2\varphi_0 + \sin 4\varphi_0}{16 \sin^2 \vartheta \left(\varphi_0 - \frac{1}{2} \sin 2\varphi_0 \right)},$$

gdzie $A_\vartheta = A(\vartheta)$ jest polem powierzchni przekroju poprzecznego pręta dla $x = x_\vartheta$. Przeprowadzając rozumowania i obliczenia jak w pkt. 4.1. otrzymujemy

$$(4.33) \quad \frac{V}{V^{(0)}} = \frac{12\varphi_0 - 8 \sin 2\varphi_0 + \sin 4\varphi_0}{8\sqrt{3} \left(\varphi_0 - \frac{1}{2} \sin 2\varphi_0 \right)^2} \sqrt{\beta^{(0)}},$$

gdzie V jest objętością pręta optymalnego, $V^{(0)}$ objętością pręta pryzmatycznego o tej samej sile krytycznej; $\sqrt{\beta^{(0)}}$ należy dla danego α obliczyć z równania (4.14), a φ_0 z równania przestępnego (4.26). Uzyskane wyniki są poprawne w całym przedziale zmienności parametru α ; wynika to od razu z równania różniczkowego (3.20), które przybiera postać

$$(4.34) \quad v (v'')^3 = C.$$

Druga pochodna funkcji v względem x występuje w trzeciej potędze, a zatem nie ma niejednoznaczności znaku.

W szczególnym przypadku, gdy $\alpha \rightarrow -1_{(-)}$, $\varphi_0 \rightarrow 0$, i aby obliczyć $V/V_{(0)}$, należy rozwinąć prawe strony wzorów (4.33), (4.26) i (4.14) na szeregi potęgowe względem zmiennej φ_0 w otoczeniu $\varphi_0 = 0$. Otrzymujemy

$$(4.35) \quad \alpha = - \left(1 + \frac{1}{5} \varphi_0^2 + \dots \right), \quad \beta^{(0)} = \frac{3}{5} \varphi_0^2 + \dots, \quad \frac{V}{V^{(0)}} = \frac{9}{5\sqrt{5}} + \dots,$$

$$Z = 19,5016\%.$$

Korzystając dalej ze wzorów (4.25) i (4.30) możemy obliczyć funkcję rozkładu sztywności pręta:

$$x = 1 - \frac{\varphi^3}{\varphi_0^3} + \dots, \quad \frac{\varphi}{\varphi_0} \approx (1-x)^{\frac{1}{3}}, \quad g(\varphi) = \left(\frac{\varphi}{\varphi_0} \right)^4,$$

a więc po przyjęciu $\vartheta = \varphi_0$, $x_\vartheta = 0$,

$$(4.36) \quad g(x) = (1-x)^{\frac{4}{3}}, \quad \beta = \frac{1}{3} \varphi_0^2 + \dots, \quad a = a_0 \sqrt[3]{1-x}, \quad a_0 = a(0).$$

Gdy siła działająca jest siłą eulerowską, a więc gdy $\alpha \rightarrow \pm\infty$ (pręt wspornikowy) oraz $\alpha = 0$ (pręt dwuprzegubowy), parametr φ_0 jest równy odpowiednio $\pi/2$ oraz π , $V/V_{(0)} = \sqrt{3}/2 = 0,866026$, $Z = 13,3974\%$. Liczbowe wartości siły krytycznej dla pręta optymalnego, siły krytycznej dla pręta pryzmatycznego przy tej samej

Tablica 2

φ_0	ζ	α	$\beta^{(0)}$	β	$\frac{V}{V^{(0)}}$	Z (%)
0,00	$-\infty$	-1,0000	0,0000	0,0000	0,8050	19,50
0,40	-29,070	-1,0344	0,0991	0,05569	0,8075	19,25
0,80	-5,6621	-1,1766	0,4371	0,25526	0,8178	18,22
1,00	-2,8730	-1,3481	0,7358	0,44490	0,8260	17,40
1,20	-1,3745	-1,7276	1,1621	0,73894	0,8371	16,29
1,40	-0,48888	-3,0455	1,7649	1,2081	0,8513	14,87
$\pi/2$	0,00000	$\pm\infty$	2,4674	1,8506	0,8660	13,40
1,70	0,26591	2,7607	3,1418	2,5056	0,8783	12,17
1,80	0,42721	1,3408	3,7566	3,0641	0,8859	11,21
1,90	0,55799	0,79216	4,4521	3,6496	0,8969	10,31
2,00	0,66383	0,50640	5,2153	4,2426	0,9045	9,55
2,20	0,81717	0,22374	6,8257	5,3699	0,9111	8,89
2,60	0,96615	0,035039	9,2149	6,9391	0,8865	11,35
3,00	0,99940	0,000603	9,8577	7,3933	0,8665	13,35
π	1,00000	0,000000	9,8696	7,4022	0,8660	13,40
3,40	1,00366	-0,00365	9,8766	7,4558	0,8603	13,97
3,60	1,02052	-0,02011	10,2784	7,6952	0,8528	14,72
3,80	1,06182	-0,05822	11,1111	8,2471	0,8388	16,12
4,00	1,14432	-0,12612	12,7021	9,2155	0,8331	16,69
4,20	1,31344	-0,23864	15,1305	10,6750	0,8417	15,83
4,40	1,83514	-0,45508	17,9234	12,6539	0,8542	14,58
4,50	3,20512	-0,68800	19,2967	13,8285	0,8589	14,11
4,56	26,0851	-0,96166	20,1107	14,5858	0,8611	13,98
4,5659	-6452,0	-1,00016	20,1906	14,6622	0,8614	13,86

wartości α oraz oszczędności materiału zestawiono w tablicy 2; wykres zależności oszczędności [zdefiniowanej wzorem (4.22)] od parametru $\zeta = l/(l+a)$ przedstawia rys. 4.

Siłę krytyczną obliczano ze wzoru (4.29), przyjmując

$$\vartheta = \varphi_0(0) \quad \text{dla} \quad -\infty < \zeta \leq 0,$$

$$\vartheta = \pi/2 \quad \text{dla} \quad 0 < \zeta < \infty.$$

Przy wyborze ϑ kierowano się jak poprzednio tym, aby siłę krytyczną zawsze wyrażać przez maksymalny moment bezwładności przekroju pręta.

4.3. Pręt płasko-zbieżny o stałej szerokości przekroju poprzecznego ($\alpha = 1/3$). Przez podstawienie

$$(4.37) \quad v = \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 \sin^4 \varphi$$

można całkę (4.4) sprowadzić do prostej postaci i łatwo wykonać całkowanie:

$$(4.38) \quad \begin{aligned} v &= A'_1 \sin^4 \varphi, \\ x &= A'_3 + A'_2 \cos \varphi (3 - \cos^2 \varphi), \end{aligned}$$

gdzie A'_1, A'_2, A'_3 są nowymi dowolnymi stałymi całkowania.

Przyjmując, że $\varphi = \varphi_0$, gdy $x = 0$ i $\varphi = \varphi_1$, gdy $x = 1$ oraz uwzględniając warunki brzegowe (2.11) otrzymujemy

$$(4.39) \quad \begin{aligned} v &= A \sin^4 \varphi, \\ x &= 1 - \frac{2 - 3 \cos \varphi + \cos^3 \varphi}{2 - 3 \cos \varphi_0 + \cos^3 \varphi_0}, \quad 0 \leq \varphi \leq \varphi_0 \end{aligned}$$

oraz

$$(4.40) \quad \alpha = - \frac{3 \sin^4 \varphi_0}{4 \cos \varphi_0 (2 - 3 \cos \varphi_0 + \cos^3 \varphi_0)}.$$

Stała A jest tu dowolna, parametr φ zmienia się w granicach od 0 do φ_0 ($0 \leq \varphi \leq \varphi_0$), a parametr φ_0 zależy od położenia bieguna w sposób określony równaniem (4.40).

Moment bezwładności przekroju zmienia się tu według wzoru

$$(4.41) \quad g(\varphi) = \frac{\sin^6 \varphi}{\sin^6 \vartheta},$$

siła krytyczna jest równa

$$(4.42) \quad P_k = \frac{4(2 - 3 \cos \varphi_0 + \cos^3 \varphi_0)^2}{9 \sin^6 \vartheta} \frac{EJ_\vartheta}{l^2},$$

gdzie

$$J_\vartheta = J(x_\vartheta), \quad x_\vartheta = x(\vartheta),$$

a oszczędność materiału możemy obliczyć z następującego wzoru:

$$(4.43) \quad \frac{V}{V^{(0)}} = \frac{12(1 - \cos \varphi_0) - 4(1 - \cos^3 \varphi_0) - 3 \sin^4 \varphi_0 \cos \varphi_0}{5(2 - 3 \cos \varphi_0 + \cos^3 \varphi_0)} \times \\ \times \sqrt[3]{\frac{9\beta^{(0)}}{4(2 - 3 \cos \varphi_0 + \cos^3 \varphi_0)^2}},$$

przy czym $\beta^{(0)}$ należy obliczyć z równania przestępnego (4.26) i φ_0 z równania (4.40).

Rozwijając prawe strony wzorów (4.43), (4.14) i (4.40) na szereg Maclaurina ze względu na φ_0 , obliczamy oszczędność materiału, siłę krytyczną i kształt pręta w szczególnym przypadku, gdy $\alpha \rightarrow -1_{(-)}$, tzn. gdy biegun, do którego zwrócona jest siła, dąży od góry do swobodnego końca pręta nieodkształconego:

$$(4.44) \quad \frac{V}{V^{(0)}} = \frac{2}{3} \sqrt[3]{2}, \quad Z = 16,0054\%, \quad g(x) = \sqrt{(1-x)^3}, \quad \beta = 0.$$

Dla siły eulerowskiej, tzn. dla $\alpha \rightarrow \pm\infty$ i dla $\alpha = 0$, przyjmując parametr φ_0 równy odpowiednio $\varphi_0 = \pi/2$ i $\varphi_0 = \pi$, mamy

$$\frac{V}{V^{(0)}} = \frac{1}{5} \sqrt[3]{9\pi^2} = 0,892368, \quad Z = 10,7632 \%$$

Wyprowadzone powyżej wzory (4.39), (4.40), (4.42) i (4.43) nie odnoszą się do całego przedziału zmienności α ; odpada przedział $-1 \leq \alpha \leq 0$ odpowiadający położeniu bieguna w obszarze pręta. Takie usytuowanie bieguna powoduje wyboczenie pręta w postaci dwóch półfal, a więc według krzywej, posiadającej punkt przegięcia. Znak krzywizny pręta ulega zmianie w tym punkcie. Podobnie jak w przypadku 4.1 istnieje w równaniu wyjściowym (4.1) $v(v')^2 = C$ niejednoznaczność znaku drugiej pochodnej. Linię ugięcia dla $-1 \leq \alpha \leq 0$ trzeba więc «zszyć» z dwóch krzywych, będących rozwiązaniem równania (4.1), poprawnych w różnych przedziałach zmienności φ :

$$(4.45) \quad \left\{ \begin{array}{l} v = A_1 \sin^4 \varphi \\ x = A_3 + A_2 \cos \varphi (3 - \cos^2 \varphi) \\ \delta \leq x \leq 1 \end{array} \right. \quad \text{oraz} \quad \left\{ \begin{array}{l} v^* = A_1^* \sin^4 \varphi \\ x = A_3^* + A_2^* \cos \varphi (3 - \cos^2 \varphi) \\ 0 \leq x \leq \delta \end{array} \right.$$

Stałe A_i oraz A_i^* ($i = 1, 2, 3$) należy wyznaczyć z warunków brzegowych i warunków «zszycia» (4.16) oraz dodatkowych warunków dla parametru φ (rys. 2):

$$(4.46) \quad \begin{array}{lll} \varphi = \varphi_0 & \text{dla} & x = 0, \\ \varphi = \varphi_1 & \text{dla} & x = 1, \\ \varphi = \psi & \text{dla} & x = \delta. \end{array}$$

Po prostych przeliczeniach otrzymujemy

$$(4.47) \quad \varphi_1 = 0, \quad \psi = \pi,$$

$$(4.48) \quad \left\{ \begin{array}{l} v = A_1 \sin^4 \varphi, \\ x = 1 - \frac{2 - 3 \cos \varphi + \cos^3 \varphi}{6 + 3 \cos \varphi_0 - \cos^3 \varphi_0}, \\ 0 \leq \varphi \leq \pi, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} v^* = -A_1 \sin^4 \varphi, \\ x = \frac{3(\cos \varphi_0 - \cos \varphi) - (\cos^3 \varphi_0 - \cos^3 \varphi)}{6 + 3 \cos \varphi_0 - \cos^3 \varphi_0}, \\ \pi \leq \varphi \leq \varphi_0; \end{array} \right.$$

$$(4.48) \quad \delta = \frac{2 + 3 \cos \varphi_0 - \cos^3 \varphi_0}{6 + 3 \cos \varphi_0 - \cos^3 \varphi_0}, \quad \alpha = \frac{3 \sin^4 \varphi_0}{4 \cos \varphi_0 (6 + 3 \cos \varphi_0 - \cos^3 \varphi_0)},$$

$$-1 \leq \alpha \leq 0.$$

Szywność pręta zmienia się według wzoru (4.41), przy czym siła krytyczna jest równa

$$(4.49) \quad P_k = \frac{4(6 + 3 \cos \varphi_0 - \cos^3 \varphi_0)^2}{9 \sin^6 \vartheta} \frac{E_0 J_\vartheta}{l^2}, \quad J_\vartheta = J(\vartheta) = J(x_\vartheta).$$

Stosunek objętości pręta optymalnego do pryzmatycznego o tej samej sile krytycznej przy $-1 \leq \alpha \leq 0$ może być obliczony ze wzoru

$$(4.50) \quad \frac{V}{V^{(0)}} = \frac{32 - 4(2 + \cos \varphi_0)(1 - \cos \varphi_0)^2 + 3 \sin^4 \varphi_0 \cos \varphi_0}{5(6 + 3 \cos \varphi_0 - \cos^3 \varphi_0)} \times \sqrt[3]{\frac{9\beta^{(0)}}{4(6 + 3 \cos \varphi_0 - \cos^3 \varphi_0)^2}}$$

w którym $\beta^{(0)}$ należy wyznaczyć z równania (4.14), a φ_0 z równania (4.48).

Liczbowe wartości siły krytycznej dla pręta optymalnego, siły krytycznej dla pręta przyrządnego przy tym samym α oraz zysku na materiale zestawiono w tablicy 3. Wykres zależności zysku na materiale od parametru $\zeta = l/(a+l)$ przedstawiono na rys. 4.

Siłę krytyczną obliczono ze wzorów (4.42) i (4.49) przyjmując

$$\vartheta = \varphi_0 \quad (x_\vartheta = 0) \quad \text{dla} \quad -\infty < \zeta \leq 0,$$

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} \quad \text{dla} \quad 0 \leq \zeta < \infty,$$

a więc wyrażono tę siłę przez maksymalny moment bezwładności przekroju pręta.

Tablica 3

φ_0	ζ	α	$\beta^{(0)}$	β	Z (%)	δ
0,00	$-\infty$	-1,0000	0,0000	0,0000	16,0054	
0,40	-34,771	-1,0288	0,0834	0,0422	15,77	
0,80	-6,7029	-1,1492	0,3795	0,2007	15,00	
1,00	-3,3734	-1,2964	0,6555	0,3608	14,31	
1,20	-1,5971	-1,6262	1,0702	0,6255	13,37	
1,40	-0,56069	-2,7835	1,6939	1,0847	12,11	
$\pi/2$	0,00000	$\pm \infty$	2,4675	1,7778	10,7632	
1,70	0,29754	2,3609	3,2461	2,5268	9,62	
1,80	0,47348	1,1120	3,9776	3,1681	8,74	
1,90	0,61215	0,63360	4,8149	3,8314	7,95	
2,00	0,72052	0,38789	5,7279	4,4842	7,37	
2,20	0,86739	0,15289	7,5312	5,6381	7,23	
2,60	0,98456	0,015682	9,5673	6,9054	9,78	
π	1,0000	0,000000	9,8696	7,1111	10,7632	0,00000
3,60	1,0080	-0,0079567	10,0286	7,2213	11,32	0,00766
3,80	1,0333	-0,032241	10,5359	7,5513	12,41	0,02959
4,00	1,0955	-0,087164	11,7807	8,2880	13,40	0,07372
4,20	1,2345	-0,18997	14,1534	9,5979	13,10	0,13924
4,40	1,6443	-0,39184	17,3256	11,5919	11,92	0,21677
4,50	2,5266	-0,60421	18,9112	12,8498	11,45	0,25609
4,581	70,776	-0,98587	20,1619	13,9837	11,15	0,28689
4,5869	-3831,4	-1,00026	20,1906	14,0114	11,15	0,28759

Na zakończenie tej części wykonano obliczenia kształtów pręta wszechstronnie równomiernie zbieżnego ($\kappa = 1/2$) w trzech przypadkach położenia bieguna:

- 1 $a = -1,176613$ ($\varphi_0 = 0,80$),
- 2 $a = 0,223737$ ($\varphi_0 = 2,20$),
- 3 $a = -0,238643$ ($\varphi_0 = 4,20$).

Dane zebrano w tablicy 4, a kształty prętów w zakresie sprężystym pokazano na rys. 5.

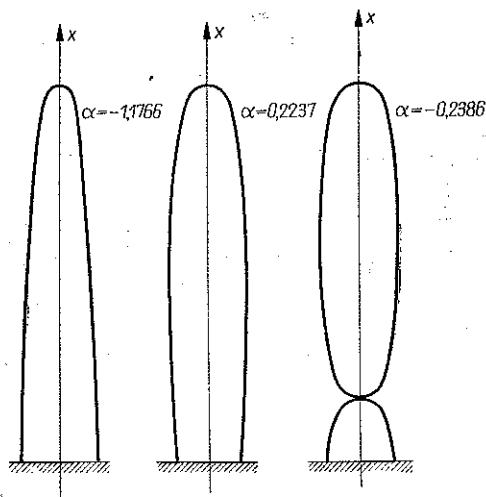
Należy zauważyć, że otrzymane kształty prętów mają zawsze pole powierzchni przekroju na końcu swobodnym równą zero, a w przypadku obciążenia siłą skiero-

Tablica 4

φ	$a = -1,176613$		$a = 0,223737$		$a = -0,238643$	
	x	$\frac{a(x)}{a_0}$	x	$\frac{a(x)}{a_0}$	x	$\frac{a(x)}{a_0}$
0,00	1,00000	0,00000	1,00000	0,00000	1,00000	0,00000
0,10	0,99778	0,13917	0,99975	0,09983		
0,20	0,98238	0,27695	0,99802	0,19867	0,99860	0,19876
0,25	0,96573	0,34488				
0,30	0,94111	0,41196				
0,40	0,86236	0,54285	0,98456	0,38942	0,98905	0,38942
0,50	0,73597	0,66832				
0,60	0,55371	0,78716	0,94993	0,56464	0,96449	0,56464
0,70	0,30957	0,89805				
0,80	0,00000	1,00000	0,88780	0,71736	0,92043	0,71736
1,00			0,79619	0,84147	0,85545	0,84147
1,20			0,67775	0,93204	0,77145	0,93204
1,40			0,53939	0,98545		
$\pi/2$			0,41296	1,00000	0,58364	1,00000
1,80			0,24462	0,97385		
2,00			0,11115	0,90930	0,36958	0,90930
2,20			0,00000	0,80850		
2,40					0,23183	0,67546
2,80					0,17416	0,33499
π					0,16728	0,00000
3,30					0,16659	0,15775
3,60					0,15096	0,44252
4,00					0,07087	0,75680
4,20					0,00000	0,87158

waną do bieguna, leżącego w przedziale długości pręta, pręt posiada przekrój o polu równym zero również w innym miejscu. Wobec tego w zakresie sprężystym naprężenia pochodzące od siły ściskającej

zmierzają w tych punktach do nieskończoności i rzeczą konieczną jest uwzględnienie tu teorii sprężysto-plastycznego wybożenia prętów.



Rys. 5

5. Wpływ niejednorodności podłużnej na optymalny kształt pręta ściskanego siłą skierowaną do bieguna

Równanie (3.9) lub (3.20) zostało wyprowadzone dla dowolnej niejednorodności podłużnej modułu Younga, przy czym założono, że $E(x) = E_0 f(x)$, gdzie $f(x_0) = 1$.

W tej części postaramy się zbadać, jaki wpływ na optymalny kształt pręta ma niejednorodność modułu Younga.

5.1. Pręt płasko-zbieżny o stałej wysokości przekroju poprzecznego ($\kappa = 1$). Jako pierwszy rozpatrzmy przypadek pręta płasko-zbieżnego, wybaczącego się z płaszczyzny zbieżności, obciążonego siłą skierowaną do bieguna.

Równanie linii ugięcia pręta jest tu bardzo proste i może być scałkowane efektywnie dla wielu różnych sposobów zmiany modułu Younga (a formalnie dla dowolnego rozkładu modułu Younga):

$$(5.1) \quad v'' = Cf^{-\frac{1}{2}}.$$

Do dalszych obliczeń przyjmiemy

$$(5.2) \quad f(x) = (1 + \varepsilon x)^\delta,$$

gdzie ε jest to pewna stała spełniająca warunek $\varepsilon \geq -1$ oraz δ — dowolna stała.

Dobierając ε i δ możemy otrzymać dowolnie wiele przypadków niejednorodności oraz w sposób przybliżony dostosować je do z góry danego rozkładu modułu Younga.

Wykonując całkowanie w równaniu (5.1) i uwzględniając warunki brzegowe (2.11) obliczamy funkcję linii ugięcia:

$$(5.3) \quad v = \frac{C_1}{1+a} \left\{ (1+a)(1+\varepsilon x)^{-\frac{\delta}{2}+2} - (x+a)(1+\varepsilon)^{-\frac{\delta}{2}+2} - \left[1 - a\varepsilon \left(-\frac{\delta}{2} + 2 \right) \right] (1-x) \right\}.$$

W dalszym ciągu ze wzoru (2.10) określamy sztywność pręta oraz siłę krytyczną (wyrażoną przez sztywność $E_0 J_0$ w pewnym dowolnie wybranym punkcie $x = x_0$):

$$(5.4) \quad (g(x)) = \frac{\left\{ (x+a)(1+\varepsilon)^{-\frac{\delta}{2}+2} - (1+a)(1+\varepsilon x)^{-\frac{\delta}{2}+2} + \left[1 - a\varepsilon \left(-\frac{\delta}{2} + 2 \right) \right] (1-x) \right\} (1+\varepsilon x)^{\frac{\delta}{2}}}{\left\{ (x_0+a)(1+\varepsilon)^{-\frac{\delta}{2}+2} - (1+a)(1+\varepsilon x_0)^{-\frac{\delta}{2}+2} + \left[1 - a\varepsilon \left(-\frac{\delta}{2} + 2 \right) \right] (1-x_0) \right\} (1+\varepsilon x_0)^{\frac{\delta}{2}}},$$

$$(5.5) \quad P_k = \frac{\varepsilon^2 (1+a) \left(-\frac{\delta}{2} + 2 \right) \left(-\frac{\delta}{2} + 1 \right) (1+\varepsilon x_0)^{-\frac{\delta}{2}}}{(x_0+a)(1+\varepsilon)^{-\frac{\delta}{2}+2} - (1+a)(1+\varepsilon x_0)^{-\frac{\delta}{2}+2} + \left[1 - a\varepsilon \left(-\frac{\delta}{2} + 2 \right) \right] (1+x_0)} \frac{E_0 J_0}{l^2}.$$

Łatwo można sprawdzić, że gdy $\delta = 0$ lub $\varepsilon \rightarrow 0$, siła krytyczna jest określona podanym już wzorem (4.8). W szczególnym przypadku położenia bieguna, gdy $a \rightarrow -1$, otrzymujemy

$$(5.6) \quad P_k = 0, \quad g(x) = \frac{(1-x)(1+\varepsilon x)^{\frac{\delta}{2}}}{(1-x_0)(1+\varepsilon x_0)^{\frac{\delta}{2}}}$$

lub dla $x_0 = 0$,

$$g(x) = (1-x)(1+\varepsilon x)^{\frac{\delta}{2}}.$$

Optymalny kształt pręta niejednorodnego jest tu opisany iloczynem funkcji sztywności pręta jednorodnego i funkcji $(1+\varepsilon x)^{\frac{\delta}{2}}$. Wzory (5.4) i (5.5) są nieoznaczone dla $\delta = 2$ i $\delta = 4$; po przejściu do granicy mamy

1) dla $\delta = 2$

$$(5.7) \quad g(x) = \frac{(1+\varepsilon x) \{ (1+\varepsilon x) [1 - \ln(1+\varepsilon x)] - x(1+\varepsilon) [1 - \ln(1+\varepsilon)] + \alpha(1+\varepsilon x) [1 - \ln(1+\varepsilon x)] - \alpha(1+\varepsilon) [1 - \ln(1+\varepsilon)] + (x-1) \}}{(1+\varepsilon x_0) \{ (1+\varepsilon x_0) [1 - \ln(1+\varepsilon x_0)] - x_0(1+\varepsilon) [1 - \ln(1+\varepsilon)] + \alpha(1+\varepsilon x_0) [1 - \ln(1+\varepsilon x_0)] - \alpha(1+\varepsilon) [1 - \ln(1+\varepsilon)] + (x_0-1) \}},$$

$$P_k = \frac{\varepsilon^2 (1+a)}{(1+\varepsilon x_0) \{ (1+\varepsilon x_0) [1 - \ln(1+\varepsilon x_0)] - x_0(1+\varepsilon) [1 - \ln(1+\varepsilon)] + \alpha(1+\varepsilon x_0) [1 - \ln(1+\varepsilon x_0)] - \alpha(1+\varepsilon) [1 - \ln(1+\varepsilon)] + (x_0-1) \}} \frac{E_0 J_0}{l^2};$$

2) dla $\delta = 4$

$$g(x) = \frac{(1+\varepsilon x)^2 [\ln(1+\varepsilon x) - x \ln(1+\varepsilon) + a \ln(1+\varepsilon x) - a \ln(1+\varepsilon) + a\varepsilon(1-x)]}{(1+\varepsilon x_0)^2 [\ln(1+\varepsilon x_0) - x_0 \ln(1+\varepsilon) + a \ln(1+\varepsilon x_0) - a \ln(1+\varepsilon) + a\varepsilon(1-x_0)]},$$

$$(5.8) \quad P_k = \frac{\varepsilon^2(1+a)}{(1+\varepsilon x_0)^2 [\ln(1+\varepsilon x_0) - x_0 \ln(1+\varepsilon) + a \ln(1+\varepsilon x_0) - a \ln(1+\varepsilon) + a\varepsilon(1-x_0)]} \frac{E_0 J_0}{l^2}.$$

Wyniki przedstawione równaniami (5.4), (5.5), (5.7) i (5.8) nie są poprawne dla $-1 < a < 0$, jednak wobec mniejszego znaczenia takiego położenia bieguna dalszych obliczeń nie wykonano.

5.2. Pręt wszechstronnie równomiernie zbieżny ($\nu = 1/2$). Ścisłe scałkowanie równania

$$(5.9) \quad v'' v^{\frac{1}{3}} f^{\frac{1}{3}} = C$$

dla dowolnych (lub nawet pewnych) danych funkcji $f(x)$ wydaje się rzeczą niemożliwą. Można tu jednak dla z góry danego kształtu linii ugięcia otrzymać takie funkcje rozkładu modułu Younga, że równanie (5.9) będzie spełnione, oraz przez dobór pewnych dowolnych stałych wykazać przybliżoną zgodność obliczonej funkcji rozkładu modułu Younga z funkcją podaną z góry.

Z (5.9) wynika, że wobec warunku brzegowego $v|_1 = 0$ pochodna v'' ma osobliwość w punkcie $x = 1$ i jak można wywnioskować jest to osobliwość typu $(1-x)^{-\frac{1}{3}}$. Przyjmijmy zatem, że v'' jest iloczynem funkcji z podaną osobliwością i funkcji regularnej $F(x)$ takiej, że $F(1) \neq 0$:

$$(5.10) \quad v'' = C(1-x)^{-\frac{1}{3}} F(x).$$

Wstawiając (5.10) do (5.9) obliczymy nieznaną funkcję $f(x)$ ze wzoru

$$(5.11) \quad f(x) = \frac{1-x}{vF^3},$$

w którym $F(x)$ jest funkcją daną, a $v(x)$ należy obliczyć z równania (5.10).

Aby uprościć całkowanie tego równania, celowe jest wprowadzenie nowej zmiennej niezależnej u , zdefiniowanej następująco:

$$(5.12) \quad u = (1-x)^{\frac{1}{3}}.$$

Przez podstawienie (5.12) sprowadzamy równanie (5.10) do postaci:

$$(5.13) \quad u \frac{d^2 v}{du^2} - 2 \frac{dv}{du} = C \cdot 9u^4 F(u),$$

a warunki brzegowe (2.11) do (5.14):

$$(5.14) \quad [v]_{u=0} = 0, \quad \left[v + \frac{\alpha}{3u^2} \frac{dv}{du} \right]_{u=1} = 0.$$

Wprowadzając nową zmienną zależną $w(u) = dv/du$ przekształcamy (5.13) w równanie różniczkowe liniowe pierwszego rzędu, które można zupełnie łatwo scałkować; ostatecznie otrzymujemy

$$(5.15) \quad v(u) = C_1 \int [u^2 \int uF(u) du] du + C_2 u^3 + C_3,$$

gdzie C_1, C_2, C_3 oznaczają stałe całkowania.

Do dalszych obliczeń trzeba przyjąć konkretną postać funkcji $F(u)$; jak widać z (5.15) wygodnie jest założyć, że $F(u)$ jest wielomianem N -go stopnia:

$$(5.16) \quad F(u) = \sum_{n=0}^N a_n u^n,$$

gdzie a_n są dowolnymi współczynnikami oraz $a_0 \neq 0$.

Dla tak przyjętej funkcji $F(u)$ obliczenie ugięcia niejednorodnego pręta optymalnego nie przedstawia żadnych trudności; po uwzględnieniu warunków brzegowych (5.14) otrzymujemy

$$(5.17) \quad v(u) = Au^3 \left[\sum_{n=0}^N a_n \frac{3+\alpha(n+5)}{(n+2)(n+5)} - 3(1+\alpha) \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{(n+2)(n+5)} u^{n+2} \right].$$

Ze wzoru

$$(5.18) \quad g(u) = -\beta \frac{9u^5 v}{u \frac{d^2 v}{du^2} - 2 \frac{dv}{du}}$$

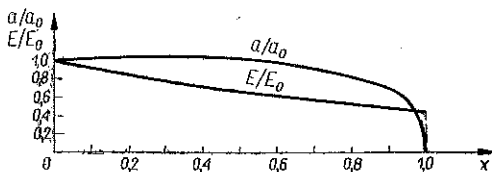
obliczymy sztywność pręta oraz siłę krytyczną (wyrażoną przez moment bezwładności J_0 w przekroju pręta $u = \vartheta$):

$$(5.19) \quad g(u) = \frac{u^4 \left[\sum_{n=0}^N a_n \frac{3+\alpha(n+5)}{(n+2)(n+5)} - 3(1+\alpha) \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{(n+2)(n+5)} u^{n+2} \right] \sum_{n=0}^N a_n \vartheta^n}{\vartheta^4 \left[\sum_{n=0}^N a_n \frac{3+\alpha(n+5)}{(n+2)(n+5)} - 3(1+\alpha) \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{(n+2)(n+5)} \vartheta^{n+2} \right] \sum_{n=0}^N a_n u^n}$$

$$(5.20) \quad P_k = \frac{(1+\alpha) \sum_{n=0}^N a_n \vartheta^n}{3\vartheta^4 \left[\sum_{n=0}^N a_n \frac{3+\alpha(n+5)}{(n+2)(n+5)} - 3(1+\alpha) \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{(n+2)(n+5)} \vartheta^{n+2} \right]} \frac{E_0 J_0}{l^2}$$

Rozkład modułu Younga określa wzór (5.11) oraz warunek $f(\vartheta) = 1$, tzn. $E(\vartheta) = E_0$:

$$(5.21) \quad f(u) = \frac{\left[\sum_{n=0}^N a_n \frac{3+a(n+5)}{(n+2)(n+5)} - 3(1+a) \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{(n+2)(n+5)} \vartheta^{n+2} \right] \left(\sum_{n=0}^N a_n \vartheta^n \right)^3}{\left[\sum_{n=0}^N a_n \frac{3+a(n+5)}{(n+2)(n+5)} - 3(1+a) \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{(n+2)(n+5)} u^{n+2} \right] \left(\sum_{n=0}^N a_n u^n \right)^3}$$



Rys. 6

Współczynniki a_i można tu dobrać w taki sposób, aby funkcja $f(u)$ była zbliżona do podanej z góry.

Przykład 1. Przyjmując np. $a_0 \neq 0$, $a_i = 0$ dla $i > 0$ ($N = 0$) otrzymujemy

$$(5.22) \quad f(u) = \frac{(3+5a) - 3(1+a)\vartheta^2}{(3+5a) - 3(1+a)u^2}, \quad g(u) = \frac{u^4 [(3+5a) - 3(1+a)u^2]}{\vartheta^4 [(3+5a) - 3(1+a)\vartheta^2]},$$

$$P_k = \frac{10(1+a)}{3\vartheta^4 [(3+5a) - 3(1+a)\vartheta^2]} \frac{E_0 J_0}{l^2}, \quad E_0 = E(\vartheta), \quad J_0 = J(\vartheta).$$

W szczególnym przypadku działania siły eulerowskiej na pręt wspornikowy, tzn. gdy $a \rightarrow \pm \infty$, przyjmując $\vartheta = 1$ ($x_\vartheta = 0$) mamy

$$(5.23) \quad f(x) = \frac{2}{5 - 3\sqrt[3]{(1-x)^2}},$$

$$g(x) = \frac{1}{2}(1-x)\sqrt[3]{1-x} [5 - 3\sqrt[3]{(1-x)^2}], \quad P_k = \frac{5}{3} \frac{E_0 J_0}{l^2}.$$

Kształt pręta i rozkład modułu Younga pokazano na rys. 6, a dane liczbowe zamieszczono w tablicy 5.

Tablica 5

x	$\frac{E}{E_0}$	$\frac{J}{J_0}$	$\frac{a}{a_0}$
0,00	1,00000	1,00000	1,00000
0,20	0,82827	1,08254	1,01982
0,40	0,69787	1,03909	1,00965
0,60	0,59323	0,83745	0,95662
0,80	0,50327	0,46178	0,82434
0,90	0,45938	0,21995	0,68421
0,95	0,43546	0,09714	0,55827
1,00	0,40000	0,00000	0,00000

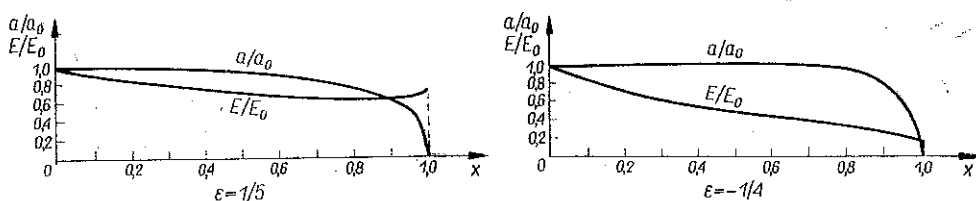
Przykład 2. Przyjmując $a_0 \neq 0$, $a_1 \neq 0$, $a_i = 0$ dla $i > 1$ ($N = 1$) i oznaczając $a_1/a_0 = \varepsilon$, otrzymujemy

$$f(u) = \frac{\{[9(3+5\alpha)+15(1+2\alpha)\varepsilon] - 3(1+\alpha)(9+5\varepsilon\vartheta)\vartheta^2\}(1+\varepsilon\vartheta)^3}{\{[9(3+5\alpha)+15(1+2\alpha)\varepsilon] - 3(1+\alpha)(9+5\varepsilon u)u^2\}(1+\varepsilon u)^3},$$

$$(5.24) \quad g(u) = \frac{u^4 \{[9(3+5\alpha)+15(1+2\alpha)\varepsilon] - 3(1+\alpha)(9+5\varepsilon u)u^2\}(1+\varepsilon\vartheta)}{\vartheta^4 \{[9(3+5\alpha)+15(1+2\alpha)\varepsilon] - 3(1+\alpha)(9+5\varepsilon\vartheta)\vartheta^2\}(1+\varepsilon u)},$$

$$P_k = \frac{30(1+\alpha)(1+\varepsilon\vartheta)}{\vartheta^4 \{[9(3+5\alpha)+15(1+2\alpha)\varepsilon] - 3(1+\alpha)(9+5\varepsilon\vartheta)\vartheta^2\}} \frac{E_0 J_0}{l^2},$$

$$E_0 = E(\vartheta), \quad J_0 = J(\vartheta).$$



Rys. 7

Dla pręta wspornikowego ściskanego siłą eulerowską ($\alpha \rightarrow \pm\infty$) przy $\vartheta = 1$ ($x = 0$) wzory (5.24) znacznie się upraszczają:

$$f(u) = \frac{(6+5\varepsilon)(1+\varepsilon)^3}{[(15+10\varepsilon) - (9+5\varepsilon u)u^2](1+\varepsilon u)^3}$$

$$(5.25) \quad g(u) = \frac{u^4 [5(3+2\varepsilon) - (9+5\varepsilon u)u^2](1+\varepsilon)}{(6+5\varepsilon)(1+\varepsilon u)}, \quad \text{gdzie } u = \sqrt[3]{1-\varepsilon}$$

$$P_k = \frac{10(1+\varepsilon)}{6+5\varepsilon} \frac{E_0 J_0}{l^2}.$$

Istnieje tu możliwość doboru funkcji $f(u)$ przez zmiany parametru ε . Na wykresach (rys. 7) pokazano kształt pręta i rozkład modułu Younga dla $\varepsilon = 1/5$ i $\varepsilon = -1/4$, a dane liczbowe zebrano w tablicy 6.

Gdy

$$\varepsilon = \frac{1}{5}, \quad f(u) = \frac{1512}{(17-9u^2-u^3)(5+u)^3}, \quad g(u) = \frac{6u^4(17-9u^2-u^3)}{7(5+u)},$$

to

$$P_k = \frac{12}{7} \frac{E_0 J_0}{l^2}.$$

Tablica 6

x	$\varepsilon = \frac{1}{5}$			$\varepsilon = \frac{1}{4}$		
	$\frac{E}{E_0}$	$\frac{J}{J_0}$	$\frac{a}{a_0}$	$\frac{E}{E_0}$	$\frac{J}{J_0}$	$\frac{a}{a_0}$
0,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,10	0,9237	0,9627	0,9905	0,8767	1,0801	1,0000
0,20	0,8594	0,9067	0,9758	0,7704	1,1385	1,0330
0,30	0,8048	0,8328	0,9553	0,6776	1,1690	1,0398
0,40	0,7580	0,7421	0,9282	0,5955	1,1643	1,0388
0,50	0,7179	0,6359	0,8930	0,5219	1,1167	1,0280
0,60	0,6837	0,5158	0,8475	0,4549	1,0175	1,0043
0,70	0,6550	0,3846	0,7875	0,3926	0,8576	0,9623
0,80	0,6326	0,2463	0,7045	0,3329	0,6285	0,8904
0,90	0,6195	0,1089	0,5745	0,2715	0,3263	0,7558
1,00	0,7115	0,0000	0,0000	0,1603	0,0000	0,0000

Gdy

$$\varepsilon = \frac{1}{4}, \quad f(u) = \frac{513}{[50 - (36 - 5u)u^2](4 - u)^3},$$

$$g(u) = \frac{3u^4 [50 - (36 - 5u)u^2]}{19(4 - u)},$$

to

$$P_k = \frac{30}{19} \frac{E_0 J_0}{l^2}.$$

5.3. Pręt płasko-zbieżny o stałej szerokości przekroju poprzecznego ($\alpha = 1/3$). Podobnie jak w części 5.2 zastosujemy tu do równania

$$(5.26) \quad v'' v^{\frac{1}{2}} f^{\frac{1}{4}} = C$$

metodę odwrotną, tzn. obierzemy postać funkcji v'' , a obliczymy rozkład modułu Younga. Ponieważ funkcja v'' posiada osobliwość typu $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ [wynika to z równania (5.26) i z warunku brzegowego $v(1) = 0$], więc przyjmujemy

$$(5.27) \quad v'' = C(1-x)^{-\frac{1}{2}} F(x),$$

gdzie $F(x)$ jest daną funkcją regularną w przedziale $\langle 0, 1 \rangle$ i taką, że $F(1) \neq 0$.

Wstawiając (5.27) do (5.26) obliczamy

$$(5.28) \quad f(x) = \frac{(1-x)^2}{v^2 [F(x)]^4}.$$

Przez wprowadzenie nowej zmiennej niezależnej

$$(5.29) \quad u = (1 - x)^{\frac{1}{2}},$$

sprowadzamy równanie (5.27) do postaci

$$(5.30) \quad \frac{d^2 v}{du^2} - \frac{1}{u} \frac{dv}{du} = C \cdot 4u F(u),$$

a warunki brzegowe (2.11) do postaci

$$(5.31) \quad [v]_{u=0} = 0, \quad \left[v + \frac{a}{2u} \frac{dv}{du} \right]_{u=1} = 0.$$

Całką ogólną równania (5.30) jest funkcja

$$(5.32) \quad v(u) = C_1 \int \left[u \int F(u) du \right] du + C_2 u^2 + C_3,$$

w której stałe C_1 , C_2 i C_3 są dowolne, a $F(u)$ przyjmujemy jak poprzednio:

$$(5.33) \quad F(u) = \sum_{n=0}^N a_n u^n, \quad a_0 \neq 0.$$

Po prostych przeliczeniach i wykorzystaniu warunków brzegowych otrzymujemy

$$(5.34) \quad v = Au^2 \left[\sum_{n=0}^N a_n \frac{2+\alpha(n+3)}{(n+1)(n+3)} - 2(1+\alpha) \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{(n+1)(n+3)} u^{n+1} \right]$$

oraz ze wzoru (5.35) i warunku $J(\vartheta) = J_0$ sztywność pręta i siłę krytyczną:

$$(5.35) \quad g(u) = -\beta \frac{4u^2 v}{\frac{d^2 v}{du^2} - \frac{1}{u} \frac{dv}{du}},$$

$$(5.36) \quad g(u) = \frac{u^3 \left[\sum_{n=0}^N a_n \frac{2+\alpha(n+3)}{(n+1)(n+3)} - 2(1+\alpha) \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{(n+1)(n+3)} u^{n+1} \right] \sum_{n=0}^N a_n \vartheta^n}{\vartheta^3 \left[\sum_{n=0}^N a_n \frac{2+\alpha(n+3)}{(n+1)(n+3)} - 2(1+\alpha) \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{(n+1)(n+3)} \vartheta^{n+1} \right] \sum_{n=0}^N a_n u^n},$$

$$(5.37) \quad P_k = \frac{(1+\alpha) \sum_{n=0}^N a_n \vartheta^n}{2\vartheta^3 \left[\sum_{n=0}^N a_n \frac{2+\alpha(n+3)}{(n+1)(n+3)} - 2(1+\alpha) \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{(n+1)(n+3)} \vartheta^{n+1} \right]} \frac{E_0 J_0}{l^2}.$$

Rozkład modułu Younga obliczamy ze wzoru (5.28) przy warunku $f(\vartheta) = 1$, tzn. $E(\vartheta) = E_0$:

$$(5.38) \quad f(u) = \frac{\left[\sum_{n=0}^N a_n \frac{2+\alpha(n+3)}{(n+1)(n+3)} - 2(1+\alpha) \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{(n+1)(n+3)} \vartheta^{n+1} \right]^2 \left(\sum_{n=0}^N a_n \vartheta^n \right)^4}{\left[\sum_{n=0}^N a_n \frac{2+\alpha(n+3)}{(n+1)(n+3)} - 2(1+\alpha) \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{(n+1)(n+3)} u^{n+1} \right]^2 \left(\sum_{n=0}^N a_n u^n \right)^4}.$$

Przykład. Przykładowo przyjmijmy $a_0 \neq 0$, $a_1 \neq 0$, $a_i = 0$ dla $i > 1$ ($N = 1$):

$$\varepsilon = \frac{a_1}{a_0},$$

$$(5.39) \quad f(u) = \frac{\{[4(2+3\alpha)+3(1+2\alpha)\varepsilon] - (1+\alpha)(8+3\varepsilon\vartheta)\vartheta\}^2(1+\varepsilon\vartheta)^4}{\{[4(2+3\alpha)+3(1+2\alpha)\varepsilon] - (1+\alpha)(8+3\varepsilon u)u\}^2(1+\varepsilon u)^4},$$

$$g(u) = \frac{u^3 \{[4(2+3\alpha)+3(1+2\alpha)\varepsilon] - (1+\alpha)(8+3\varepsilon)u\}(1+\varepsilon\vartheta)}{\vartheta^3 \{[4(2+3\alpha)+3(1+2\alpha)\varepsilon] - (1+\alpha)(8+3\varepsilon\vartheta)\vartheta\}(1+\varepsilon u)},$$

$$P_k = \frac{6(1+\alpha)(1+\varepsilon\vartheta)}{\vartheta^3 \{[4(2+3\alpha)+3(1+2\alpha)\varepsilon] - (1+\alpha)(8+3\varepsilon\vartheta)\vartheta\}} \frac{E_0 J_0}{l^2}.$$

Dla pręta wspornikowego ściskanego siłą eulerowską ($\alpha \rightarrow \pm\infty$) przy $\vartheta = 1$ ($x = 0$) wzory (5.39) ulegają znacznemu uproszczeniu:

$$(5.40) \quad f(u) = \frac{(4+3\varepsilon)^2(1+\varepsilon)^4}{[6(2+\varepsilon) - (8+3\varepsilon u)u]^2(1+\varepsilon u)^4},$$

$$g(u) = \frac{u^3 [6(2+\varepsilon) - (8+3\varepsilon u)u](1+\varepsilon)}{(4+3\varepsilon)(1+\varepsilon u)},$$

$$P_k = \frac{6(1+\varepsilon)}{4+3\varepsilon} \frac{E_0 J_0}{l^2}.$$

5.4. Niejednorodność optymalnego pręta przyrządnego. Na marginesie omawianych zagadnień leży dosyć ciekawy problem: dla jakiego rozkładu modułu Younga pręt nieprzyrządnym o danym momencie bezwładności $\varphi(x)$ jest prętem optymalnym?

Układ równań opisujących ten problem jest następujący:

$$(5.41) \quad g(x) = -\beta \frac{v}{v''}, \quad E = E_0 f(x),$$

$$v'' v^{\frac{1-\kappa}{1+\kappa}} f^{\frac{\kappa}{1+\kappa}} = C,$$

przy czym

$$J = J_0 \varphi(x), \quad EJ = E_0 J_0 g(x), \quad \frac{g(x)}{f(x)} = \varphi(x).$$

Układ ten można łatwo przekształcić otrzymując jedno równanie różniczkowe nieliniowe i niejednorodne na funkcję $v(x)$

$$(5.42) \quad v'' v = C\varphi^x$$

oraz wzór na rozkład modułu Younga

$$(5.43) \quad f(x) = Cv^2.$$

Najprostszy przypadek odpowiada zagadnieniu poszukiwania takiego rozkładu modułu Younga, aby pręt pryzmatyczny był optymalny. W równaniu (5.42) musimy przyjąć $\varphi(x) \equiv 1$; jednak rozwiązanie nawet tak uproszczonego równania może być przedstawione tylko w postaci całki

$$(5.44) \quad x = C_1 \int_{v_0}^v \frac{dt}{\sqrt{1 + C_2 \ln t}}.$$

Jeżeli przyjmiemy w dalszym ciągu, że pręt pryzmatyczny jest wspornikowy i obciążony siłą eulerowską

($\alpha \rightarrow \pm\infty$), dokonamy podstawienia $v = e^{-w^2}$ oraz uwzględnimy warunki brzegowe, otrzymamy rozwiązanie w postaci parametrycznej:

$$x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^w e^{-t^2} dt = \operatorname{erf} w = \Phi(w\sqrt{2}),$$

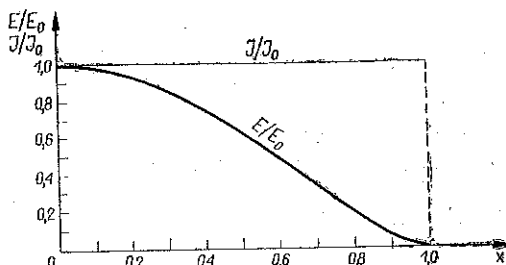
(5.45)

$$v = e^{-w^2},$$

$$f(w) = e^{-2w^2}, \quad \text{gdzie} \quad 0 \leq w < \infty,$$

$$v(0) = 1, \quad f(0) = 1.$$

Korzystając z tablic funkcji Gaussa bardzo łatwo obliczymy poszukiwany rozkład modułu Younga (rys. 8). Oczywiście na końcu swobodnym pręta ($w = \infty$, $x = 1$) moduł ten jest równy zero i jak wynika z (5.45), kąt ugięcia na tym końcu jest równy $\pi/2$.



Rys. 8

Literatura cytowana w tekście

1. H. BLASIUS, Zeitsch. für Math. und Physik, **62** (1914), 182-197.
2. G. BÜRGERMEISTER, H. STEUP, *Stabilitätstheorie*, Akad.-Verlag, Berlin 1957.
3. T. CLAUSEN, *Über die Form architektonischer Säulen*, Bull. physico-math. et astronomique, **1** (1849-1853), 279-294.
4. Н. Г. ЧЕНЦОВ, *Стойки наименьшего веса*, Труды ЦАГИ, 265, 1936.
5. D. DMITRIJUK, *Siła krytyczna ramienia dźwigu przy wyobczeniu z płaszczyzny zawieszenia*, Rozpr. Inżyn., **1**, **15** (1967), 73-91.

6. В. И. Феодосиев, *Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов*, Изд. Наука, Москва 1967.
7. J. B. KELLER, *The Shape of the Strongest Column*, Arch. Rat. Mech. Anal., 4, 5 (1960), 275-285.
8. И. Я. Коган, *Устойчивость поворотных колонн башенных кранов*, Расчет пространственных конструкций, 4, Москва 1958, 57-71.
9. W. KRZYŚ, M. ŻYCZKOWSKI, *Pewna metoda tzw. parametrycznego kształtowania wytrzymałościowego*, Rozpr. Inżyn. 4, 11 (1963), 643-666.
10. W. KRZYŚ, M. ŻYCZKOWSKI, *Klasyfikacja problemów kształtowania wytrzymałościowego*, Czas. Techn. 2, 68 (1963), 1-3.
11. W. KRZYŚ, *Optymalne kształtowanie z uwagi na stateczność, ściskanych słupów cienkościennych o profilu zamkniętym*, Mechanika, Zesz. nauk. Pol. Krakowskiej, nr 4, 1967.
12. P. LAASONEN, *Nurjahdustuen edullisimmasta poikkipinnanvalinnasta* [On the Selection of the Most Advantageous Cross-section of a Buckling Bar], Tekn. Ailk. 2, 38 (1948), 49-52.
13. J. L. LAGRANGE, *Sur la figure des colonnes*, Miscellanea Taurinensia, 5 (1770-1773), 123.
14. Е. Л. Николаи, *Задача Лагранжа о пайвыгоднейшем очертании колонн*, Труды по механике, Москва 1955, 9-44.
15. Я. Г. Пановко, И. И. Губанова, *Устойчивость и колебания упругих систем*, Москва 1967.
16. R. ROSMAN, *Knickuntersuchung des elastisch eingespannten Kragträgers mit veränderlichem Trägheitsmoment unter dem Einfluss poltreuer Belastung*, Österr. Ing.-Zeit., 5, 3 (1960), 173-174.
17. R. ROSMAN, *Beitrag zur Ermittlung der Knicklängenbeiwerte elastisch eingespannter Kragträger unter dem Einfluss poltreuer Belastung*, Österr. Ing.-Zeit., 2, 3 (1960), 74-76.
18. R. ROSMAN, *Iznaleženje stabilitetnog kriterija elastično upete konsole promjenljivog momenta inercije pod uticajem sile promjenljivog smjera*, Tehnika, 4, 16 (1961).
19. J. ТАДЖАКШИ, J. B. KELLER, *Strongest column and isoperimetric inequalities for eigenvalues*, J. Appl. Mech., 29 (1962), 159-164.
20. J. E. TAYLOR, *The strongest column*, J. Appl. Mech., 34, (1967), 486-487.
21. M. ŻYCZKOWSKI, *W sprawie doboru optymalnego kształtu prętów osiowo ściskanych*, Rozpr. Inżyn. 4, 4 (1956), 441-456.
22. M. ŻYCZKOWSKI, Referat wygłoszony na konferencji ZMOC IPPT PAN w Kołobrzegu (1966).
23. M. ŻYCZKOWSKI, *Wyboczenie sprężysto-plastyczne niektórych prętów niepryzmatycznych*, Rozpr. Inżyn., 2, 2 (1954), 231-289.

Резюме

ОПТИМАЛЬНЫЙ РАСЧЕТ НА МИНИМУМ ВЕСА СТЕРЖНЯ СЖИМАЕМОГО СИЛОЙ, НАПРАВЛЕННОЙ К ПОЛЮСУ

В представленной работе, решается вопрос оптимализации формы упругого стержня, сжимаемого силой, направленной в постоянную точку — полюс, расположенного на оси недеформированного стержня. Основываясь на методе Ченцова, состоящего в поиске экстремума функционала — объема стержня, при установленной критической силе, выводится уравнение линии оптимального прогиба, справедливое в трех случаях: 1. плоскосходимого стержня выпучивающегося из «плоскости» сходимости, 2. равномерно, всесторонне сходимого стержня и 3. плоскосходимого стержня, выпучивающегося в плоскости сходимости. Кроме того, учитывается влияние неоднородности модуля Юнга на оптимальную форму стержня и определяется неоднородность оптимального призматического стержня. Определяется экономия материала, вытекающая из замены призматического стержня, оптимальным стержнем, перенесшего ту же самую критическую силу, в зависимости от положения полюса. Дается целый ряд числовых примеров.

Задача решается на основе статического критерия устойчивости, который в виду «консервативности» нагрузки можно в данном случае применять для произвольного полюса.

Summary

OPTIMAL SHAPING OF A ROD COMPRESSED BY A FORCE DIRECTED TOWARDS THE POLE

In the present work the problem has been solved of optimalization of shape of an elastic rod compressed by a force directed towards a constant point — the pole, located on the axis of the undeformed rod. On the basis of Chentsov's method which consists of finding the extreme of a functional — the volume of the rod, for a fixed critical force the equation of the bending line of an optimal rod has been derived, valid for three cases: a plane-convergent rod deviating «from the plane» of convergence, a uniformly universally convergent rod and a plane-convergent rod deviating «in the plane» of convergence. Furthermore the influence of the heterogeneity of Young's modulus on the optimal shape of a rod has been considered and the heterogeneity of an optimal prismatic rod has been found. The profit on material has been calculated, resulting from the substitution of a prismatic rod by an optimal rod bearing the same critical force depending on the position of the pole and a variety of numerical examples are presented.

The problem has been solved on the basis of the statical criterion of stability which, due to the «conservativeness» of the load, could be applied for any arbitrary positions of the pole.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 stycznia 1969 r.
