

ELEKTRYCZNE MODELOWANIE SPRĘŻYSTEGO PODŁOŻA

ALEKSANDER LISOWSKI (KRAKÓW)

Trafne scharakteryzowanie pracy podłoża sprężystego ma niezwykle znaczenie w budownictwie, gdzie każdy obiekt-budynek mieszkalny czy przemysłowy oraz obiekty konstrukcji inżynierskich, jak mosty, kominy, wieże, mury oporowe itp. oparte są na gruncie. Odształcenia gruntu mają wielki wpływ na układy zwłaszcza wielokrotnie statycznie niewyznaczalne (np. belki ciągłe, ramownice płaskie, a zwłaszcza przestrzenne konstrukcje powłokowe itp.) i mogą w decydujący sposób wpłynąć na zmianę wielkości fizycznych (siły, momenty), które obliczone bez uwzględnienia odształceń podłoża prowadzić mogą do mylnych rozwiązań. Nierównomierne osiadanie gruntu może być też przyczyną katastrof ze względu na stateczność budowli zwłaszcza bardzo wysokich (masztów, wież). Wpływ nierównomiernego osiadania powierzchni ma decydujące znaczenie na terenach objętych eksploatacją górniczą, ale i przy projektowaniu konstrukcji na podłożu, które odształca się tylko pod wpływem bezpośrednio działającego obciążenia — wpływ ten w praktyce inżynierskiej uwzględnia się coraz dokładniej.

Obliczanie podłoża sprężystego sprowadzić można do układu algebraicznych równań liniowych, których ilość ze względu na dokładność obliczeń może być znaczna (np. w granicach kilkuset). Rozwiązanie takiego układu może być kłopotliwe nawet przy użyciu małych elektronicznych maszyn cyfrowych, natomiast zamodelowanie takiego podłoża jest niezwykle proste w sieci elektrycznej, co będzie przedstawione niżej. Zastosowanie modelowania elektrycznego ma ponadto tę zaletę, że bardzo łatwo i szybko uwzględnić można różne rodzaje obciążeń, ewentualnie zmianę parametrów, co w przypadku maszyn cyfrowych z reguły prowadzi do konieczności powtórnych obliczeń (przy użyciu np. tego samego algorytmu i programu). Przedstawiony ponadto model podłoża jest tak prosty konstrukcyjnie, że może być wykonany w każdym laboratorium elektrotechnicznym.

1. Podłoże Winklera

Najstarszą hipotezę określającą pracę podłoża sprężystego podał E. WINKLER w r. 1877, który założył, co następuje:

a. Osiadanie każdego punktu podłoża jest proporcjonalne do nacisku przenieszonego przez podłoże; oznaczając wielkość siły powodującej jednostkowe osiadanie

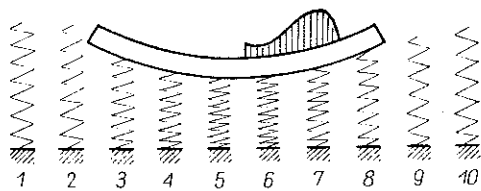
podłoża przez k (jest to tzw. współczynnik sprężystości podłoża) otrzymamy znaną zależność na wielkość ugięcia podłoża od obciążenia p ,

$$(1.1) \quad w = \frac{p}{k}.$$

b. Osiadanie danego punktu nie jest zależne od osiadania innych punktów podłoża.

c. Belka, płyta lub inna powierzchnia przekazująca obciążenie na grunt nie może oddzielić się od podłoża, tzn. podłoże może przenosić zarówno siły ściskające jak i rozciągające.

Podłoże winklerowskie najlepiej scharakteryzować można za pomocą «samodzielnych» sprężyn liniowo-sprężystych; dla schematu belki podane jest ono na rys. 1.



Rys. 1

Jest rzeczą oczywistą, że wpływ przekazania obciążenia za pomocą belki lub płyty na podłoże zawiera się w granicach fundamentu (sprężyny poza zasięgiem fundamentu nie ulegają już odkształceniu). Jest to sprzeczne z doświadczeniem, gdyż wpływ osiadania (i poziomych przemieszczeń)

sięga niejednokrotnie daleko poza zasięg samego fundamentu (por. rys. 2). Gdybyśmy sobie wyobrazili obciążenie podłoża winklerowskiego bezpośrednio siłami skupionymi (bez pośrednictwa płyty lub ławy fundamentowej), to przy zastosowanym podziale

$$\Delta x = a,$$

otrzymalibyśmy układ sprężyn, na które działające obciążenie siłami P_i przenosiłoby



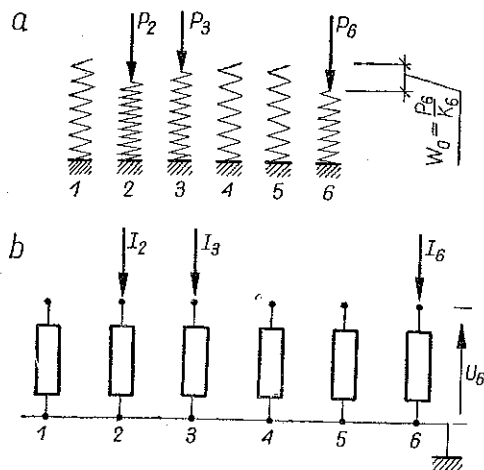
Rys. 2

się od razu na poszczególne sprężyny, których wartości ugięć można by wyliczyć bezpośrednio z zależności

$$w_i = \frac{P_i}{k_i}.$$

Model mechaniczny podłoża podany został na rys. 3a, a jego elektryczna interpretacja na rys. 3b. Jeżeli wartość zasilającego prądu I_i modelować będzie (w pewnej skali) wielkość obciążenia P_i , a opór R_i stałą sprężyny k_i , to spadek napięcia na oporze U_i przedstawiać będzie ugięcie sprężyny w_i .

Podłoże winklerowskie zamodelowane w sieci elektrycznej stosowane było w pracach szeregu autorów, np. przez naukowców radzieckich K. K. KEROPJANA i G. E. PUCHOWA [2 i 6].



Rys. 3

2. Dwuparametrowe podłoże sprężyste

W celu uwzględnienia wpływu osiadania jednego punktu podłoża na punkty pozostałe trzeba przyjąć model podłoża bardziej skomplikowany: WIEGHARDT podał w r. 1922 wzór na określenie osiadania w odległości r od punktu przyłożenia siły P ,

$$(2.1) \quad w(r) = Pce^{-kr},$$

gdzie c i k są stałymi charakteryzującymi podłoże.

Pierwszy model mechaniczny dla podłoża dwuparametrowego podał M. M. FIŁONIENKO-BORODICZ w r. 1940 opierając się na modelu «błony». Dalej można wymienić również autorów radzieckich W. Z. WŁASOWA, P. L. PASTERNAKA i in.

W pracy niniejszej oprzemy się na pracach G. E. MORAWSKIEGO i R. SWITKI, którzy przyjęli dwuparametrowy model sprężysty zbudowany z układu sprężyn (1).

Podłoże charakteryzuje się tym, że przy rozwiązaniu układu o oczkach prostokątnych ugięcie punktu i, j (rys. 4) określa ugięcie sprężyny o danych sprężystych k_{ij} (k — przedstawia wielkość siły powodującej jednostkowe skrócenie długości sprężyny). Pomiedzy sprężynami k narysowanymi w węzłach złożonej siatki o oczkach Δx i Δy , znajdują się sprężyny o stałych s , których obciążenie zależy od różnicy ugięć sprężyn sąsiednich. Odpowiednie sztywne elementy umieszczone w bezwartościowych przewodnicach pozwalają na przekazywanie tylko obciążeń pionowych.

Warunek równowagi wydzielonego węzła (suma rzutów na oś pionową) można zapisać w postaci (2) (rys. 4b)

$$(2.2) \quad -w_{ij}(k_{ij} + s_{i-1,j;i,j} + s_{i,j-1;i,j} + s_{i,j;i+1,j} + s_{i,j;i,j+1}) + w_{i-1,j}s_{i-1,j;i,j} + \\ + w_{i,j-1}s_{i,j-1;i,j} + w_{i+1,j}s_{i,j;i+1,j} + w_{i,j+1}s_{i,j;i,j+1} + P_{ij} = 0.$$

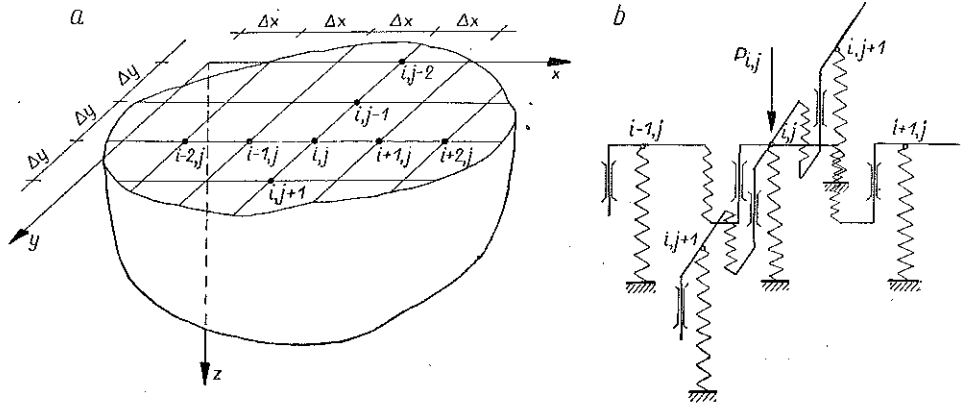
(1) Por. [5 i 7].

(2) Por. praca autora [4].

Przy założeniu stałych sprężystości dla sprężyn dla poszczególnych węzłów, tj. gdy $k_{ij} = \text{const}$ oraz $s_{ij} = \text{const}$, wzór uprości się:

$$(2.3) \quad w_{ij}(k+4s) + (w_{i-1,j} + w_{i+1,j} + w_{i,j-1} + w_{i,j+1})s + P_{ij} = 0.$$

Równanie powyższe można zamodelować w sieci elektrycznej wg schematu podanego na rys. 5. Dla bardziej przejrzystego przedstawienia układ oporów podano w rzucie aksonometrycznym.



Rys. 4

Napişmy warunek równowagi dla węzła ij (pierwsze prawo Kirchhoffa):

$$\sum I_{ij} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 - I_{ij} = 0.$$

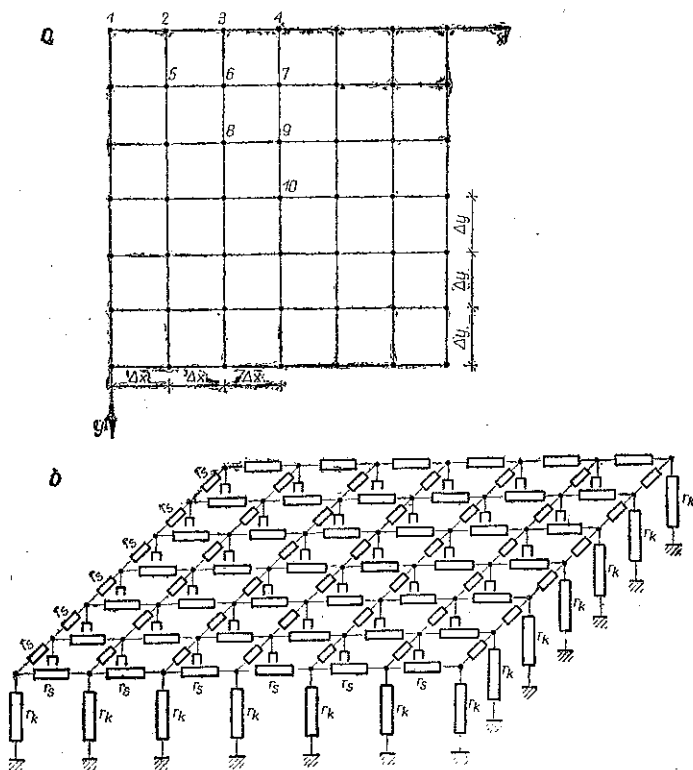
Wyrażając prądy wg prawa Ohma otrzymamy

$$\frac{1}{r_{s_{i-1,j};i,j}}(U_{i,j} - U_{i-1,j}) + \frac{1}{r_{s_{i,j-1};i,j}}(U_{i,j} - U_{i,j-1}) + \\ + \frac{1}{r_{s_{i,j};i,j+1}}(U_{i,j} - U_{i,j+1}) + \frac{1}{r_{s_{i,j};i,j+1}}(U_{i,j} - U_{i,j+1}) + \frac{1}{r_{k_{i,j}}}U_{i,j} - I_{i,j} = 0,$$

a po zgrupowaniu wyrazów

$$(2.4) \quad - \left(\frac{1}{r_{s_{i-1,j};i,j}} + \frac{1}{r_{s_{i,j-1};i,j}} + \frac{1}{r_{s_{i,j};i,j+1}} + \frac{1}{r_{s_{i,j};i,j+1}} + \frac{1}{r_{k_{i,j}}} \right) U_{i,j} + \\ + \frac{1}{r_{s_{i-1,j};i,j}} U_{i-1,j} + \frac{1}{r_{s_{i,j-1};i,j}} U_{i,j-1} + \frac{1}{r_{s_{i,j};i,j+1}} U_{i,j+1} + \\ + \frac{1}{r_{s_{i,j};i,j+1}} U_{i,j+1} + I_{i,j} = 0.$$

Przyrównując odpowiednie strony w równaniach (2.4) i (2.2) zauważymy od razu całkowitą analogię. Dla sprowadzenia równania napisanego dla sieci elektrycznej



Rys. 6

Jako dane mechaniczne podłoża przyjęto $k = 0,3325 \text{ kG/cm}$ i $s = 1,1494 \text{ kG/cm}$.
Wielkości wstępne: zgodnie z (2.6) obliczono wartości oporów przy założeniu

$$(2.9) \quad m_r = 1000 \left[\frac{\text{kG}}{\text{cm}} \Omega \right];$$

wówczas

$$r_k = \frac{1}{0,3325} 1000 = 3005 \Omega \quad \text{oraz} \quad r_s = \frac{1}{1,1494} 1000 = 870 \Omega.$$

Przyjmując ponadto

$$(2.10) \quad m_t = 0,001 \text{ [A/kG]}$$

otrzymano dla siły $P_{10} = 3,27 \text{ kG}$ zaczepionej w punkcie środkowym siatki

$$I_{10} = 3,27 \cdot 0,001 = 0,00327 \text{ A} = 3270 \mu\text{A}.$$

Uwzględniając (2.9) i (2.10) otrzymano zgodnie z (2.7)

$$(2.11) \quad m_u = 0,001 \cdot 1000 = 1 \text{ [V/cm]}.$$

Po obciążeniu układu w węzle środkowym prądem o natężeniu $3270 \mu\text{A}$ otrzymano wartości napięć w węzłach (wobec symetrii układu względem kierunków ortogonalnych x, y jak i względem przekątnych ilość niewiadomych napięć ogranicza się do 10 węzłów — por. rys. 6a).

Z pomiarów otrzymano:

$$U_1 = 0,10V, \quad U_2 = 0,11V, \quad U_3 = 0,13V, \quad U_4 = 0,15V, \quad U_5 = 0,14V, \\ U_6 = 0,18V, \quad U_7 = 0,22V, \quad U_8 = 0,29V, \quad U_9 = 0,44V, \quad U_{10} = 1,07V.$$

Uwzględniając współczynnik przeniesienia napięcia (2.11) znajdziemy zgodnie z zależnością (2.5) wartości ugięć zamodelowanego podłoża sprężystego:

$$w_1 = U_1 \cdot \frac{1}{m_u} = 0,10 \cdot \frac{1}{l} = 0,10 \text{ cm},$$

$$w_2 = 0,11 \cdot \frac{1}{l} = 0,11 \text{ cm},$$

$$w_3 = 0,13 \text{ cm itd.}$$

W pracy [4] rozwiązał autor przedstawony przykład na drodze analitycznej. Wyniki otrzymane na modelu różniły się tylko w granicach 2%.

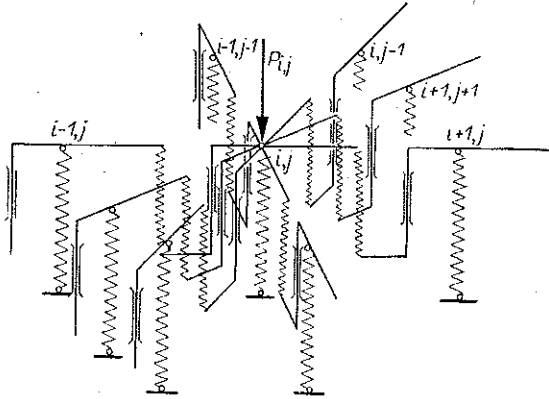
3. Trójparametrowe podłoże sprężyste

Obliczając ugięcia dla podłoża wg schematu dwuparametrowego (porównać można przykładowo wartości ugięć z przykładu podanego w poprzednim punkcie) można przekonać się, że przy obciążeniu podłoża w dowolnym punkcie i otrzymuje się większe wartości ugięć w kierunkach ortogonalnych, tj. wzdłuż osi x i y niż w kierunkach przekątnych. W rzeczywistości poziome podłoże o nieograniczonej powierzchni odkształca się pod wpływem pionowej siły skupionej w sposób osiowo-symetryczny względem osi poprowadzonej wzdłuż działania siły. Wynika to wskutek przyłożenia więzów tylko w kierunkach ortogonalnych. Ugięcia punktów w kierunkach przekątnych układu (w sąsiedztwie punktu obciążonego np. i, j w sensie oznaczeń podanych na rys. 4a) następuje wskutek więzów łączących te punkty z punktami oddalonymi od punktu przyłożenia obciążenia o wymiar oczek siatki tj. Δx i Δy .

W celu bezpośredniego związania oczek siatki również w kierunkach przekątnych przyjmujemy układ sprężyn podanych w układzie aksonometrycznym na rys. 7. Przy takim ujęciu ugięcie sprężyny w punkcie i, j oddziałuje bezpośrednio nie tylko na punkty o kierunkach ortogonalnych, tj. $i-1, j$; $i+1, j$; $i, j-1$; $i, j+1$, ale i na kierunki przekątnych tj. na węzły $i-1, j-1$; $i+1, j-1$; $i+1, j+1$ oraz $i-1, j+1$ (rys. 8).

Oznaczając stałe sprężyn przez k, s i r zgodnie z rys. 7 otrzymamy warunek sumy rzutów na oś z układu sprężyn przynależnego do punktu i, j ; stała r określa sprężynę przekazującą obciążenie w kierunku przekątnej:

$$(3.1) \quad -w_{ij}(k_{i,j} + s_{i-1,j} + s_{i,j-1} + s_{i,j+1} + r_{i,j} + r_{i-1,j-1} + \\ r_{i,j-1} + r_{i,j+1} + r_{i,j-1} + r_{i,j+1}) + (w_{i-1,j} s_{i-1,j} + w_{i,j-1} s_{i,j-1} + \\ + w_{i+1,j} s_{i,j+1} + w_{i,j+1} s_{i,j+1}) + (w_{i-1,j-1} r_{i,j-1} + \\ + w_{i+1,j-1} r_{i,j-1} + w_{i+1,j+1} r_{i,j+1} + w_{i-1,j+1} r_{i,j+1}) + P_{i,j} = 0.$$



Rys. 7

Przy założeniu stałych sprężystości dla sprężyn dla poszczególnych węzłów, tj. gdy

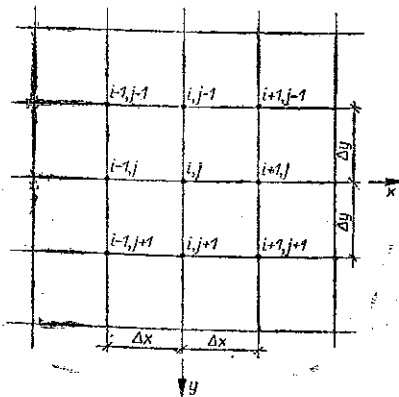
$$k_{ij} = \text{const}, \quad s_{ij} = \text{const} \quad \text{oraz} \quad r_{ij} = \text{const},$$

otrzymamy

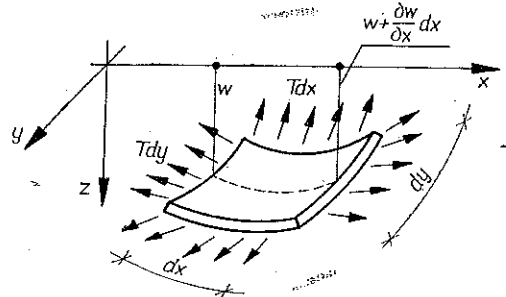
$$(3.2) \quad -w_{ij}(k+4s+4r) + (w_{i-1,j} + w_{i,j-1} + w_{i+1,j} + w_{i,j+1})s + \\ + (w_{i-1,j-1} + w_{i+1,j-1} + w_{i+1,j+1} + w_{i-1,j+1})r + P_{ij} = 0.$$

Dwuparametrowe podłoże sprężyste w oparciu o model błony sprowadzić można do postaci

$$(3.3) \quad T \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + p(x, y) = 0.$$



Rys. 8



Rys. 9

Równanie to otrzymuje się z rzutów sił wyciętego elementu błony w wymiarach $dx \times dy$ na kierunku pionowy (rys. 9). Pierwszy wyraz przedstawia siły błonowe, a drugi obciążenie zewnętrzne działające na błonę. Jeżeli obciążenie zewnętrzne

rozłożymy na składnik zależny od obciążenia działającego z góry oraz reakcję podłoża, tj. analogicznie jak w równaniu dla belki opartej na sprężystym podłożu, to

$$p(x, y) = q(x, y) - g(x, y);$$

równanie (3.3) przedstawiać nam będzie pracę podłoża sprężystego.

W obecnym przypadku przy rozważaniu podłoża trójparametrowego należy stałe s i r uzależnić od parametru T występującego w równaniu (3.3).

Równanie (3.3) w układzie różnicowym przedstawia zależność (2.3). Parametry k i s występujące w równaniu różnicowym wyrazić można przez odpowiednie stałe wchodzące do równania przedstawiające dwuparametrowe podłoże ciągłe. Przechodząc natomiast z równania różnicowego dwuparametrowego o stałych k i s na równanie różnicowe o stałych k , s i r potrzeba te wielkości jakoś związać ze sobą.

Ponieważ w naszym ujęciu chodzi o lepsze uwzględnienie wpływu siatki, przyjęć można, że suma wartości $s+r$ odpowiadać będzie wartości czynnika błonowego s wchodzącego do równania (2.3). Ze względu na to, że punkty położone na przekątnej są dalej położone od punktu i, j niż punkty leżące wzdłuż osi ortogonalnych — zatem wpływ ugięcia punktu i, j będzie mniejszy na ugięcia np. punktu $i+1, j+1$ niż punktu $i+1, j$. Stąd jest oczywiste, że należy przyjąć

$$r = f(s) \quad \text{przy czym} \quad s > r.$$

Autor za pierwsze przybliżenie sugeruje przyjąć zależność odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości, tj. przy podziale na oczka kwadratowe o boku a

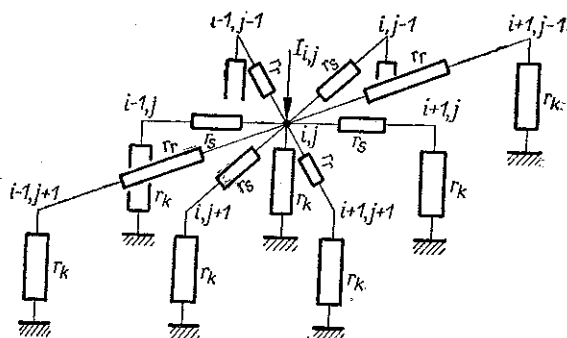
$$r/s = (a)^2 / (a\sqrt{2})^2;$$

skąd otrzymamy

$$(3.4) \quad r = \frac{s}{2}.$$

Próbne przeliczenia wykonane dla podłoża trójparametrowego ujętego zależnością (3.2) i (3.4) wykazały znaczną poprawę ciągłości odkształceń, a uzyskane ugięcia były bliższe spodziewanych ugięć dla sprężystego podłoża ciągłego niż przy zastosowaniu różnicowego schematu dwuparametrowego.

Należy podkreślić, że zamodelowanie podłoża trójparametrowego w sieci elektrycznej nie napotyka na trudności, gdyż dodatkowe więzy sprężyste łączące węzły w kierunku przekątniowym przedstawiać będą opory r_r .



•Rys. 10

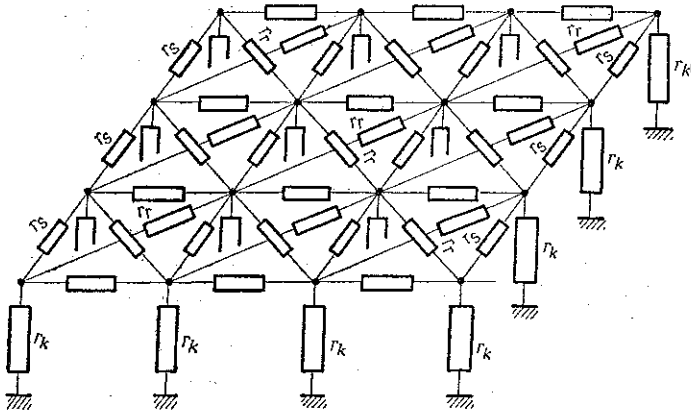
Węzeł sieci modelujący trójparametrowe podłoże sprężyste przy zastosowaniu analogii elektrycznej podany został na rys. 10.

Warunek równowagi węzła i, j (pierwsze prawo Kirchhoffa) określa wzór

$$(3.5) \quad - \left(\frac{1}{r_{k_{i,j}}} + \frac{1}{r_{s_{i-1,j;i,j}}} + \frac{1}{r_{s_{i,j-1;i,j}}} + \frac{1}{r_{s_{i,j;i+1,j}}} + \frac{1}{r_{s_{i,j;i,j+1}}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{r_{r_{i-1,j-1;i,j}}} + \frac{1}{r_{r_{i+1,j-1;i,j}}} + \frac{1}{r_{r_{i+1,j+1;i,j}}} + \frac{1}{r_{r_{i-1,j+1;i,j}}} \right) U_{i,j} + \frac{1}{r_{s_{i-1,j;i,j}}} \\ U_{i-1,j} + \frac{1}{r_{s_{i,j-1;i,j}}} U_{i,j-1} + \frac{1}{r_{s_{i,j;i+1,j}}} U_{i+1,j} + \frac{1}{r_{s_{i,j;i,j+1}}} U_{i,j+1} + \\ + \frac{1}{r_{r_{i-1,j-1;i,j}}} U_{i-1,j-1} + \frac{1}{r_{r_{i+1,j-1;i,j}}} U_{i+1,j-1} + \\ + \frac{1}{r_{r_{i+1,j+1;i,j}}} U_{i+1,j+1} + \frac{1}{r_{r_{i-1,j+1;i,j}}} U_{i-1,j+1} + I_{i,j} = 0.$$

Przy założeniu stałej oporności $r_{k_{ij}} = \text{const}$, $r_{s_{ij;i+1,j}} = \text{const}$ oraz $r_{r_{i,j+1,j+1}} = \text{const}$ równanie (3.5) uzyska prostszą postać

$$(3.6) \quad -U_{i,j} \left(\frac{1}{r_k} + 4 \frac{1}{r_s} + 4 \frac{1}{r_r} \right) + (U_{i-1,j} + U_{i,j-1} + U_{i+1,j} + U_{i,j+1}) \frac{1}{r_s} + \\ + (U_{i-1,j-1} + U_{i+1,j-1} + U_{i+1,j+1} + U_{i-1,j+1}) \frac{1}{r_r} + I_{i,j} = 0.$$



Rys. 11

Porównując równanie (3.5) z (3.1) albo (3.6) do (3.2) widzimy całkowitą analogię. Związki analogii ujęte są zależnościami [analogicznie do równań (2.5) i (2.6)]

$$(3.7) \quad I_{i,j} = P_{i,j} m_r, \quad U_{i,j} = w_{i,j} m_u$$

oraz

$$(3.8) \quad r_{k_{i,j}} = \frac{m_r}{k_{i,j}}, \quad r_{s_{i,j;i,j+1}} = \frac{m_r}{s_{i,j;i,j+1}} \quad \text{i} \quad r_{r_{i,j;i+1,j+1}} = \frac{m_r}{r_{i,j;i+1,j+1}}.$$

Związek pomiędzy współczynnikami przeniesienia modelowego m_i , m_u i m_r oraz ich miana podane zostały w rozdziale poprzednim. Fragment sieci modelującej podłoże trójparametrowe podany został na rys. 11.

Literatura cytowana w tekście

1. M. I. GORBUNOW-POSADOW, *Obliczanie konstrukcji na sprężystym podłożu*, Budownictwo i Architektura, Warszawa 1956 (tłumacz. z ros.).
2. K. K. Керопян, П. М. Чеголин, *Электрическое моделирование в строительной механике*, Госстройиздат, Москва 1963.
3. A. LISOWSKI, *Analogowe maszyny matematyczne* [skrypt], PWN, Kraków, Warszawa, Łódź 1967.
4. A. LISOWSKI, *Zastosowanie modelowania elektrycznego do obliczania konstrukcji opartych na podłożu sprężystym* (oddano do druku).
5. Г. Б. Муравский, *О модели упругого основания*, Строительная механика и расчет сооружений, № 6/1967.
6. Г. Е. Пухов, В. В. Васильев, А. Е. Степанов, О. Н. Токарева, *Электрическое моделирование задач строительной механики*, Изд. АН Украинской ССР, Киев 1963.
7. R. ŚWITKA, *Aproksymowana półprzestrzeń sprężysta jako model podłoża sprężystego*, Rozprawy Politechniki Poznańskiej, Poznań 1968.

Резюме

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГОГО ОСНОВАНИЯ

Автор предлагает три варианта моделей упругого основания и соответствующие им весьма простые электрические системы. Регуляция основания моделирует силу тока, прогибу соответствует напряжение, а постоянным упругости основания, соответствуют сопротивления. По необходимости, основание рассматривается как систему точек упруго связанных с собой.

Summary

ELECTRIC MODELS OF AN ELASTIC FOUNDATION

The author presents three models of an elastic foundation and the corresponding electric systems. The adjustment of the foundation is represented by the current, the deflection — by the voltage and the elastic constants — by electric resistances. The foundation is treated, of necessity, as a set of points interconnected by elastic links.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 lipca 1968 r.
