Rozprawy Inżynierskie
2, 17 (1969)

BEZPIECZEŃSTWO KONSTRUKCJI W ŚWIETLE TEORII KUMULACJI USZKODZEŃ

CZESŁAW EIMER (WARSZAWA)

1. Teoria bezpieczeństwa konstrukcji znajduje się w chwili obecnej w sytuacji dość szczególnej, mianowicie faktyczne jej osiągnięcia niezupełnie pokrywają się z celami pierwotnie przez nią postawionymi. Te ostatnie — już od czasu pierwszych prac z zakresu probabilistycznej teorii bezpieczeństwa (W. Wierzbicki [9], M. Prot [8]) — sprowadzały się do poszukiwania obiektywnych miar bezpieczeństwa i zastąpienia nimi miar tradycyjnych (naprężeń dopuszczalnych, współczynników bezpieczeństwa itp.), obarczonych subiektywnymi, intuicyjnymi założeniami. Otóż w zakresie efektywnego wyznaczania owych obiektywnych (probabilistycznych) miar bezpieczeństwa teoria nie spełniała na ogół pokładanych w niej pierwotnie nadziei, gdyż okazało się, że nie dysponujemy niezbędnym, dostatecznie bogatym materiałem statystycznym, m.in. statystykami awarii konstrukcji. Co więcej, materiał ten nierzadko dezaktualizuje się szybciej niż narasta, a to z uwagi na zmiany rozwiązań konstrukcyjnych, związane z postępem technicznym. Z drugiej strony natomiast teoria wniosła nieoceniony wkład w zrozumienie i wyjaśnienie — po raz pierwszy w sposób nie budzący zastrzeżeń — problemu bezpieczeństwa konstrukcji, wykazała ścisłe związki z ogólną teorią niezawodności urządzeń technicznych, ostatnio burzliwie rozwijającą się, z zagadnieniami optymalizacji i problematyką ekonomiczną. Ugruntowało się zrozumienie, że z chwilą, gdy mamy do czynienia z wielkościami obarczonymi przypadkowymi rozrzutami (dotyczy to m.in. obciążeń i własności wytrzymałościowych konstrukcji), pojawia się równocześnie pojęcie bezpieczeństwa i konieczność ujęcia probabilistycznego; innymi słowy, gdzie nie ma zjawisk przypadkowych, tam nie wyłania się zagadnienie bezpieczeństwa. W rzeczy samej, chcąc zanalizować również istotne znaczenie konwencjonalnych miar bezpieczeństwa, np. współczynników pewności, musimy posługiwać się aparatem teorii prawdopodobieństwa.

Z tych przyczyn bezpośrednie cele teorii bezpieczeństwa uległy pewnemu przewartościowaniu. Obok podstawowego nurtu poszukiwań, zmierzającego do pogłębienia zrozumienia złożonej problematyki bezpieczeństwa, pojawiły się liczne teorie «robocze», usiłujące powiązać ujęcia tradycyjne, o charakterze konwencjonalnym, z metodami probabilistycznymi. Chodzi tu o wykorzystanie nagromadzonych obserwacji i doświadczeń «zawartych» w ustalonych współczynnikach pewności, naprężeniach dopuszczalnych itp. Wiele usiłowań poświęcono metodom wnioskowania o bezpieczeństwie konstrukcji na podstawie zjawisk «cząstkowych», dostatecznie częstych dla statystycznego opracowania. Należą tu zastosowanie rozkładów ekstremalnych i statystyk porządkowych, teorie podobieństwa populacji statystycznych, zagadnienia optymalnego programowania i wykorzystania badań doświadczalnych.

W niniejszej pracy skoncentrujemy się na wyjaśnieniu roli czasu w problematyce bezpieczeństwa, co z punktu widzenia matematycznego oznacza przejście od zmiennych przypadkowych do procesów przypadkowych. Dotychczas głównym zadaniem teorii było obliczenie prawdopodobieństwa spełnienia kryterium wytrzymałościowego, $P < R$, gdzie ogólnie P oznacza obciążenie, R wytrzymałość (nośność konstrukcji). Ponieważ każda konstrukcja powinna być zdatna do użytku w pewnym ograniczonym okresie czasu, zwanym okresem eksploatacji, P powinno oznaczać maksymalne obciążenie, które może wystąpić w tymże okresie, podczas gdy R zwykło się przyjmować jako niezależne od czasu i od poprzedniej historii obciążenia. Pierwsze z tych założeń nastręcza duże praktyczne trudności, ponieważ na ogół nie dysponujemy statystykami obciążeń dla długich okresów czasu, odpowiadającymi warunkom pracy danej konstrukcji. Drugie założenie jest tylko dużym przybliżeniem, nie uwzględnia ono zjawisk reologicznych i zmęczeniowych.

Z chwilą «czasowego» ujęcia problemu pojawia się jako charakterystyczny element pojęcie trwałości konstrukcji, którego miarą może być np. jej przeciętny czas życia. Na ogół przyjmuje się, że z biegiem czasu konstrukcja «zużywa się», tj. ulega stopniowo narastającym uszkodzeniom prowadzącym do zmniejszenia wytrzymałości. Podobny sposób podejścia spotkać można w teorii niezawodności urządzeń technicznych oraz w teoriach wytrzymałości zmęczeniowej, opartych na hipotezie kumulacji uszkodzeń [1, 2, 4 i 7]. Próbę rozwiązania stanowiącego krok pośredni między ujęciem abstrahującym od czasu i wprowadzającym czas w sposób wyraźny podjął A. M. FREUDENTHAL [5] rozważając ciag obciążeń doraźnych o znanym rozkładzie prawdopodobieństwa. Wszakże nie zawsze można powiedzieć, co rozumiemy przez pojedyncze przyłożenie obciążenia, ponieważ jest ono procesem ciągłym w czasie. Ponadto, ażeby «umiejscowić» proces w czasie, interwały między poszczególnymi przyłożeniami obciążenia musiałyby być znane. Tak więc w ogólności całość problemu powinna być dyskutowana w języku teorii procesów stochastycznych.

2. Podstawową korzyścią podejścia probabilistycznego jest wprowadzenie jednej, uniwersalnej, obiektywnej miary bezpieczeństwa w postaci prawdopodobieństwa niezniszczenia konstrukcji, zwanego również stopniem bezpieczeństwa lub niezawodnością. Przy założeniu, że wytrzymałość R nie zależy od czasu, definiujemy owo prawdopodobieństwo jako prawdopodobieństwo, że czas do zniszczenia t_R, tj. efektywny czas życia konstrukcji, przekracza okres eksploatacji T, a więc że $T < t_R$. Jest to równoważne warunkowi $P_{\max} < R$, jeśli $P_{\max}$ oznacza maksymalne obciążenie w okresie T. Mamy więc

$$p = p(T < t_R) = p(P_{\max} < R), \tag{2.1}$$

gdzie p oznacza odnośne prawdopodobieństwo. Wynika stąd bezpośrednio prawdopodobieństwo zniszczenia w okresie eksploatacji

$$q = 1 - p = p(T > t_R). \tag{2.2}$$

Gęstość prawdopodobieństwa *a priori* zniszczenia w chwili t wynosi

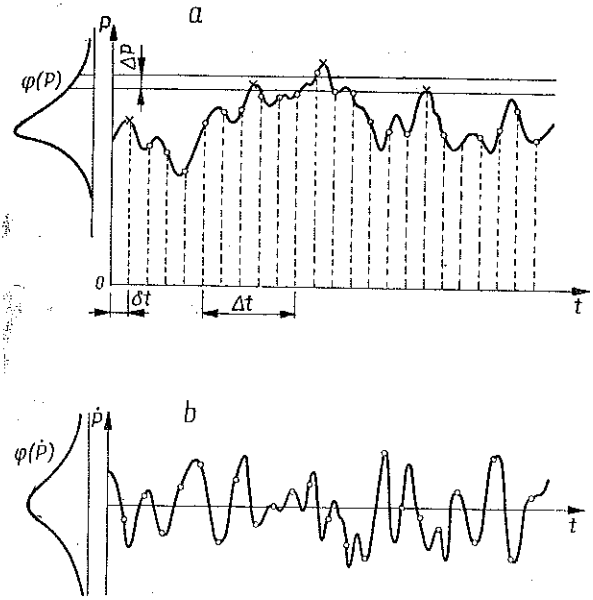
$$f(t) = \frac{dq(t)}{dt}. \tag{2.3}$$

Szybkość zniszczenia definiuje się jako prawdopodobieństwo, że konstrukcja, która przeżyła czas t, ulegnie zniszczeniu w jednostce czasu w chwili t,

$$h(t) = \frac{f(t)}{p(t)} = -\frac{d}{dt}\ln p(t). \tag{2.4}$$

We wzorach powyższych t_R jest zmienną przypadkową i oznacza czas do pierwszego przekroczenia poziomu R przez obciążenie.

Jak widać, podstawą do określenia wszystkich powyższych parametrów jest wyznaczenie dystrybuanty (2.1) lub (2.2), przy czym w najprostszym przypadku, gdy przyjmujemy $R = \text{const}$, zagadnienie sprowadza się do obliczenia prawdopodobieństwa przewyższenia (lub nieprzewyższenia) przez obciążenie określonej wartości w okresie T. Sposób rozwiązania zależy od metody uzyskania danych



Rys. 1

statystycznych, niezbędnych dla obliczenia dystrybuanty (2.1). Przypomnimy tu najważniejsze sposoby podejścia odsyłając czytelnika pragnącego szerzej zapoznać się z zagadnieniem do pracy autora [3]. Oznaczmy przez $P(t)$ obciążenie jako funkcję czasu. Wyniki obserwacji, zależnie od typu przyrządów pomiarowych, mogą być otrzymane w trojakiej postaci: (1) jako wykres ciągły (przyrządy samopiszące, rys. 1); (2) jako odczyty periodyczne o interwałach δt (punkty oznaczone kółkami); (3) jako wartości maksymalne w ustalonych interwałach czasowych Δt, związanych zwykle z cyklicznością obciążeń, np. w ciągu doby, roku itd. (przyrządy zapisujące wartości maksymalne oznaczono krzyżykami).

Biorąc stosunki liczby punktów (oznaczonych kółeczkami) w określonych przedziałach ΔP (tj. w kolejnych pasmach poziomych) do ich liczby całkowitej w dostatecznie długim przedziale czasu otrzymujemy histogram częstości, a zagęszczając przedziały ΔP i wydłużając okres czasu dochodzimy do gęstości prawdopodobieństwa $\varphi(P)$, pokazanej na lewej stronie rys. 1a; jest to gęstość prawdopodobieństwa obciążenia w dowolnej chwili (dla procesu stacjonarnego). Gdybyśmy posługiwali się tą gęstością przy wyliczaniu prawdopodobieństw (2.1) i następnych, otrzymalibyśmy prawdopodobieństwo *a priori* zniszczenia w danej chwili (nie zaś w okresie eksploatacji).

Rozważając przedział czasu Δt, który nas interesuje, i dostatecznie długi interwał $n\Delta t$ oraz ustalając wartość P znajdujemy liczbę m przedziałów Δt, w których ta ostatnia nie została przekroczona. Stosunek m/n jest przybliżoną miarą (ścisłą dla $n \to \infty$), tj. estymatorem prawdopodobieństwa nieprzekroczenia P w okresie Δt. Prawdopodobieństwo to jest funkcją obciążenia, $\Psi = \Psi(P)$, którą można znaleźć doświadczalnie powtarzając opisane postępowanie dla kolejnych wartości P. Otrzymujemy w ten sposób dystrybuantę obciążenia maksymalnego w przedziale Δt, ponieważ nieprzekroczenie P jest równoważne nieprzekroczeniu go przez obciążenie maksymalne. Gęstość prawdopodobieństwa obciążenia maksymalnego w Δt otrzymujemy jako pochodną $\psi(P) = d\Psi(P)/dP$. Możemy ją również wyznaczyć bezpośrednio z wykresu wyliczając częstości punktów «szczytowych» w kolejnych przedziałach ΔP (podobnie jak to robiliśmy przy $\varphi(P)$).

Dla ściślejszych obliczeń dane powyższe nie są jeszcze wystarczające. Jak zobaczymy poniżej, niezbędne jest również wyznaczenie rozkładu prawdopodobieństwa prędkości przyrostu obciążenia $\dot{P} = dP/dt$ (jest to wystarczające w przypadku procesu stacjonarnego). W tym celu możemy na podstawie wyjściowego wykresu obciążeń skonstruować wykres pochodnej $\dot{P}(t)$ (rys. 1b) bądź obliczyć wartości pochodnych dla punktów pomiarowych i na ich podstawie, w sposób podobny jak poprzednio, wyznaczyć rozkład gęstości prawdopodobieństwa $\varphi(\dot{P})$. Ze względu na statystyczny charakter obliczeń dokładność graficzna przy wyznaczaniu pochodnych jest zupełnie wystarczająca.

3. Jak już wspomnieliśmy, ujęcie teoretyczne zależy od rodzaju wyjściowych danych statystycznych. Zgodnie z p. 2 omówimy tu dwie metody: (1) gdy zmierzone są maksymalne wartości funkcji $P(t)$ w przedziałach Δt, (2) gdy znane są rozkłady $\varphi(P)$ i $\varphi(\dot{P})$ (1).

1. Gdyby Δt było równe okresowi eksploatacji, funkcja $\Psi(P)$ przedstawiałaby bezpośrednio poszukiwaną dystrybuantę. Wszakże w praktycznych obliczeniach zadanie sprowadza się do jej wyznaczenia na podstawie pomiarów $P_{\max}$ w przedziałach czasu z reguły krótszych. Niech $p(P)$ oznacza dystrybuantę obciążenia maksy-

(1) Przypominamy, że w teorii prawdopodobieństwa zmiana argumentu oznacza, że chodzi o odmienną funkcję rozkładu prawdopodobieństwa.

malnego w przedziale Δt. Wówczas prawdopodobieństwo nie przekroczenia P w okresie $T = n\Delta t$ wynosi

$$\Phi(P) = \Psi^n(P), \tag{3.1}$$

jeśli tylko interwały Δt są na tyle długie, że obciążenia maksymalne w nich można uznać za niezależne. Wzór (3.1) określa dystrybuantę obciążenia maksymalnego w okresie eksploatacji. Gęstość prawdopodobieństwa tego obciążenia otrzymamy różniczkując (3.1):

$$\varphi(P) = n\Psi^{n-1}(P)\,\psi(P). \tag{3.2}$$

Zależność tę można też otrzymać bezpośrednio, jeśli zwrócimy uwagę, że $n\Psi^{n-1}$ przedstawia prawdopodobieństwo nieprzewyższenia P w $n-1$ przedziałach Δt, podczas gdy $\psi(P)\,dP$ jest prawdopodobieństwem osiągnięcia przez obciążenie maksymalne wartości P w pozostałym przedziale, przy czym $\psi(P)$ jest odnośną gęstością prawdopodobieństwa $P_{\max}$ dla przedziału Δt.

Ustaliwszy P na dostatecznie wysokim poziomie (tak, że jego przekroczenie jest zdarzeniem rzadkim, zachodzącym np. raz na kilka miesięcy) otrzymujemy wysokie, tj. bliskie 1, wartości Ψ. Wówczas rozkład (3.1) zdąża do rozkładu Poissona (dla liczby sukcesów równej zeru), tj. do rozkładu wykładniczego

$$\Phi(P) = \exp\left[-\nu_0(P)\,T\right], \tag{3.3}$$

gdzie $\nu_0(P)$ oznacza średnią liczbę przewyższeń P w czasie jednostkowym. Odwrotność tej wielkości $t_0 = 1/\nu_0$ jest średnim odstępem czasowym przekroczeń ustalonego poziomu P i może być bezpośrednio wyznaczona z wykresów, jak na rys. 1, obejmujących dostatecznie długi okres obserwacji.

2. Założmy, że zostały wstępnie wyznaczone rozkłady $\varphi(P)$ i $\varphi(\dot{P})$. Korzystamy tu z aparatu matematycznego teorii przewyższania [2 i 6]. Jak wiadomo, średnia liczba przewyższeń ustalonego poziomu P jest proporcjonalna do czasu i w jednostce czasu, w określonej chwili t, wynosi

$$\nu_0(P;t) = \int_0^\infty \dot{P} f(P,\dot{P};t)\,d\dot{P}, \tag{3.4}$$

gdzie $f(P,\dot{P};t)$ jest łączną gęstością prawdopodobieństwa pojawienia się w chwili t jednocześnie wartości P i $\dot{P}$. Wielkość ν_0, z reguły bardzo mała, może być również interpretowana jako prawdopodobieństwo przewyższenia poziomu P w jednostce czasu, gdyż jej odwrotność podaje czas, na jaki średnio wypadnie jedno przewyższenie. Jak wiadomo, w przypadku procesu stacjonarnego typu gaussowskiego mamy

$$f(P,\dot{P};t) = \varphi(P)\,\varphi(\dot{P})$$

i otrzymujemy średnią liczbę przewyższeń w czasie T (nierówną już teraz prawdopodobieństwu)

$$\nu(P;t) = T\varphi(P)\int_0^\infty \dot{P}\varphi(\dot{P})\,d\dot{P}. \tag{3.5}$$

Chcąc znaleźć dystrybuantę obciążenia maksymalnego, tzn. prawdopodobieństwo, że w okresie T obciążenie nie przekroczy ani razu ustalonej wartości P, zauważmy, że

$$\Phi(P) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} p_k(P; T) = 1 - p_1(P; T) - \sum_{k=2}^{\infty} p_k(P; T),$$

gdzie $p_k(P; T)$ jest prawdopodobieństwem k-krotnego przewyższenia P w okresie T. Ponieważ średnia liczba przewyższeń w okresie T wynosi

$$\nu(P; T) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k(P; T) = p_1(P; T) + \sum_{k=2}^{\infty} k p_k(P; T),$$

otrzymujemy

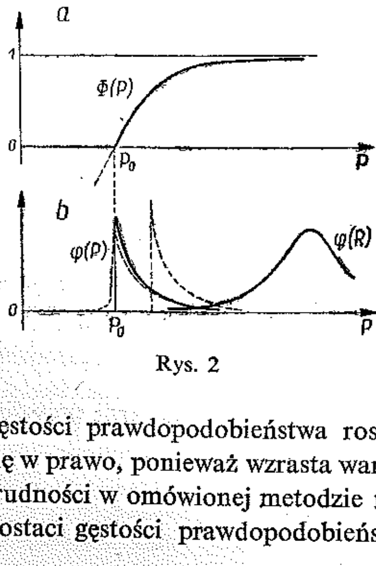
$$\Phi(P) = 1 - \nu + \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) p_k(P; T).$$

Dla dostatecznie wysokich poziomów P mamy $p_k(P; T) \gg p_{k+1}(P; T)$ i ostatnią sumę z prawej strony możemy pominąć jako bardzo małą (pozostając po stronie bezpieczeństwa); dochodzimy po uwzględnieniu (3.4), do wzoru przybliżonego

$$\Phi(P) = 1 - T\varphi(P) \int_0^{\infty} \dot{P}\varphi(\dot{P})\, d\dot{P} = 1 - P_s T\varphi(P), \tag{3.6}$$

gdzie P_s jest wartością całki we wzorze (3.6), będącej momentem statystycznym rzędu 1, a w przypadku rozkładu $\dot{P}$ symetrycznego względem osi odciętych (co zachodzi z reguły) połową rzędnej środka ciężkości powierzchni zakreskowanej na rys. 1b.

Przybliżenie to można stosować co najwyżej w zakresie $P > P_0$, gdzie P_0 jest pierwiastkiem równania $\nu(P; T) = 1$, gdyż prawdopodobieństwo nie może przekroczyć jedności. Dla $P < P_0$ aproksymujemy dystrybuantę prostą $\Phi(P) \equiv 0$ (rys. 2), aczkolwiek w rzeczywistości występuje niewielkie prawdopodobieństwo nie przekroczenia P (mimo iż średnio pojawia się więcej niż jedno przekroczenie w okresie T). Odnośna gęstość prawdopodobieństwa, dla $P > P_0$, wynosi



Rys. 2

$$\varphi(P) = -TP_s \frac{d\varphi(P)}{dP}, \tag{3.7}$$

gdzie z lewej strony $\varphi = d\Phi/dt$, a φ z prawej strony odpowiada rys. 1. Jak widać, przy wzroście okresu eksploatacji rzędne wykresu gęstości prawdopodobieństwa rosną proporcjonalnie do T, a sam wykres przesuwa się w prawo, ponieważ wzrasta wartość P_0, jak to zaznaczono na rys. 2b. Praktyczne trudności w omówionej metodzie może nastręczać dostatecznie dokładne określenie postaci gęstości prawdopodobieństwa $\varphi(P)$ dla dostatecznie dużych P, $(P > P_0)$.

Może tu być pomocna teoria rozkładów ekstremalnych, gdy rozkład obciążeń spełnia pewne założenia teoretyczno funkcyjne; zagadnie nie to, poruszone w pracy autora [3], musimy tu pominąć.

Gdy znaleźliśmy już gęstość $\varphi(P)$ ze wzoru (3.7) lub (3.2) obliczamy stopień bezpieczeństwa na podstawie znanego wzoru

$$p = \int\limits_{P<R}\int \varphi(P)\,\varphi(R)\,dP\,dR, \tag{3.8}$$

gdzie $\varphi(R)$ jest gęstością prawdopodobieństwa wytrzymałości, uważanej za niezmienną w czasie; całka rozciąga się na część płaszczyzny P, R określoną nierównością $P < R$. Ponieważ $\varphi(P)$ jest funkcją czasu T, zatem i stopień bezpieczeństwa zależy od T i problem nasz jest w ten sposób rozwiązany.

4. Rozważania dotychczasowe opierały się na założeniu, że wytrzymałość (nośność konstrukcji) jest niezależna od czasu, co jest dużym przybliżeniem. Wiemy, że w rzeczywistości zależy ona od liczby powtarzających się cykli obciążenia w zagadnieniach zmęczeniowych, bądź też od czasu obciążenia, gdy w grę wchodzą zjawiska reologiczne. W celu opisania takiego zachowania się materiału w teorii zmęczenia wprowadza się pojęcie kumulacji uszkodzeń (ang. cumulative damage); podobne pojęcie znane jest w ogólnej teorii niezawodności.

Uogólnimy to pojęcie i założymy, że aktualny stan konstrukcji (lub materiału) w określonej chwili jest — z punktu widzenia wytrzymałościowego — wyznaczony przez pewną nieujemną liczbę δ, $0 \leqslant \delta \leqslant 1$, zwaną uszkodzeniem, gdzie uszkodzenie zerowe ($\delta = 0$) opisuje stan idealny (nieuszkodzony), a $\delta = 1$ całkowite zniszczenie (awarię). Założenie, że stan konstrukcji może być opisany przez jedną liczbę, jest znacznym uproszczeniem sytuacji rzeczywistej (zważywszy m.in., że uszkodzenia mogą występować w różnych miejscach i wywoływać różne skutki), tym niemniej prowadzi ono do znacznego uogólnienia teorii bezpieczeństwa w jej obecnym ujęciu. W ogólności δ wzrasta z biegiem czasu w szczególności w procesie obciążenia, co oznacza, że zniszczenie narasta stopniowo, prowadząc wreszcie do «śmierci» konstrukcji, gdy δ osiąga wartość 1. W najprostszym przypadku (którego nie należy zbytnio uogólniać) możemy wyobrazić sobie, że δ określa zmniejszenie przekroju poprzecznego elementu osiowo rozciąganego wskutek narastającej rysy (pęknięcia rozdzielczego). Opis uszkodzenia w sposób wyżej podany został zanalizowany w pracy [1].

W tym nowym ujęciu warunek wytrzymałościowy $P < R$ powinien być zastąpiony warunkiem ogólniejszym

$$\delta < 1. \tag{4.1}$$

Zadanie polega obecnie na przepowiedzeniu czasu, w którym uszkodzenie osiąga wartość 1, bądź też, w ujęciu probabilistycznym (ponieważ δ musi być uważane za zmienną losową), na wyznaczeniu prawdopodobieństwa

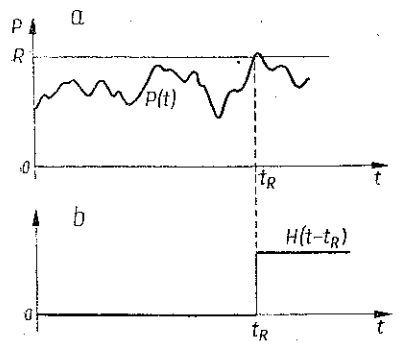
$$p = p(\delta < 1) \tag{4.2}$$

dla określonego okresu eksploatacji $t = T$.

Dla przypadku «klasycznego» δ pozostaje zerem dopóki $P < R$ i wzrasta nagle do 1 przy przekroczeniu R (rys. 3). W tym skrajnym przypadku nie występuje więc proces stopniowego narastania uszkodzenia. Łatwo zauważyć, że odpowiada to zdefiniowaniu δ jako funkcji Heaviside'a

$$\delta(t) = H(t - t_R),$$

gdzie t_R jest czasem do pierwszego przekroczenia R przez $P = P(t)$. Wyrażenie to jest równoważne wzorowi (2.1) i rozwiązanie daje teoria przedstawiona w p. 3.



Rys. 3

W przypadku najogólniejszym δ zależy od całej uprzedniej historii, w szczególności historii obciążenia konstrukcji i tym samym jest funkcjonałem zdefiniowanym w klasie wszystkich dopuszczalnych funkcji $P(t)$. W zależności od zjawisk mających w danym przypadku decydujące znaczenie (np. zmęczeniowych, reologicznych itp.) musimy wprowadzić dalsze ograniczające hipotezy, jeśli teoria ma być efektywnym narzędziem obliczeń inżynierskich.

Przede wszystkim przyjmujemy, że uszkodzenie jest kumulatywne, tak iż wystarczy badać przyrosty $d\delta$, które po prostu dodają się w czasie. Jeżeli abstrahujemy od zjawisk reologicznych, to jesteśmy w możności przyjąć następujące dalsze założenia: (1) $d\delta$ zależy od chwilowego stanu konstrukcji opisanego przez δ, (2) od warunków zewnętrznych opisanych przez funkcję $P = P(t)$, (3) od zmiany tychże warunków określonych przez $dP(t)$, (4) bezpośrednio od czasu. Biorąc przyrosty w jednostce czasu, tj. zastępując je prędkościami, otrzymujemy

$$\dot{\delta} = f(\delta, P, \dot{P}, t). \tag{4.3}$$

Bezpośrednia zależność od czasu opisuje zjawiska w rodzaju korozji (niezależne od obciążeń) i w dalszym ciągu będzie pominięta. Jeśli przyjmujemy, że uszkodzenie jest nieodwracalne (tj. pomijamy procesy «regeneracji»), funkcja f będzie nieujemna ze względu na wszystkie argumenty. Jeśli P zdąża do wartości R aktualnej w danej chwili, to $\dot{\delta}$ na ogół raptownie wzrasta; jeżeli ponadto R zależy od δ, a jest niezależne od $\dot{P}$, mamy $f \to \infty$ dla $P \to R(\delta)$. Dalsze upraszczające założenia mogą postulować, że $\dot{\delta}$ nie zależy od znaku dP, co odzwierciedla zjawiska typu tarcia przy zmęczeniu i prowadzi do funkcji f symetrycznej ze względu na $\dot{P}$ oraz że jest ono proporcjonalne do $\dot{P}$, co prowadzi do zależności

$$\dot{\delta} = f(\delta, P)\,|\dot{P}| \tag{4.4}$$

lub równoważnie

$$d\delta = f(\delta, P)\,|dP|.$$

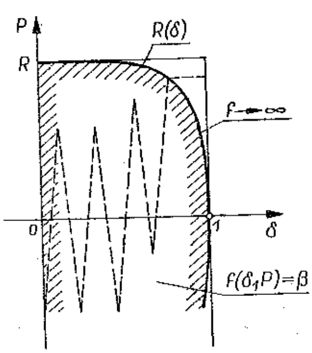
Wzory o podobnej budowie, gdzie zamiast dP występuje dn (n — liczba cykli) występują w teorii zmęczenia materiałów (por. np. [1]). Odnoszą się one wszakże tylko do określonego sposobu obciążenia w postaci oscylacji i nie zawierają jakiejś ogólniejszej hipotezy co do mechanizmu narastania uszkodzeń.

Najprostszym możliwym założeniem co do postaci funkcji f, zgodnym z omówionymi wyżej ogólnymi przyjęciami, jest

$$f(\delta, P) = \beta = \text{const} \tag{4.5}$$

w obszarze dopuszczalnym (rys. 4, pole zakreskowane) i $f \to \infty$ dla $P \to R(\delta)$, co oznacza, że gładki wzrost powierzchni f w pobliżu krzywej $R(\delta)$ został zastąpiony osobliwością. Jeśli w szczególności $\beta = 0$, to mamy do czynienia z przypadkiem «klasycznym» (bez zmęczenia) z tym uogólnieniem, że możliwe jest początkowe uszkodzenie, które obniża wartość R (poruszamy się wzdłuż pionowych linii na rys. 3). Całkując (4.4) z uwzględnieniem (4.5) otrzymujemy $\delta = \beta\Sigma|\Delta P|$, tzn. δ jest proporcjonalne do sumy amplitud wszystkich cykli obciążenia niezależnie od jego średniej wartości (por. poniżej rys. 6, gdzie bierzemy sumę odcinków $\overline{01}+\overline{12}+\overline{23}+\ldots$). W przypadku najprostszym symetrycznych oscylacji uszkodzenie jest proporcjonalne do liczby cykli n:

$$\delta = 4n\beta P_m,$$



Rys. 4

gdzie P_m jest maksymalnym obciążeniem w jednym cyklu. Droga obciążenia jest złożona z prostych odcinków o stałym nachyleniu $|d\delta/dP| = \beta$ niezależnie od kształtu «fal» $P(t)$. Przy przecięciu z krzywą $R(\delta)$ występuje poziomy «przeskok» do osiągnięcia wartości $\delta = 1$ (rys. 4). Przyjęcie to odpowiada znanej hipotezie Minera w teorii zmęczenia materiałów (stałe uszkodzenie podczas jednej oscylacji o danej amplitudzie). Jeśli w szczególności krzywa $R(\delta)$ sprowadza się do ograniczających prostoliniowych odcinków, odpowiednio $R = \text{const}$ i $\delta = 1$, równanie krzywej Wöhlera wynika bezpośrednio z powyższego wzoru dla $\delta = 1$:

$$P_m = \frac{1}{4\beta N}.$$

Jest to równanie hiperboli. Ogólniej, jeśli dane jest równanie krzywej Wöhlera $P_m = W(N)$, to krzywą $R(\delta)$ otrzymujemy z równania

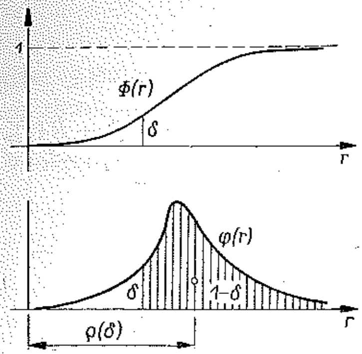
$$R = W\left(\frac{\delta}{4\beta N}\right).$$

Należy tu jednak zwrócić uwagę, że otrzymana krzywa może ewentualnie być odpowiednia dla innych (niezerowych) wartości obciążenia przeciętnego; jest to następstwem zbyt uproszczonego założenia (4.5).

Równanie krzywej $R(\delta)$ można również wywieść z pewnych założeń teoretycznych, na przykład w sposób następujący. Wyobraźmy sobie ciało złożone z ziaren o różnych własnościach wytrzymałościowych i proces zniszczenia polegający na kolejnym «wyłączaniu się» słabszych ziaren z przenoszenia obciążeń. Proporcja objętościowa elementów na różnych poziomach lokalnej wytrzymałości r może być przedstawiona całkowym lub różniczkowym rozkładem prawdopodobieństwa (rys. 5). Zdefiniujmy uszkodzenie δ jako część pola powierzchni (znormalizowanej do 1) pod krzywą $\varphi(r)$, bądź też jako rzędną krzywej $\Phi(r)$. Zakreskowana część powierzchni $1-\delta$ przedstawia efektywną nośność, zabezpieczoną przez pozostałe (silniejsze) ziarna. Poszukiwane równanie ma postać

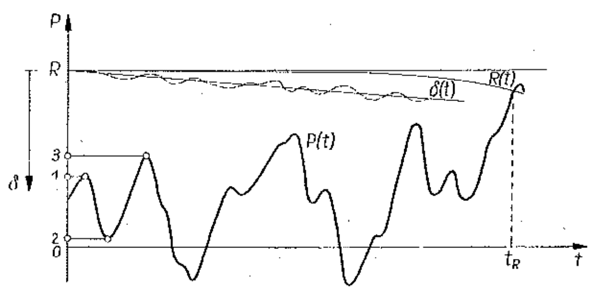
$$R(\delta) = (1-\delta)\,\varrho(\delta),$$

gdzie $\varrho(\delta)$ jest odciętą środka ciężkości zakreskowanego pola.



Rys. 5

5. Analiza bezpieczeństwa w oparciu o omówione powyżej założenia może być przeprowadzona w sposób przybliżony, podobnie jak to uczyniliśmy w p. 3 (rys. 6). Mianowicie dla stacjonarnego procesu obciążenia uszkodzenie δ może być uważane w przybliżeniu za proporcjonalne do czasu i przybliżone linią prostą (zastępującą linię kreskowaną na rys. 6) $\delta = \delta_0 t$, gdzie $\delta_0 = \beta \sum_{t=0}^{1} |\Delta P|$ jest przeciętnym uszko-



Rys. 6

dzeniem w jednostce czasu (otrzymanym z krzywej obciążenia przez uśrednienie w ciągu dostatecznie długiego okresu czasu). Krzywa wytrzymałości wyrażona w nowych jednostkach ma postać

$$P = R(\delta_0 t) \tag{5.1}$$

i zniszczenie występuje przy pierwszym przecięciu tej krzywej z wykresem obciążenia $P = P(t)$. W ten sposób problem został sprowadzony do zagadnienia bezpieczeństwa konstrukcji ze zmniejszającą się z czasem nośnością, przy czym nośność ową traktuje się w sposób zdeterminowany. Można tu zastosować te same dwie metody co w p. 3.

Gdyby własności wytrzymałościowe, wyrażone przez (5.1), nie były obarczone rozrzutami, moglibyśmy zastosować to samo rozumowanie, co przy wywodzie wzoru (3.1). Przypuśćmy, że dysponujemy danymi statystycznymi dla ustalonego okresu Δt i że określiliśmy dla tego okresu gęstość prawdopodobieństwa $p(P)$, podobnie jak w (3.1). Ponieważ wytrzymałość zmienia się w czasie, otrzymujemy

$$\Phi = p(R_1)\, p(R_2)\, p(R_3), \tag{5.2}$$

gdzie, zgodnie z (5.1), R_k odnosi się do k-tego odcinka Δt (rys. 1). Logarytmując obie strony otrzymamy

$$\ln \Phi = \sum_k \ln p(R_k).$$

Biorąc za $\ln p(R_k)$ jego wartość przeciętną na odpowiednim odcinku

$$\ln p(R_k) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \ln p\,[R(t)]\, dt$$

dostajemy

$$\ln \Phi = \frac{1}{\Delta t} \int_0^1 \ln p\,[R(t)]\, dt$$

i ostatecznie

$$\Phi = \exp\left(\frac{1}{\Delta t} \int_0^1 \ln p\,[R(t)]\, dt\right). \tag{5.3}$$

W ten sposób otrzymaliśmy *explicite* funkcję parametrów opisujących krzywą $R(t)$. Uogólnienie tych rozważań uzyskalibyśmy uważając owe parametry za zmienne losowe i przechodząc do wzorów typu (3.8).

Z analogicznym stopniem przybliżenia możemy również zastosować drugą metodę omówioną w p. 3. Uwzględniając, że średnia liczba przewyższeń danego poziomu jest proporcjonalna do czasu, otrzymujemy stosownie do wzoru (3.4) lub (3.5) dla czasu dt

$$\nu = \varphi(P)\, P_s\, dt = \varphi\,[R(t)]\, P_s\, dt$$

i dla całego okresu eksploatacji

$$\nu = P_s \int_0^T \varphi\,[R(t)]\, dt. \tag{5.4}$$

Uważając ową liczbę za równą w przybliżeniu prawdopodobieństwu (dla dostatecznie rzadkich przewyższeń, tj. wysokich R) otrzymujemy stąd bezpośrednio wyrażenie na stopień bezpieczeństwa

$$p = 1 - P_s \int_0^T \varphi\,[R(t)]\, dt. \tag{5.5}$$

I tutaj możliwe jest uogólnienie na losowo traktowaną wytrzymałość, przy czym podobnie jak w pierwszej metodzie za zmienne losowe uważać możemy parametry krzywej $R(t)$. Rozwiązanie ścisłe musiałoby oczywiście wychodzić z założenia, że sama krzywa $R(t)$ jest procesem stochastycznym.

6. Rozważania nasze opieraliśmy na hipotezie (4.5), która, zdaniem autora, jest wystarczającym przybliżeniem dla obliczeń inżynierskich, w świetle niedostateczności dla dalszych uogólnień materiału statystycznego, opracowanego w chwili obecnej, a także trudności związanych ze specyfikacją funkcji we wzorach (4.3) i (4.4).

W ogólności, gdybyśmy dysponowali krzywymi Wöhlera dla różnych (niezerowych) średnich obciążeń, moglibyśmy dojść do wyniku porównując te krzywe z odnośnymi rozwiązaniami równania różniczkowego (4.4) dla sinusoidalnej postaci wykresu obciążenia, uwzględniając $\delta = 1$, $n = N$, $\omega t = n$; a, b są to stałe,

$$\frac{d\delta}{dt} = f(\delta, b + a \sin t)\,|a\omega \cos \omega t|.$$

Dalsze uogólnienia mogłyby brać pod uwagę zjawiska reologiczne i prowadziłyby do zastąpienia wzoru (4.3) odpowiednim funkcjonałem, np. w postaci całkowej lub operatorowej. W uproszczonym ujęciu można by również zatrzymać zależność (4.3), wprowadzając do niej pewne charakterystyczne wartości obciążenia z dotychczasowej historii (np. maksymalną dotychczas wartość obciążenia lub jego najbliższe poprzednie maksimum lokalne).

W niniejszej pracy nie dyskutowaliśmy konwencjonalnych miar bezpieczeństwa (np. współczynników pewności), podstawową miarą jego jest bowiem — w świetle ujęcia probabilistycznego — stopień bezpieczeństwa. Przejście do ujęć konwencjonalnych jest szeroko dyskutowane w literaturze przedmiotu (por. np. autora [3]).

Literatura cytowana w tekście

1. F. Bastenaire, *Etude critique de la notion de dommage appliquée à une classe étendue d'essais de fatigue*, Coll. Fatigue IUTAM, Stockholm, Mai 1955.
2. W. W. Bołotin, *Metody statystyczne w mechanice budowli* [tłum. z ros.], Arkady, Warszawa 1968.
3. Cz. Eimer, *Podstawy teorii bezpieczeństwa konstrukcji*, Rozpr. Inżyn., 1, **11** (1963).
4. A. M. Freudenthal, *Physical and statistical aspecte of cumulative damage*, Coll. Fatigue IUTAM, Stockholm, Mai 1955.
5. A. M. Freudenthal, *Critical appraisal of safety criteria and their basic concepts*, 8-th Congr. IABSE, N. York 1968, Prel. Publ.
6. E. Gumbel, *Statistics of extremes*, N. York 1962.
7. R. P. Havilland, *Niezawodność urządzeń technicznych* [tłum z ang.] PWN, Warszawa 1968.
8. M. Prot, *Note sur la notion de coefficient de sécurité*, Ann. P. C., 7, **2** (1936).
9. W. Wierzbicki, (a) *Bezpieczeństwo budowli jako zagadnienie prawdopodobieństwa*, Przegl. Techn., 1936, s. 690, (b) *W sprawie bezpieczeństwa pręta wyciąganego osiowo*, Czas. Techn., 16, 1937.

Резюме

БЕЗОПАСНОСТЬ КОНСТРУКЦИИ В СВЕТЕ ТЕОРИИ НАКОПЛЕНИЯ ПОВРЕЖДЕНИЙ

В работе представлена задача, касающаяся безопасности конструкции с учетом, в точном смысле, фактора времени, рассматривая нагрузку в качестве временного стохастического процесса, прочностные же свойства — как зависимые от истории нагрузки. Рассуждения проводились основываясь на понятии повреждения и гипотезе накопления повержденнй, известной из теории усталости материала, которую обобщается на случай произвольного процесса нагрузки. Даются два практических метода расчета, когда статистический материал охватывает соответственно максимальные значения нагрузки в установленный период или же данные, дающие возможность установить распределения вероятностей нагрузки.

Summary

SAFETY OF STRUCTURES IN THE THEORY OF CUMULATIVE DAMAGE

In this paper, the problem of the safety of structure has been presented with taking explicitly the time factor into account. Loads are considered as a stationary time-dependent stochastic process. The strength properties are considered as depending on the history of loading. The investigation has been based on the concept of damage and the hypothesis of cumulative damage which is known in the theory of material fatigue. This hypothesis has been generalized to the case of the arbitrary behaviour of loading. Two practical computing methods has been given: concerning the case in which the statistic data partain to maximum values of load in a fixed time period or the data which enable to calculate the distributions of loading probability.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 czerwca 1968 r.