

EFEKTYWNE OBLICZANIE RUR GRUBOŚCIENNYCH  
W PRZYPADKU LINIOWEGO WZMOCNIENIA PLASTYCZNEGO

JAN RYŚ (KRAKÓW)

1. Wstęp

C. A. SMITH, F. K. ITERSON i L. B. TURNER w latach 1909–1912 [24, 50 i 53] podali wyniki dotyczące plastycznej deformacji cylindra przy założeniu płaskiego odkształcenia i warunku plastyczności Treski. Od tego czasu ukazała się bardzo duża liczba prac dotyczących grubościennego cylindra.

Z okresu międzywojennego należałoby wymienić głośne prace A. NÁDAI'A i W. W. SOKOŁOWSKIEGO, w których posługując się modelem ciała idealnie sprężysto-plastycznego rozpatrywano stan sprężysto-plastyczny cylindra obciążonego ciśnieniem [34 i 45].

Największe zainteresowanie tematem przypada na okres ostatnich lat dwudziestu. Z dużej liczby prac wymienimy tylko najważniejsze. W roku 1947 R. HILL, E. H. LEE i S. J. TUPPER rozwiązują metodami numerycznymi sprężysto-plastyczną deformację cylindra z uwzględnieniem ściśliwości opierając się na związkach pomiędzy naprężeniami i odkształceniami Prandtla-Reussa i na warunku plastyczności Treski [19]. Dalsze ich prace dotyczą rury z zamkniętymi końcami przy wykorzystaniu warunku plastyczności Misesa [20]. Rurę ze swobodnymi końcami rozwiązują numerycznie na podstawie analogicznych założeń do założeń w pracy [20] C. W. MC. GREGER, L. F. COFFEIN i J. G. FISHER [17]. Przypadek obciążenia ciśnieniem i siłą osiową dla warunku plastyczności Treski z uwzględnieniem ściśliwości dla płaskiego stanu odkształcenia i dla odkrytych i zakrytych końców rury w formie zamkniętych rozwiązań podaje G. ALLEN i D. N. SOPWITH [1]. W latach 1934–1950 G. COOK interesuje się stanem naprężenia i odkształcenia w rurach wykonanych ze stali średnio węglowych przy założeniu nieściśliwości w strefie odkształceń plastycznych. Natomiast P. G. HODGE i G. N. WHITE na podstawie związków Prandtla-Reusa oraz Hencky'ego-Iliuszina przy warunku plastyczności Misesa i założeniu płaskiego stanu odkształcenia oraz uwzględnieniu ściśliwości rozwiązują numerycznie rurę obciążoną ciśnieniem z podaniem przykładu [21].

Wszystkie powyższe prace przyjmowały jako model ciała idealnie sprężysto-plastyczne, tzn. nie uwzględniały wzmocnienia materiału. Różne rozwiązania zależne od przyjętych założeń (z uwzględnieniem wzmocnienia i bez, z uwzględnieniem ściśliwości i przy założeniu nieściśliwości dla płaskiego stanu odkształcenia)

podaje w swoich pracach W. W. SOKOŁOWSKI [44 i 45]. W trudniejszych przypadkach, (np. przy uwzględnieniu wzmocnienia i ściśliwości) rozwiązanie ma charakter numeryczny; w innych przypadkach prostszych (np. bez wzmocnienia i bez uwzględnienia ściśliwości) rozwiązanie ma charakter analityczny. W. W. SOKOŁOWSKI przyjmuje obciążenia ciśnieniem na zewnątrz i od wewnątrz rury, warunek plastyczności Misesa i związki pomiędzy składowymi tensora naprężenia z odkształcenia Hencky'ego-Iliuszina.

Plaskim stanem deformacji cylindra zajmują się A. NÁDAI [34] oraz W. W. MOSKWIĆ; ten ostatni przy warunku nieściśliwości podaje teoretyczne podstawy zagadnienia o wtórnych odkształceniach plastycznych na przykładzie rury grubościennnej, poddanej ciśnieniu; rozwiązanie ma charakter zamknięty [32]. W latach późniejszych autor ten zajmował się sprawą zmiennych obciążeń rury przy przekroczeniu zakresu sprężystości [33].

W latach czterdziestych na Zachodzie uwzględnia się ściśliwość dla modelu ciała bez wzmocnienia, a na Wschodzie w większości prac przyjmuje się nieściśliwość i uwzględnia się wpływ wzmocnienia. G. S. SHAPIRO [48] podaje rozwiązanie numeryczne przy założeniu nieściśliwości dla różnych przypadków rury z odkrytymi i zakrytymi końcami oraz dla płaskiego stanu odkształcenia.

Podobnymi zagadnieniami co G. S. SHAPIRO dla warunku plastyczności Treski zajmują się J. A. BONES i S. CROSLAND [6, 7 i 8], którzy ponadto oszacowali wpływ wzmocnienia przy powtórnym obciążeniu rury na gruncie teorii Mainga. Otrzymane związki mają postać zamkniętą dla obciążenia ciśnieniem od wewnątrz i dotyczą materiału ze wzmocnieniem. Wpływ ściśliwości na stan naprężenia i odkształcenia bada w swojej znanej pracy A. G. KOSTIUK [28] biorąc materiał bez wzmocnienia i ze wzmocnieniem. Od tego okresu datują się także zainteresowania wpływem temperatury cylindra na stan naprężenia i odkształcenia; np. przy przyjęciu kryterium Treski, gdy rura ma różną temperaturę na powierzchniach, rozwiązanie całkowite podaje D. R. BLAND [5] przytaczając przykład numeryczny dla konkretnego przypadku  $\beta = 1/4$  (por. oznaczenia w tekście). Cylindrami bardzo krótkimi, obciążonymi ciśnieniem od wewnątrz, interesował się D. G. CHRISTOPHERSON i G. R. HIGGINSON [10], natomiast krzywymi płynięcia rury oraz naprężeniami szczątkowymi J. H. FAUPEL [13 i 14] oraz R. E. WEIGLE i J. R. PURTEL [54]. W tym też okresie R. HILL wyprowadza równanie różniczkowe rury przy założeniu ściśliwości, opierając się na związkach Henckye'go-Iliuszina oraz na warunku plastyczności Misesa [18]. Równanie to nie zostało jednak rozwiązane i trzeba stosować metody numeryczne. Nie daje ono ponadto zależności pomiędzy przemieszczeniami a obciążeniem. Dla zakresu sprężysto-plastycznego równanie to rozwiązuje N. M. BIELAJEW [9]. W drugiej połowie lat pięćdziesiątych W. G. MANING, M. RABOTNOW i F. RIMROTT [42 i 43] podają nowe rozwiązania, bliższe danym eksperymentalnym. Notuje się też większe zainteresowanie naprężeniami szczątkowymi, kryteriami zniszczenia, niejednorodnością materiału rury. I tak np. dla rury poddanej ciśnieniu (na podstawie warunku plastyczności Treski przy uwzględnieniu ściśliwości i wzmocnienia) E. THOMSON [52] omawia line płynięcia, równania płynięcia i deformacji cylindra aż do momentu zniszczenia. P. M. OGIBAŁOW i W. W. MOSKWIĆ [33 i 37] formu-

łują dla przypadku nieściśliwości całkowite warunki brzegowe dla materiału o dowolnym charakterze wzmocnienia przy uwzględnieniu ciśnień zewnętrznego i wewnętrznego oraz siły osiowej. Punktem wyjścia są równania Hencky'ego-Iliuszina i warunek plastyczności Misesa.

Wszystkie przytoczone wyżej prace nie podają pełnego rozwiązania, a jedynie schemat lub co najwyżej przykłady liczbowe stosując metodę kolejnych przybliżeń, inne — metody numeryczne. Ponadto przyjęcie modelu ciała idealnie sprężysto-plastycznego uniemożliwiło dokładne określenie obszaru plastycznego płynięcia rury. Same obliczenie podstawowych parametrów równowagi jest bardzo żmudne mimo specjalnych metod [5 i 18]. W tym świetle zagadnienie, które przedstawimy z punktu widzenia praktycznego, ma szczególną wagę. Zasadniczą rzeczą jest tutaj odejście od płaskiego stanu odkształcenia oraz uwzględnienie liniowego wzmocnienia materiału przy założeniu nieściśliwości. Takie postawienie zagadnienia daje błąd kilkuprocentowy [44 i 28] i pozwala, jak się okaże, ściśle określić stan naprężenia bezpośrednio przez obciążenia oraz w pewnym układzie współrzędnym zależnym od obciążeń określić rodzaj odkształceń rury. Dokładniej mówiąc, dla danych dowolnie dobranych obciążeń zewnętrznych będziemy mogli z góry ustalić, czy odkształcenie ma charakter sprężysty, sprężysto-plastyczny, plastyczny oraz czy przy danych obciążeniach może nastąpić zniszczenie. Efektywne określenie rodzaju odkształcenia jest zadaniem potrzebnym dla określenia stanu naprężenia i odkształcenia, gdyż decyduje o wyborze odpowiednich równań, określających odkształcenia i naprężenia. Ponadto przyjęcie liniowego plastycznego wzmocnienia materiału bez ograniczenia się do rozpatrywania tylko płaskiego stanu odkształcenia daje dosyć dokładne odwzorowanie rzeczywistych własności materiału dla dowolnej kombinacji obciążeń.

Efektywne opracowanie zagadnienia rury grubościennej może mieć duże znaczenie dla technologii, np. przy rozłaczaniu rur, wtlaczaniu elementów cylindrycznych lub ich termicznym osadzaniu.

## 2. Warunki równowagi wewnętrznej; krzywe graniczne w płaszczyźnie obciążeń

Przyjmujemy układ współrzędnych walcowych  $r, \theta, z$ ; będziemy rozpatrywali rurę grubościenną pod działaniem następujących obciążeń: stałego ciśnienia na promieniu wewnętrznym  $r = a$  o wartości  $p_a$ , a na promieniu zewnętrznym  $r = b$  o wartości  $p_b$  oraz siły osiowej  $P$  (rys. 1). Oznaczając odpowiednie składowe tensora naprężenia i odkształcenia w punkcie zgodnie z przyjętymi kierunkami odpowiednio przez  $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$  oraz  $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z = -\bar{\varepsilon} = \text{const}$ , przy założeniu nieściśliwości materiału i na podstawie związków między składowymi tensora naprężenia i odkształcenia Hencky'ego-Iliuszina, otrzymamy dwa następujące równania równowagi podane przez P. M. OGIBAŁOWA i A. A. ILIUSZINA [23]:

$$(2.1) \quad p_a - p_b = \frac{4C}{3} \int_a^b \frac{\sigma_i(\varepsilon_i)}{r^3 \varepsilon_i} dr, \quad \frac{P}{\pi} - a^2 p_a + b^2 p_b = -2\bar{\varepsilon} \int_a^b \frac{\sigma_i(\varepsilon_i)}{\varepsilon_i} r dr,$$

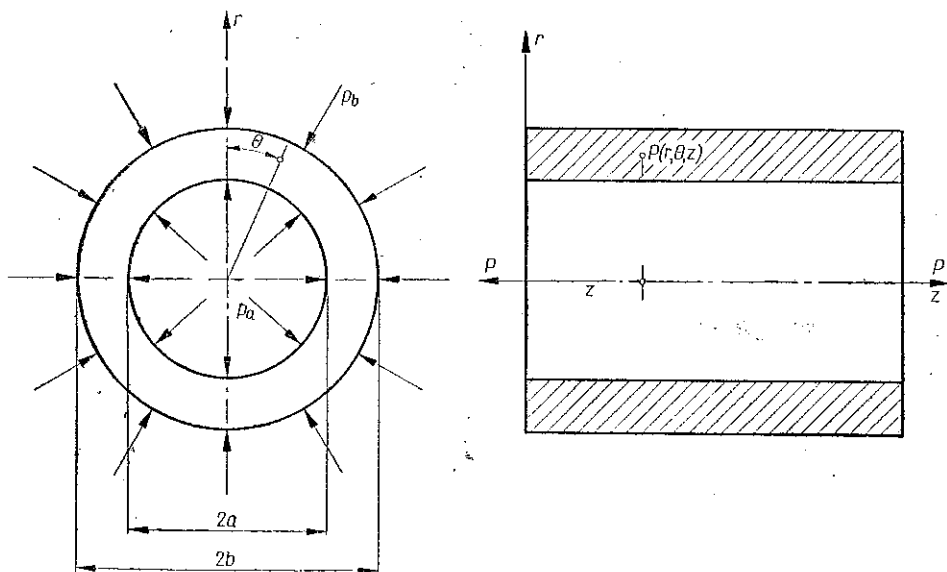
gdzie  $C$  i  $\bar{\varepsilon}$  oznaczają stałe, a  $\sigma_i$  i  $\varepsilon_i$  intensywność odkształcenia i naprężenia.

Po wprowadzeniu zmiennych równania (2.1) można napisać w postaci

$$(2.2) \quad p_a - p_b = -\frac{\text{sign } \Delta_p}{\sqrt{3}} \int_{\varepsilon_{ia}}^{\varepsilon_{ib}} \frac{\sigma_i(\varepsilon_i)}{\sqrt{\varepsilon_i^2 - \varepsilon^2}} d\varepsilon_i,$$

$$\frac{P}{\pi} - a^2 p_a + b^2 p_b = \frac{2\varepsilon C \text{ sign } \Delta_p}{\sqrt{3}} \int_{\varepsilon_{ia}}^{\varepsilon_{ib}} \frac{\sigma_i(\varepsilon_i)}{\sqrt{(\varepsilon_i^2 - \varepsilon^2)^3}} d\varepsilon_i,$$

gdzie  $\varepsilon_{ia}$  i  $\varepsilon_{ib}$  oznaczają składowe tensora odkształcenia na powierzchniach odpowiednio  $r = a$  i  $r = b$ , a  $\Delta_p = p_a - p_b$ .



Rys. 1

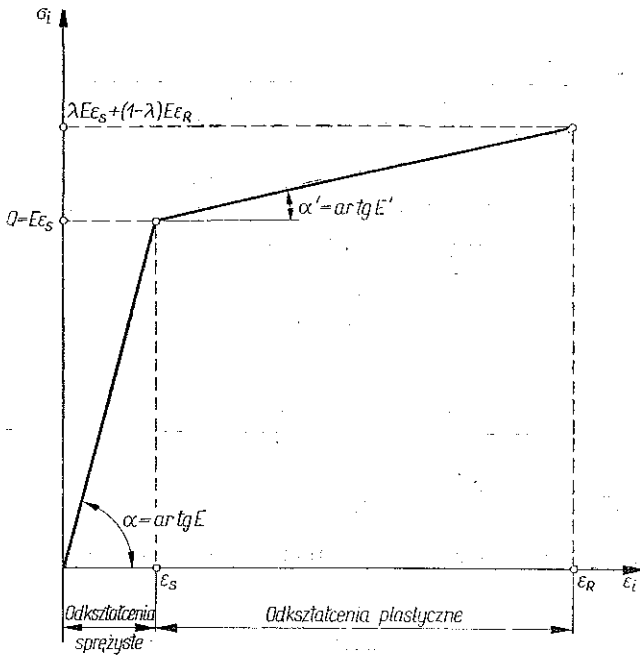
Zajmiemy się obecnie rozwiązaniem równań zakładając, że materiał wykazuje wzmocnienie liniowe (rys. 2), dla którego naprężenia będą określone następująco:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \sigma_i &= E\varepsilon_i & \text{dla } \varepsilon_i \leq \varepsilon_s, \\ \sigma_i &= (1 - \lambda) E\varepsilon_i + \lambda E\varepsilon_s & \text{dla } \varepsilon_i > \varepsilon_s. \end{aligned}$$

Wracając do wykresu na rys. 2 widzimy, że przez  $\varepsilon_s$  oznaczono odkształcenie odpowiadające granicy plastyczności, natomiast

$$(2.4) \quad \lambda = \frac{E - E'}{E}$$

oznacza współczynnik wzmocnienia materiału, wyznaczony empirycznie; wartość jego dla większości metali i stopów waha się w granicach 0,92–0,98.



Rys. 2

Zajmiemy się najpierw przypadkiem pełnego uplastycznienia rury. Podstawiając (2.3)<sub>1</sub> do (2.2) i całkując otrzymamy:

$$(2.5) \quad \sqrt{3} (p_a - p_b) = \left[ \lambda E \varepsilon_s \ln \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{C}{a^2} + \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{4}{3} \frac{C^2}{a^4}}}{\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{C}{b^2} + \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{4}{3} \frac{C^2}{b^4}}} + \frac{2}{\sqrt{3}} E(1-\lambda) \left( \frac{C}{a^2} - \frac{C}{b^2} \right) \right] \text{sign } \Delta p,$$

$$\frac{P}{\pi} - a^2 p_a + b^2 p_b = - \left[ \frac{\lambda E \varepsilon_s}{\varepsilon} \left( b^2 \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{4}{3} \frac{C^2}{a^4}} - a^2 \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{4}{3} \frac{C^2}{b^4}} \right) + E \varepsilon (1-\lambda) (b^2 - a^2) \right] \text{sign } \Delta p.$$

Wprowadzając oznaczenie

$$(2.6) \quad c = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{C}{a^2 \varepsilon},$$

obliczymy z równań (2.5) stałe  $\bar{\varepsilon}$  i  $C$  w formie

$$(2.7) \quad \bar{\varepsilon} = \frac{B \operatorname{sign} \Delta_p - (\sqrt{1+c^2} \beta^4 - \beta^2 \sqrt{1+c^2}) \operatorname{sign} c}{\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)(1-\beta^2)} \varepsilon_s,$$

$$C = \frac{A \operatorname{sign} \Delta_p - (\operatorname{arsh} c - \operatorname{arsh} c\beta^2) \operatorname{sign} c}{\frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)(1-\beta^2)} a^2 \varepsilon_s.$$

We wzorach tych wprowadziliśmy oznaczenia

$$(2.8) \quad B = \frac{\beta^2 p_a - p_b - \frac{P}{\pi b^2}}{\lambda E \varepsilon_s}, \quad A = \frac{\sqrt{3} (p_a - p_b)}{\lambda E \varepsilon_s}, \quad \beta = \frac{a}{b}.$$

Podstawiając (2.7) do (2.6) otrzymamy równanie

$$(2.9) \quad A \operatorname{sign} \Delta_p = B c \operatorname{sign} \Delta_p + [\operatorname{arsh} f(c, \beta) - f(c, \beta)] \operatorname{sign} c,$$

przy czym

$$(2.10) \quad f(c, \beta) = c\sqrt{1+c^2} \beta^4 - c\beta^2 \sqrt{1+c^2}.$$

Nie rozwiązując równania (2.9) wyrażmy składowe odkształcenia  $\varepsilon_i$  i przemieszczenie promienia  $u$  jako funkcję wprowadzonego parametru  $c$ . Ponieważ

$$(2.11) \quad u = \frac{1}{2} \bar{\varepsilon} r + \frac{C}{r}, \quad \varepsilon_i = \sqrt{\bar{\varepsilon}^2 + \frac{4}{3} \frac{C^2}{r^4}},$$

to po podstawieniu (2.7) otrzymamy

$$(2.12) \quad u = \frac{B \operatorname{sign} \Delta_p - (\sqrt{1+c^2} \beta^4 - \beta^2 \sqrt{1+c^2}) \operatorname{sign} c}{2 \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)(1-\beta^2)} r +$$

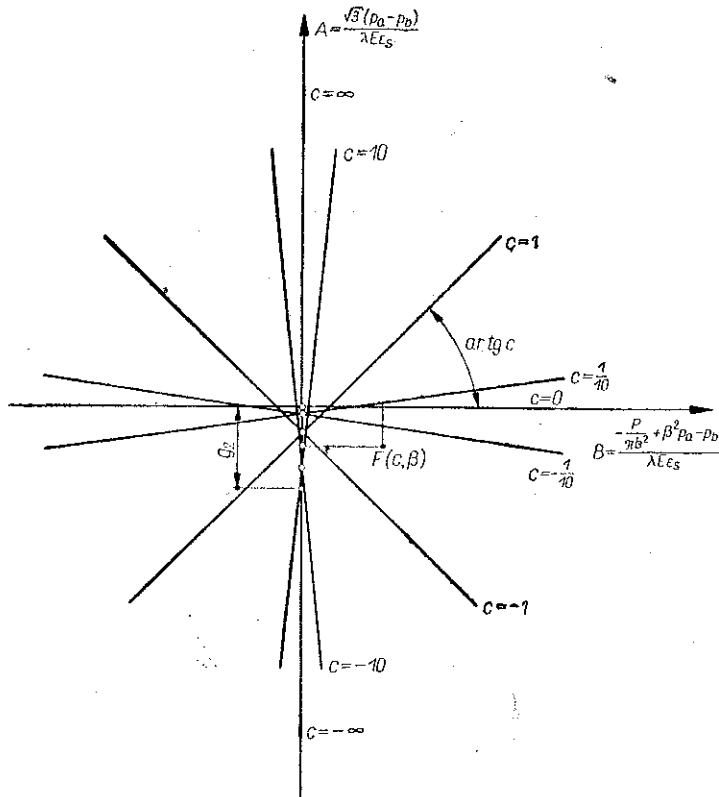
$$+ \frac{[A \operatorname{sign} \Delta_p - (\operatorname{arsh} c - \operatorname{arsh} c\beta^2) \operatorname{sign} c] a^2 \varepsilon_s}{\frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)(1-\beta^2) r},$$

$$\varepsilon_i = \frac{\varepsilon_s}{\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)(1-\beta^2)} \left\{ [B \operatorname{sign} \Delta_p - (\sqrt{1+c^2} \beta^4 - \beta^2 \sqrt{1+c^2})]^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{a}{r}\right)^2 [A \operatorname{sign} \Delta_p - (\operatorname{arsh} c - \operatorname{arsh} c\beta^2)]^2 \right\}^{1/2}.$$

Należy zwrócić uwagę, że  $A$  i  $B$  są zależne od obciążenia w stosunku do granicy plastyczności  $E\varepsilon_s$  pomnożonej przez współczynnik wzmocnienia materiału  $\lambda$ : są to

niejako względne obciążenia bezwymiarowe, na ogół zawsze znane. Wprowadzenie jednej zmiennej  $c$  zamiast  $\bar{e}$  i  $C$  jest korzystne, gdyż pozwala określić wszystkie składowe stanu naprężenia i odkształcenia jako funkcje wielkości  $A, B$  i  $c$ .



Rys. 3

Przyjmijemy obecnie układ współrzędnych  $A, B$  (rys. 3); będzie to układ obciążeń zewnętrznych. W tym układzie równanie (2.9) przedstawia pęk prostych. Tangens nachylenia prostej jest wprost wartością  $c$ , a punkt przecięcia osi  $A$  z prostą określa funkcja

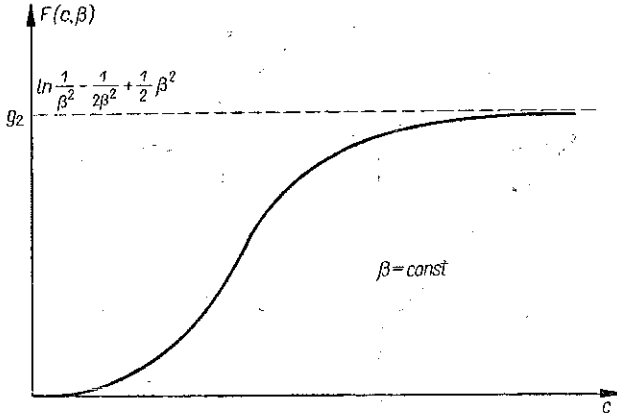
$$(2.13) \quad F(c, \beta) = [\operatorname{arsh}(c\sqrt{1+c^2}\beta^4 - c\beta^2\sqrt{1+c^2}) - (c\sqrt{1+c^2}\beta^4 - c\beta^2\sqrt{1+c^2})] \operatorname{sign} c.$$

Wykres funkcji  $F(c, \beta)$  przedstawia rys. 4. Łatwo sprawdzić, że

$$(2.14) \quad \begin{aligned} g_1 &= \lim_{c \rightarrow 0} F(c, \beta) = 0, \\ g_2 &= \lim_{c \rightarrow \pm\infty} F(c, \beta) = \ln \frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{2\beta^2} + \frac{1}{2} \beta^2; \end{aligned}$$

np. dla  $\beta = 0,5$   $g_2 = -0,49$ .

Graniczne rozwiązanie równania równowagi (2.9) jest możliwe, lecz byłoby to bardzo pracochłonne; rys. 3 podaje więc jedynie interpretację równania równowagi, co okaże się dalej bardzo przydatne. Ponadto nie wiemy, dla jakiej części płaszczyzny równanie byłoby prawidłowe, dotyczy ono bowiem stanu całkowitego uplastycznienia rury. Celowe byłoby więc sprecyzowanie w układzie obciążenia  $A, B$  obszarów odpowiadający poszczególnym trzem stanom rury.



Rys. 4

Rura będzie w stanie plastycznym wówczas, jeżeli na całym przekroju ulegnie uplastycznieniu, ale nie nastąpi jeszcze zniszczenie; powinny więc być spełnione następujące warunki:

$$(2.15) \quad \varepsilon_{ia} \leq \varepsilon_R, \quad \varepsilon_{ib} \geq \varepsilon_s$$

(por. rys. 2). Rura znajdzie się w stanie sprężysto-plastycznym (uplastycznienie nastąpi od strony wewnętrznej), jeśli

$$(2.16) \quad \varepsilon_{ib} < \varepsilon_s, \quad \varepsilon_{ia} \geq \varepsilon_s.$$

I wreszcie rura będzie w stanie odkształcenia sprężystego, jeśli

$$(2.17) \quad \varepsilon_{ia} \leq \varepsilon_s.$$

Dla zakresu plastycznego skorzystajmy ze wzoru na intensywność odkształcenia (2.12)<sub>2</sub>; po wykorzystaniu (2.24) otrzymamy

$$(2.18) \quad \left\{ [B \operatorname{sign} \Delta_p - (\sqrt{1+c^2} \beta^4 - \beta^2 \sqrt{1+c^2})]^2 + \right. \\ \left. + [A \operatorname{sign} \Delta_p - (\operatorname{arsh} c - \operatorname{arsh} c\beta^2)]^2 \right\}^{1/2} \leq \left( \frac{1}{\lambda} - 1 \right) (1 - \beta^2) \xi, \\ \left\{ [B \operatorname{sign} \Delta_p - \sqrt{1+c^2} \beta^4 - \beta^2 \sqrt{1+c^2}]^2 + \right. \\ \left. + \beta^4 [A \operatorname{sign} \Delta_p - (\operatorname{arsh} c - \operatorname{arsh} c\beta^2)]^2 \right\}^{1/2} \geq \left( \frac{1}{\lambda} - 1 \right) (1 - \beta^2),$$

gdzie  $\xi = \varepsilon_R/\varepsilon_s$ .

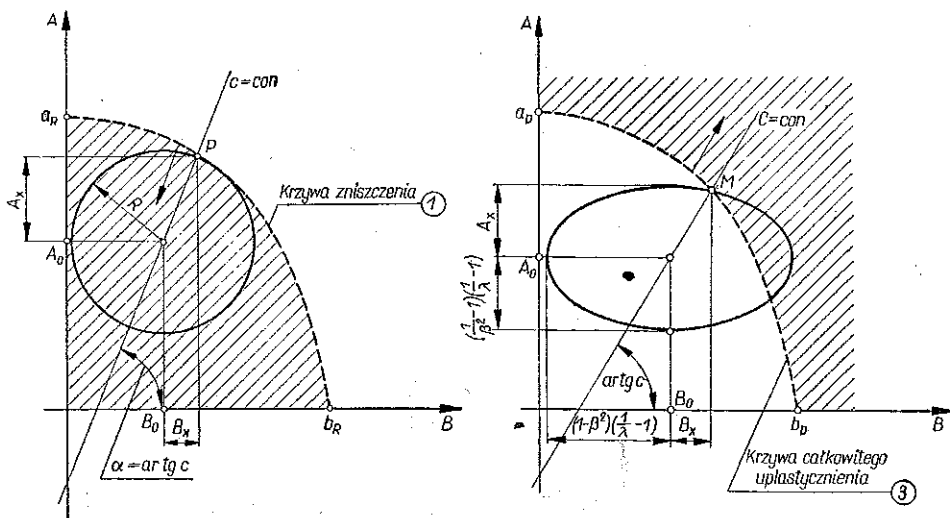


Podnieśmy równanie (2.18)<sub>1</sub> obustronnie do kwadratu; przy oznaczeniach

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \operatorname{arsh} c - \operatorname{arsh} c\beta^2, \\
 B_0 &= \sqrt{1+c^2\beta^4} - \beta^2\sqrt{1+c^2}, \\
 R &= \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)(1-\beta^2)\xi
 \end{aligned}
 \tag{2.19}$$

otrzymamy

$$(A \operatorname{sign} \Delta_p - A_0)^2 + (B \operatorname{sign} \Delta_p - B_0)^2 \leq R^2.
 \tag{2.20}$$



Rys. 5

W układzie obciążenia  $A, B$  będzie to obszar ograniczony punktami  $P$  przecięcia się koła o promieniu  $R$  z prostą  $c = \text{const}$ . Środek koła ma współrzędne  $A_0$  i  $B_0$  (rys. 5) i leży na odpowiedniej prostej równowagi  $c = \text{const}$ , co łatwo sprawdzić podstawiając  $A_0$  i  $B_0$  do równania równowagi (2.9).

Z rys. 5 wynika, że

$$A \leq A_0 + A_x, \quad B \leq B_0 + B_x,
 \tag{2.21}$$

a po podstawieniu

$$\begin{aligned}
 A_x &= \xi \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) (1 - \beta^2) \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}, \\
 B_x &= \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) (1 - \beta^2) \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}
 \end{aligned}
 \tag{2.22}$$

otrzymamy równanie parametryczne obszaru

$$(2.23) \quad \begin{aligned} A &\leq \operatorname{arsh} c - \operatorname{arsh} c\beta^2 + \xi \left( \frac{1}{\lambda} - 1 \right) (1 - \beta^2) \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}, \\ B &\leq \sqrt{1+c^2} \beta^4 - \beta^2 \sqrt{1+c^2} + \xi \left( \frac{1}{\lambda} - 1 \right) (1 - \beta^2) \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}. \end{aligned}$$

Krzywa ta (2.23) przy parametrze  $c$  ogranicza obszar od góry (krzywa zniszczenia 1); jest ona bardzo zbliżona do elipsy i przecina osie współrzędnych  $A, B$  w punktach

$$(2.24) \quad \begin{aligned} a_R &= A_{c=\infty} = \ln \frac{1}{\beta^2} + \xi \left( \frac{1}{\lambda} - 1 \right) (1 - \beta^2), \\ b_R &= B_{c=0} = (1 - \beta^2) \left[ 1 + \xi \left( \frac{1}{\lambda} - 1 \right) \right]. \end{aligned}$$

Analogicznie równanie (2.18)<sub>2</sub> można napisać (por. rys. 5) w postaci

$$(2.25) \quad \begin{aligned} A &\geq \operatorname{arsh} c - \operatorname{arsh} c\beta^2 + \left( \frac{1}{\lambda} - 1 \right) (1 - \beta^2) \frac{c}{\sqrt{1+c^2} \beta^4}, \\ B &\geq \sqrt{1+c^2} \beta^4 - \beta^2 \sqrt{1+c^2} + \left( \frac{1}{\lambda} - 1 \right) (1 - \beta^2) \frac{1}{\sqrt{1+c^2} \beta^4}. \end{aligned}$$

Punkty charakterystyczne krzywej ograniczającej obszar od dołu (2.25) (krzywa całkowitego uplastycznienia 3) na osiach współrzędnych  $A, B$  będą

$$(2.26) \quad a_p = A_{c=\infty} = \left( \frac{1}{\lambda} - 1 \right) \left( \frac{1}{\beta^2} - 1 \right) + \ln \frac{1}{\beta^2}, \quad b_p = B_{c=0} = \frac{1 - \beta^2}{\lambda}.$$

Równania krzywych 1 i 2 dają się z dużą dokładnością aproksymować elipsami, przy czym maksymalny błąd aproksymacji jest bardzo mały i wynosi przykładowo dla  $\beta = 0,5$  wynosi 4,2%.

Obszary wyznaczone przez elipsy będą określone przez następujące nierówności:

$$(2.27) \quad \left( \frac{A}{a_R} \right)^2 + \left( \frac{B}{b_R} \right)^2 \leq 1, \quad \left( \frac{A}{a_p} \right)^2 + \left( \frac{B}{b_p} \right)^2 \geq 1.$$

Na rys. 5 wykres elips aproksymacyjnych zaznaczono linią przerywaną 2 i 4.

Mając wyznaczony obszar odkształceń plastycznych możemy znaleźć obszar odkształceń sprężysto-plastycznych przez określenie obszaru odkształceń sprężystych w układzie  $A, B$  [por. nierówności (2.15), (2.16) i (2.17)]. Jeżeli do równań (2.1) podstawiamy (2.3)<sub>1</sub> to dla  $\operatorname{sign} \Delta_p = 1$  otrzymamy

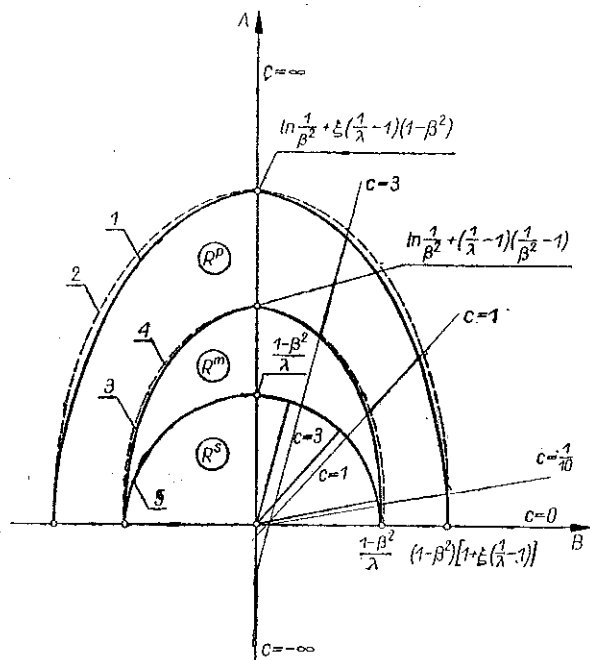
$$(2.28) \quad c = \frac{A}{B}, \quad \varepsilon_{ia} = \frac{\lambda}{1 - \beta^2} \sqrt{A^2 + B^2} \varepsilon_s,$$

a po wykorzystaniu warunku (2.17)

$$(2.29) \quad \sqrt{A^2+B^2} \leq \frac{1-\beta^2}{\lambda}$$

Krzywa ograniczająca obszar odkształceń sprężystych 5 jest więc okręgiem o promieniu  $(1-\beta^2)/\lambda$ .

Na rys. 6 naniesiono wszystkie trzy krzywe ograniczające obszary: sprężysty (oznaczony  $R^s$ ), sprężysto-plastyczny (oznaczony  $R^m$ ) i plastyczny (oznaczony  $R^p$ ). Linia przerywaną zaznaczono krzywe aproksymacyjne 2 i 4 wyznaczone przez równanie (2.27), natomiast krzywe 1, 3, 5 odpowiadają wzorom (2.23), (2.25) i (2.29). Wykresy sporządzono dla  $\text{sign } \Delta_p = 1$ ; dla  $\text{sign } \Delta_p = -1$  otrzymamy zwierciadlane odbicie względem osi  $B$ .



Rys. 6

Należy zwrócić uwagę na linie stałego parametru  $c$ . W zakresie  $R^s$  są prostymi przechodzącymi przez początek układu  $A, B$ , w obszarze  $R^p$  są również prostymi z małym równoległym przesunięciem względem prostej dla  $R^s$ , w obszarze  $R^m$  należy stałą  $c$  wyznaczyć oddzielnie dla stref odkształceń sprężystych i plastycznych w zależności od zaawansowania odkształceń plastycznych.

Znaczenie podanego wykresu jest duże, gdyż dla dowolnego układu obciążeń zewnętrznych możemy z góry określić obszar odkształceń, które te obciążenia wywołują. Możemy więc przystąpić do obliczenia wielkości interesujących nas odkształceń i naprężeń dla każdego obszaru.

### 3. Stan naprężenia i odkształcenia w przypadku całkowitego uplastycznienia rury

W punkcie poprzednim rozstrzygnięto, w jakim stanie znajdować się będzie rura w zależności od obciążeń zewnętrznych oraz kiedy nośność zostanie całkowicie wyczerpana i nastąpi zniszczenie.

Postępującemu obciążeniu towarzyszyć będzie postępująca deformacja cylindra i wiążący się z odkształceniami stan naprężenia. W przypadku całkowitego uplastycznienia rury naprężenia obliczamy ze wzorów Hencky'ego-Iliuszina:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \sigma_2 - \sigma_1 &= \frac{4}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \frac{C}{r^2}, \\ \sigma_1 - \sigma_3 &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \left( \frac{3}{2} \bar{\varepsilon} - \frac{C}{r^2} \right), \\ \sigma_3 - \sigma_2 &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \left( \frac{3}{2} \bar{\varepsilon} + \frac{C}{r^2} \right). \end{aligned}$$

Wykorzystując równanie na naprężenia promieniowe

$$(3.2) \quad \sigma_r = -p_a - \frac{\text{sign } \Delta_p}{\sqrt{3}} \int_{\varepsilon_{ia}}^{\varepsilon_i} \frac{\sigma_i}{\sqrt{\varepsilon_i^2 - \bar{\varepsilon}^2}} d\varepsilon_i$$

i podstawiając do (3.2) funkcję (2.3)<sub>2</sub> po scałkowaniu otrzymamy

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \sigma_r = p_a + \frac{\lambda E \varepsilon_s}{\sqrt{3}} \text{sign } \Delta_p \text{sign } c \left( \text{arsh } c - \text{arsh } c \frac{a^2}{r^2} \right) + \\ + \frac{1 - \frac{a^2}{r^2}}{1 - \beta^2} \left[ (p_a - p_b) - \frac{\lambda E \varepsilon_s}{\sqrt{3}} \text{sign } \Delta_p \text{sign } c (\text{arsh } c - \text{arsh } c \beta^2) \right]. \end{aligned}$$

Następnie korzystając ze związków (3.1) obliczamy dalsze składowe stanu naprężenia jako funkcje ciśnienia i stałej  $c$  określonej przez równanie równowagi (2.9):

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \sigma_\theta = -p_a + \frac{\lambda E \varepsilon_s}{\sqrt{3}} \text{sign } c \text{sign } \Delta_p \left[ \frac{2c \left( \frac{a}{r} \right)^2}{\sqrt{1 + c^2 \left( \frac{a}{r} \right)^4}} + \text{arsh } c - \text{arsh } c \frac{a^2}{r^2} \right] + \\ + \frac{1 + \frac{a^2}{r^2}}{1 - \beta^2} \left[ (p_a - p_b) - \frac{\lambda E \varepsilon_s}{\sqrt{3}} \text{sign } \Delta_p \text{sign } c (\text{arsh } c - \text{arsh } c \beta^2) \right], \\ \sigma_z = -p_a + \frac{\lambda E \varepsilon_s}{\sqrt{3}} \text{sign } c \text{sign } \Delta_p \left[ \frac{\left( c \frac{a^2}{r^2} - \sqrt{3} \right)}{\sqrt{1 + c^2 \left( \frac{a}{r} \right)^4}} + \text{arsh } c - \text{arsh } c \frac{a^2}{r^2} \right] + \\ + \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{c}}{1 - \beta^2} \left[ (p_a - p_b) - \frac{\lambda E \varepsilon_s}{\sqrt{3}} \text{sign } \Delta_p \text{sign } c (\text{arsh } c - \text{arsh } c \beta^2) \right]. \end{aligned}$$

Analogicznie wyznaczamy składowe odkształcenia:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{r0} &= \frac{B \operatorname{sign} \Delta_p - (\sqrt{1+c^2} \beta^4 - \beta^2 \sqrt{1+c^2}) \operatorname{sign} c}{2 \left( \frac{1}{\lambda} - 1 \right) (1 - \beta^2)} \varepsilon_s \pm \\ &\pm \frac{A \operatorname{sign} \Delta_p - (\operatorname{arsh} c - \operatorname{arsh} c \beta^2) \operatorname{sign} c}{\frac{2}{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{\lambda} - 1 \right) (1 - \beta^2)} \frac{a^2}{r} \varepsilon_s, \\ \varepsilon_z &= - \frac{B \operatorname{sign} \Delta_p - (\sqrt{1+c^2} \beta^4 - \beta^2 \sqrt{1+c^2}) \operatorname{sign} c}{\left( \frac{1}{\lambda} - 1 \right) (1 - \beta^2)} \varepsilon_s. \end{aligned}$$

Przemieszczenie promieniowe wg (2.7) wynosi

$$(3.6) \quad u = \frac{B \operatorname{sign} \Delta_p - (\sqrt{1+c^2} \beta^4 - \beta^2 \sqrt{1+c^2}) \operatorname{sign} c}{2 \left( \frac{1}{\lambda} - 1 \right) (1 - \beta^2)} r \varepsilon_s + \\ + \frac{A \operatorname{sign} \Delta_p - (\operatorname{arsh} c - \operatorname{arsh} c \beta^2) \operatorname{sign} c}{\frac{2}{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{\lambda} - 1 \right) (1 - \beta^2)} \frac{a^2}{r} \varepsilon_s.$$

Wszystkie podane wyżej wzory można przekształcić do innej postaci za pomocą (2.9) w zależności od danych wyjściowych. Niemniej łatwo sprawdzić, że dla dwóch przypadków krańcowych, tj. płaskiego stanu odkształcenia, gdy  $c = \infty$ ,  $\bar{\varepsilon} = 0$  oraz  $B = 0$ , jak również dla rozciągania przy obustronnym ściskaniu  $p_a = p_b = 0$ ,  $A = 0$ . Powyższe równości wtedy upraszczają się i zgodne są z literaturą [23, 32 i 18].

Dla każdego innego przypadku zachodzi konieczność obliczenia jednej nieznannej stałej o zależności od obciążenia, materiału i kształtu rury. Aby ją bliżej sprecyzować, wyrażamy ją w odkształceniach i naprężeniach zgodnie z (2.6), (2.7) i (3.5):

$$(3.7) \quad c = \left[ \frac{\varepsilon_\theta - \varepsilon_r}{\sqrt{3} \bar{\varepsilon}} \right]_{r=a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \frac{\varepsilon_\theta - \varepsilon_r}{\varepsilon_\theta + \varepsilon_r} \right]_{r=a}.$$

Wynika stąd następujący wniosek: rozkład naprężeń i odkształceń w rurze zależy od stosunku różnicy do sumy odkształcenia obwodowego i promieniowego na wewnętrznej powierzchni rury. Wartość stałej  $c$  zgodnie z (3.7) można wyznaczyć również empirycznie wyznaczając stan naprężenia lub odkształcenia rury. Stała  $c$  jak widać z podanych wzorów, charakteryzuje jednoznacznie (poza obciążeniem, stałymi materiałowymi i wymiarami rury) wykres naprężeń i odkształceń w przekroju. Dla płaskiego stanu odkształcenia otrzymamy  $\bar{\varepsilon} = 0$ , co daje  $c = \infty$ , a dla prostego rozciągania z hydrostatycznym ciśnieniem  $p_a = p_b$  mamy  $\varepsilon_\theta = \varepsilon_r$  i w konsekwencji  $c = 0$ , co można udowodnić na podstawie wzoru (2.9). Zależność (2.9) podaje bowiem związek między stałą  $c$  a obciążeniem, tj. bezpośrednimi przyczynami powstałych odkształceń. Dla różnych obciążeń, dla których stosunek (3.7) jest stały, charakter

zmiennosci naprężeń w rurze jest podobny. Korzystając z graficznej interpretacji przedstawionej na rys. 5 mogliśmy dla danych obciążeń w obszarze  $R^p$  odczytać, jaki jest obszar zmiennosci  $c$ . Oprócz graficznego rozwiązania, które może być mało dokładne, podamy metodę obliczania stałej  $c$ . W ogólnym przypadku należy parametr  $c$  określić z rozwiązania równania przestępnego (2.9). Dla uzyskania efektywnych rozwiązań posłużymy się szeregiem potęgowym. Założymy obecnie, że stan odkształceń odbiega w pewnym stopniu od płaskiego, tzn. że

$$(3.8) \quad \eta = \frac{1}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{\bar{\varepsilon}}{C} a^2 < 1.$$

Aby obliczyć  $c$ , posłużymy się równaniami całkowymi (2.1) całkując względem bezwymiarowego promienia  $\varrho = r/a$ ; podstawiając (2.3)<sub>2</sub> i (2.11)<sub>2</sub>, w pierwszym etapie otrzymamy

$$(3.9) \quad A = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{C}{a^2 \varepsilon_s} \left( \frac{1}{\lambda} - 1 \right) (1 - \beta^2) + 2 \int_1^{1/\beta} \frac{d\varrho}{\sqrt{\eta^2 \varrho^4 + 1}},$$

$$B = \frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_s} \left( \frac{1}{\lambda} - 1 \right) (1 - \beta^2) + 2\eta\beta^2 \int_1^{1/\beta} \frac{\varrho^3 d\varrho}{\sqrt{\eta^2 \varrho^4 + 1}},$$

gdzie  $A$  i  $B$  określają wzory (2.12) i (2.13).

Z równań (3.9) obliczamy  $C$  i  $\bar{\varepsilon}$  i podstawiamy do (3.8), a następnie rozwijając w szereg potęgowy wyrażenia podcałkowe znajdziemy

$$(3.10) \quad B = \left( A - \ln \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{2\beta^2} - \frac{1}{2} \beta^2 \right) \eta + \left( -\frac{1}{8} \beta^{-6} + \frac{1}{4} \beta^{-4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \beta^2 \right) \eta^3 + \left( \frac{1}{16} \beta^{-10} - \frac{3}{32} \beta^{-8} + \frac{3}{32} - \frac{1}{16} \beta^2 \right) \eta^5 + \left( -\frac{5}{128} \beta^{-14} + \frac{5}{96} \beta^{-12} - \frac{5}{96} + \frac{5}{128} \beta^2 \right) \eta^7 + \dots$$

Po odwróceniu szeregu względem  $\eta$ , znajdziemy

$$(3.11) \quad \eta = \frac{B}{a_1} - \frac{a_3}{a_1} \left( \frac{B}{a_1} \right)^3 + \left[ 3 \left( \frac{a_2}{a_1} \right)^2 - \frac{a_5}{a_1} \right] \left( \frac{B}{a_1} \right)^5 + \dots,$$

gdzie

$$(3.12) \quad B = \frac{-\frac{P}{\pi b^2} + \beta^2 p_a - p_b}{E \varepsilon_s},$$

$$a_1 = \frac{\sqrt{3} (p_a - p_b)}{E \varepsilon_s} - \ln \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{2\beta^2} - \frac{1}{2} \beta^2,$$

$$a_3 = -\frac{1}{8} \beta^{-6} + \frac{1}{4} \beta^{-4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \beta^2,$$

$$a_5 = \frac{1}{16} \beta^{-10} - \frac{3}{32} \beta^{-8} + \frac{3}{32} - \frac{1}{16} \beta^2.$$

Praktycznie biorąc szereg (3.11) jest bardzo szybkozbieżny, jeżeli

$$(3.13) \quad \frac{B}{a_1} < 1.$$

Odpowiadające temu obciążeniu składowe naprężeń wg (3.1) jako funkcje stałej  $\eta$  (3.11) i bezwymiarowego promienia  $\varrho$  wyniosą

$$(3.14) \quad \begin{aligned} \sigma_r = & -p_a + \frac{2\lambda E \varepsilon_s}{\sqrt{3}} \left[ \ln \varrho - \frac{\eta^2}{8} (\varrho^4 - 1) + \frac{3\eta^4}{64} (\varrho^8 - 1) - \right. \\ & \left. - \frac{5}{192} \eta^6 (\varrho^{12} - 1) + \dots \right] + \frac{1 - \varrho^{-2}}{1 - \beta^2} \left\{ p_a - p_b - \frac{2\lambda E \varepsilon_s}{\sqrt{3}} \times \right. \\ & \left. \times \left[ \ln \frac{1}{\beta} - \frac{\eta^2}{8} \left( \frac{1}{\beta^4} - 1 \right) + \frac{3}{64} \eta^4 \left( \frac{1}{\beta^8} - 1 \right) - \frac{5}{192} \eta^6 \left( \frac{1}{\beta^{12}} - 1 \right) + \dots \right] \right\}, \\ \sigma_\theta = & -p_a + \frac{2\lambda E \varepsilon_s}{\sqrt{3}} \left[ 1 + \ln \varrho - \frac{\eta^2}{8} (5\varrho^4 - 1) + \frac{3\eta^4}{64} (9\varrho^8 - 1) - \right. \\ & \left. - \frac{5\eta^6}{192} (13\varrho^{12} - 1) + \dots \right] + \frac{1 + \varrho^{-2}}{1 - \beta^2} \left\{ p_a - p_b - \frac{2\lambda E \varepsilon_s}{\sqrt{3}} \times \right. \\ & \left. \times \left[ \ln \frac{1}{\beta} - \frac{\eta^2}{8} \left( \frac{1}{\beta^4} - 1 \right) + \frac{3\eta^4}{64} \left( \frac{1}{\beta^8} - 1 \right) - \frac{5\eta^6}{192} \left( \frac{1}{\beta^{12}} - 1 \right) + \dots \right] \right\}, \\ \sigma_z = & -p_a + \frac{2\lambda E \varepsilon_s}{\sqrt{3}} \left[ \frac{1}{2} + \ln \varrho - \frac{\sqrt{3}}{2} \eta \varrho^2 - \frac{\eta^2}{8} (3\varrho^4 - 1) + \frac{\sqrt{3}}{4} \eta^3 \varrho^6 + \right. \\ & \left. + \frac{3\eta^4}{64} (5\varrho^8 - 1) + \dots \right] + \frac{1 - \sqrt{3} \eta}{1 - \beta^2} \left\{ p_a - p_b - \frac{2\lambda E \varepsilon_s}{\sqrt{3}} \times \right. \\ & \left. \times \left[ \ln \frac{1}{\beta} - \frac{\eta^2}{8} \left( \frac{1}{\beta^4} - 1 \right) + \frac{3\eta^4}{64} \left( \frac{1}{\beta^8} - 1 \right) - \frac{5\eta^6}{192} \left( \frac{1}{\beta^{12}} - 1 \right) + \dots \right] \right\}. \end{aligned}$$

Analogicznie, rozwijając funkcje podcałkowe (2.1) względem zmiennej  $c$ , co odpowiada przewadze obciążenia spowodowanego siłą osiową  $P$ , otrzymamy

$$(3.15) \quad c = \frac{A}{B} - \frac{b_3}{B} \left( \frac{A}{B} \right)^3 + \left[ 3 \left( \frac{b_3}{B} \right)^2 - \frac{b_5}{B} \right] \left( \frac{A}{B} \right)^5 + \dots,$$

gdzie

$$(3.16) \quad \frac{A}{B} = \frac{\sqrt{3}(p_a - p_b)}{\beta^2 p_a - p_b - \frac{P}{\pi b^2}}, \quad b_3 = \frac{1}{6} (1 - 3\beta^2 + 3\beta^4 - \beta^6),$$

$$b_5 = \frac{1}{40} (3 - 5\beta^2 + 5\beta^8 - 3\beta^{10}).$$

Składowe naprężeń odpowiednio wyniosą

$$\begin{aligned}
 \sigma_r = & -p_a + \frac{\lambda E \varepsilon_s |c|}{\sqrt{3}} \left[ 1 - \varrho^{-2} - \frac{c^2}{6} (1 - \varrho^{-6}) + \frac{3c^4}{40} (1 - \varrho^{-10}) - \right. \\
 & \left. - \frac{c^6}{24} (1 - \varrho^{-14}) + \dots \right] + \frac{1 - \varrho^{-2}}{1 - \beta^2} \left\{ p_a - p_b - \frac{\lambda E \varepsilon_s |c|}{\sqrt{3}} \times \right. \\
 & \left. \times \left[ 1 - \beta^2 - \frac{c^2}{6} (1 - \beta^6) + \frac{3c^4}{40} (1 - \beta^{10}) - \frac{c^6}{24} (1 - \beta^{14}) + \dots \right] \right\}, \\
 (3.17) \quad \sigma_\theta = & -p_a + \frac{\lambda E \varepsilon_s |c|}{\sqrt{3}} \left[ 1 + \varrho^{-2} - \frac{c^2}{6} (1 + 5\varrho^{-6}) + \frac{3c^4}{40} (1 + 9\varrho^{-10}) - \right. \\
 & \left. - \frac{c^6}{24} (1 + 13\varrho^{-14}) + \dots \right] + \frac{1 + \varrho^{-2}}{1 - \beta^2} \left\{ p_a - p_b - \frac{\lambda E \varepsilon_s |c|}{\sqrt{3}} \times \right. \\
 & \left. \times \left[ 1 - \beta^2 - \frac{c^2}{6} (1 - \beta^6) + \frac{3c^4}{40} (1 - \beta^{10}) - \frac{c^6}{24} (1 - \beta^{14}) + \dots \right] \right\}, \\
 \sigma_z = & -p_a + \frac{\lambda E \varepsilon_s |c|}{\sqrt{3}} \left[ 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} c \varrho^{-4} - \frac{c^2}{6} (1 + 2\varrho^{-6}) - \frac{3\sqrt{3}}{8} c^3 \varrho^{-8} + \right. \\
 & \left. + \frac{c^4}{12} (1 + 4\varrho^{-10}) + \dots \right] - \lambda E \varepsilon_s + \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{c}}{1 - \beta^2} \left\{ p_a - p_b - \frac{\lambda E \varepsilon_s |c|}{\sqrt{3}} \times \right. \\
 & \left. \times \left[ 1 - \beta^2 - \frac{c^2}{6} (1 - \beta^6) + \frac{3c^4}{40} (1 - \beta^{10}) - \frac{c^6}{24} (1 - \beta^{14}) + \dots \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Naprężenia można wyrazić wprost przez obciążenia, jednak otrzymamy w ten sposób bardzo złożone wzory. Np. na podstawie (3.11) i obliczenia naprężeń z (3.14) (tj. dla przypadku przewagi obciążenia różnicą ciśnień  $p_a - p_b$ ) otrzymamy następujące wzory:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{r_s} = & -p_a + \frac{2\lambda E \varepsilon_s}{\sqrt{3}} \left[ \ln \varrho + \psi_1 \left( \frac{B}{a_1} \right)^2 + \psi_2 \left( \frac{B}{a_1} \right)^4 + \psi_3 \frac{B^4}{a_1^5} + \psi_4 \left( \frac{B}{a_1} \right)^6 + \right. \\
 & \left. + \psi_5 \frac{B^6}{a_1^7} + \dots \right] + \frac{1 - \varrho^{-2}}{1 - \beta^2} \left\{ p_a - p_b - \frac{2\lambda E \varepsilon_s}{\sqrt{3}} \left[ \ln \frac{1}{\beta} + \psi_1 \left( \frac{B}{a_1} \right)^2 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \psi_2 \left( \frac{B}{a_1} \right)^4 + \psi_3 \frac{B^4}{a_1^5} + \psi_4 \left( \frac{B}{a_1} \right)^6 + \psi_5 \frac{B^6}{a_1^7} + \dots \right]_{\varrho=1/\beta} \right\}, \\
 \psi_1 = & \frac{1}{8} (1 - \varrho^4), \quad \psi_2 = \frac{3}{64} (\varrho^8 - 1), \\
 (3.18) \quad \psi_3 = & \frac{1}{32} (-\beta^{-6} + 8\beta^{-4} - 8 + \beta^2) (\varrho^4 - 1), \quad \psi_4 = \frac{5}{192} (1 - \varrho^{12}),
 \end{aligned}$$

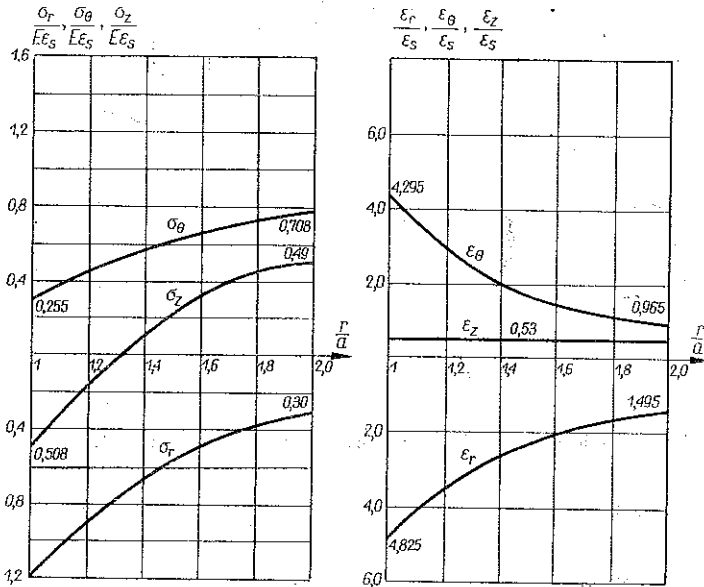


$$(3.18) \quad \sigma_{\theta} = -p_a + \frac{2\lambda E \varepsilon_s}{\sqrt{3}} \left[ 1 + \ln \varrho + \varphi_1 \left( \frac{B}{a_1} \right)^2 + \varphi_2 \left( \frac{B}{a_1} \right)^4 + \varphi_3 \frac{B^4}{a_1^5} + \varphi_4 \left( \frac{B}{a_1} \right)^6 + \right. \\ \left. + \varphi_5 \frac{B^6}{a_1^7} + \dots \right] + \frac{1 + \varrho^{-2}}{1 - \beta^2} \left\{ p_a - p_b - \frac{2\lambda E \varepsilon_s}{\sqrt{3}} \left[ \ln \frac{1}{\beta} + \psi_1 \frac{B}{a_1} \right]^2 + \right. \\ \left. + \psi_2 \left( \frac{B}{a_1} \right)^4 + \psi_3 \frac{B^4}{a_1^5} + \psi_4 \left( \frac{B}{a_1} \right)^6 + \psi_5 \frac{B^6}{a_1^7} + \dots \right\}_{\varrho=1/\beta}$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{8} (1 - 5\varrho^4), \quad \varphi_2 = \frac{3}{64} (9\varrho^8 - 1),$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{32} (-\beta^{-6} + 8\beta^{-4} - 8 + \beta^2) (5\varrho^4 - 1), \quad \varphi_4 = \frac{5}{192} (13\varrho^{12} - 1).$$

*Przykład.* Dane obciążenie rury:  $p_a = 1,2E\varepsilon_s$  i  $p_b = 0,3E\varepsilon_s$ ,  $P/b^2 = 0,2E\varepsilon_s$ . Określić stan, w jakim znajduje się rura. O ile należy zwiększyć obciążenie  $P/\pi b^2$ , aby doprowadzić do zniszczenia. Wyznaczyć naprężenia i odkształcenia dla danych obciążeń oraz w momencie zniszczenia.



Rys. 7

Współczynnik wzmocnienia materiału  $\lambda = 0,95$ , a współczynnik  $\xi = 20$ .

Rozwiązanie: 1. Stosując kryterium (2.27) i (2.29) wyznaczam obszar  $R^p$ .

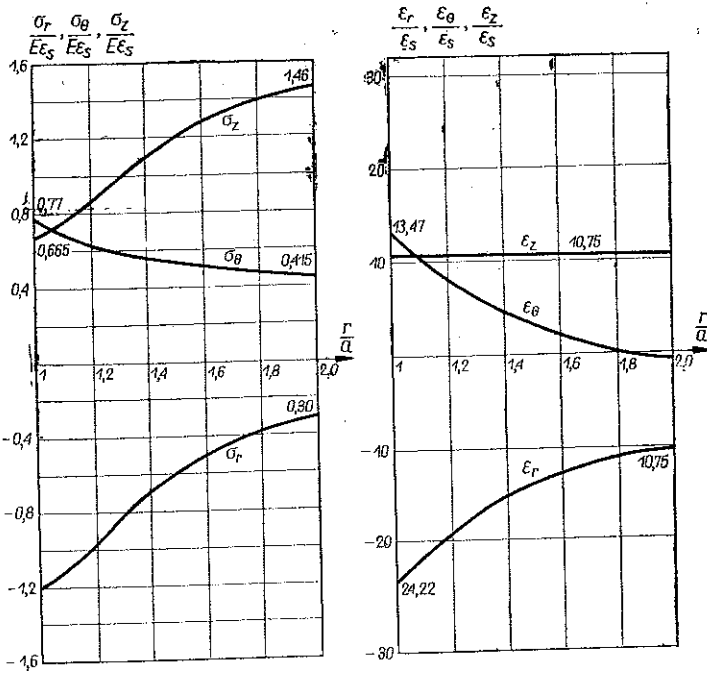
2. Przyjmując znak równości zamiast znaku nierówności (2.27)<sub>1</sub> obliczamy  $P/\pi b^2 = 0,91E\varepsilon_s$  w momencie zniszczenia.

3. Przy pomocy szeregu (3.11) obliczamy  $\eta$  dla danych obciążeń:  $\eta = -0,0995$ ; stąd na podstawie (3.9)<sub>1</sub>  $c = -10,05$ .

4. Obliczam naprężenie i odkształcenie na podstawie (3.3), (3.4), (3.5) i (3.6). Zmienność naprężeń i odkształceń w przekroju rury ilustrują wykresy 7.

5. Analogicznie dla obciążeń w momencie zniszczenia znajdziemy  $p_a = 1,2E\epsilon_s$ ,  $p_b = 0,3E\epsilon_s$ ,  $P/\pi b^2 = 0,91E\epsilon_s$ ; na podstawie (3.11) obliczam  $\eta = -0,510$ ; stąd  $c = -1,96$ .

6. Stan naprężeń i odkształceń w momencie zniszczenia ilustruje rys. 8.



Rys. 8

#### 4. Równanie równowagi dla obszaru sprężysto-plastycznego rury $R^m$

Jeżeli obciążenia zewnętrzne mieszczą się w strefie  $R^m$  (rys. 6), określamy obszary opisane równaniami (2.27)<sub>2</sub> i (2.29), zmieniając znak nierówności zgodnie z dokonaną analizą tych wzorów w p.2. Określenie obszaru odkształcenia  $R^m$  jest więc (z powodu wprowadzonej aproksymacji) proste i łatwe. Obecnie zajmiemy się wyznaczeniem równań, które bliżej będą charakteryzować strefy zaawansowanych odkształceń plastycznych oraz wiązać stan naprężeń i odkształceń w obu strefach. Rozwiązanie ostateczne otrzymamy przez «zszycie» odpowiednich rozwiązań dla strefy odkształceń sprężystych ze strefą odkształceń plastycznych stawiając odpowiednie warunki brzegowe. Tak samo tutaj jak i w rozdziale poprzednim wprowadzimy w końcowej fazie odpowiednie aproksymacje w celu otrzymania praktycznych wzorów z możliwością dokładnego sprawdzenia.

Oznaczmy względny promień rozgraniczający strefy plastyczną od sprężystej przez  $r_s$ . Wówczas bezwymiarowy promień

$$(4.1) \quad \zeta = \frac{a}{r_s}.$$

Przyjmując na granicach stref warunek

$$(4.2) \quad [\sigma_r]_{r=r_s} = -p_s$$

i wykorzystując wzór na maksymalną różnicę ciśnień, która rozpocznie uplastycznienie, zgodnie z (2.29) i (2.28)<sub>1</sub> znajdziemy

$$(4.3) \quad p_a - p_b = \frac{E\varepsilon_s}{\sqrt{3}} (1 - \beta^2) \sqrt{\frac{c_s^2}{1 + c_s^2}} \operatorname{sig} \Delta p.$$

Wprowadzając za  $p_a$  i  $\beta$  wielkości  $p_s$  i  $\beta/\zeta$  otrzymamy

$$(4.4) \quad p_s - p_b = \frac{E\varepsilon_s}{\sqrt{3}} (1 - \beta^2 \zeta^{-2}) \sqrt{\frac{c_s^2}{1 + c_s^2}} \operatorname{sig} \Delta p.$$

Dla strefy odkształceń plastycznych

$$(4.5) \quad [\varepsilon_i]_{r=r_s} = \varepsilon_s$$

zgodnie z (2.12) analogicznie otrzymamy

$$(4.6) \quad \frac{A_1 - \operatorname{arsh} c_p - \operatorname{arsh} \zeta^2 c_p}{\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)(1 - \zeta^2)} \sqrt{\frac{1 + c_p^2 \zeta^4}{c_p^2}} = 1,$$

a po przekształceniach

$$(4.7) \quad p_a - p_s = \frac{\lambda E \varepsilon_s}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) (1 - \zeta^2) \sqrt{\frac{c_p^2}{1 + c_p^2 \zeta^4}} \operatorname{sign} \Delta p + \\ + \frac{\lambda E \varepsilon_s}{\sqrt{3}} (\operatorname{arsh} c_p - \operatorname{arsh} c_p \zeta^2) \operatorname{sign} \Delta p \operatorname{sign} c_p,$$

gdzie  $c_s$  i  $c_p$  wg (2.28) i (2.29) mają postać

$$(4.8) \quad c_s = \frac{A_2}{B_2}, \quad A_2 = \frac{\sqrt{3}(p_s - p_b)}{\lambda E \varepsilon_s}, \quad B_2 = \frac{-\frac{P_s}{\pi b^2} + \beta^2 \zeta^{-2} p_s - p_b}{\lambda E \varepsilon_s}, \\ A_1 \operatorname{sign} \Delta p = B_1 c_p \operatorname{sign} \Delta p + [\operatorname{arsh} f(c_p, \zeta) - f(c_p, \zeta)] \operatorname{sign} c_p, \\ f(c_p, \zeta) = c_p \sqrt{1 + c_p^2 \zeta^4} - c_p \zeta^2 \sqrt{1 + c_p^2}, \\ A_1 = \frac{\sqrt{3}(p_a - p_s)}{\lambda E \varepsilon_s}, \quad B_1 = \frac{-\frac{P_p}{\pi b^2} + \zeta^2 p_a - p_s}{\lambda E \varepsilon_s}.$$

Całkowita siła  $P$  rozłoży się na strefę odkształceń sprężystych i plastycznych, przeto

$$(4.9) \quad \frac{P_p}{\pi b^2} + \frac{P_s}{\pi b^2} = \frac{P}{\pi b^2}.$$

Aby stan deformacji cylindra na granicy  $r = r_s$  był identyczny dla obu stref odkształceń trzeba, aby  $[\bar{\varepsilon}]_{r=r_s}$  i  $[C]_{r=r_s}$  było dla obu stref jednakowe. Założenie  $[\varepsilon_i(\bar{\varepsilon}, C)]_{r=r_s}$  jest niewystarczające, gdyż może być spełnione dla nieskończonej kombinacji  $\bar{\varepsilon}$  i  $C$ ; stąd dodatkowy warunek dla strefy odkształceń sprężystych otrzymamy przez porównanie wartości  $C$  obliczonych dla poszczególnych sfer.

Dla strefy odkształceń sprężystych

$$(4.10) \quad C = \frac{3}{2} \frac{p_s - p_b}{E(1 - \beta^2 \zeta^{-2})} r_s^2,$$

a dla strefy odkształceń plastycznych zgodnie z (2.7)<sub>2</sub>

$$C = \frac{A_1 \operatorname{sign} \Delta p - (\operatorname{arsh} c_p - \operatorname{arsh} c_p \zeta^2) \operatorname{sign} c_p}{\frac{2}{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{\lambda} - 1 \right) (1 - \zeta^2)} a^2 \varepsilon_s.$$

Po przyrównaniu tych wielkości i po przekształceniach będziemy mieli

$$(4.11) \quad p_a - p_s = \frac{\lambda E \varepsilon_s}{\sqrt{3}} (\operatorname{arsh} c_p - \operatorname{arsh} c_p \zeta^2) \operatorname{sign} c_p + \frac{(1 - \lambda)(1 - \zeta^2)}{(\zeta^2 - \beta^2)} (p_s - p_b).$$

W ten sposób otrzymaliśmy sześć równań niezależnych: (4.4), (4.6), (4.7), (4.8), (4.9) i (4.11) na obliczenie sześciu niewiadomych:  $\zeta$ ,  $c_p$ ,  $c_s$ ,  $p_s$ ,  $P_p/\pi b^2$  i  $P_s/\pi b^2$ .

Obliczenia te bardzo można by uprościć, gdybyśmy potrafili określić parametr  $\zeta$  charakteryzujący stan zaawansowania odkształceń plastycznych, bowiem ilość równań ostatecznie można by zredukować do trzech eliminując dwie stałe, np.  $p_s$  i  $P_s/\pi b^2$  lub  $p_s$  i  $P_p/\pi b^2$ . W tym celu dodając stronami równania (4.4) i (4.7) otrzymamy

$$(4.12) \quad \frac{\sqrt{3}(p_a - p_b)}{\lambda E \varepsilon_s} = \frac{1 - \beta^2 \zeta^{-2}}{\lambda} \sqrt{\frac{c_s^2}{1 + c_p^2 \zeta^4}} + \\ + \left( \frac{1}{\lambda} - 1 \right) (1 - \zeta^2) \sqrt{\frac{c_p^2}{1 + c_p^2 \zeta^4}} + \operatorname{arsh} c_p - \operatorname{arsh} c_p \zeta^2.$$

Jeśli przyjmiemy płaski stan deformacji ( $c_p \rightarrow \infty$  oraz  $c_s \rightarrow \infty$ ), to równanie przejdzie w znane z literatury [23] równanie

$$(4.13) \quad \frac{\sqrt{3}(p_a - p_b)}{\lambda E \varepsilon_s} = 1 + \frac{1}{\lambda \zeta^2} (1 - \lambda - \beta^2) + \ln \frac{1}{\zeta^2}.$$

Aby rozwiązać równania (4.12) należy wyliczyć  $c_p$  i  $c_s$ , co nie jest łatwe. Wykonując natomiast omówioną poprzednio (w p. 2) aproksymację, równanie linii  $\zeta = \text{const}$  w układzie  $A, B$  przyjmie postać

$$(4.14) \quad \left( \frac{A}{a_z} \right)^2 + \left( \frac{B}{b_z} \right)^2 = 1,$$

gdzie

$$(4.15) \quad b_z = \frac{1 - \beta^2}{\lambda}$$

zgodnie z (2.26) i rys. 5 dla  $c_s \rightarrow 0$ ,  $c_p \rightarrow 0$  oraz

$$(4.16) \quad a_z = 1 + \frac{1}{\lambda \xi^2} (1 - \lambda - \beta^2) + \ln \frac{1}{\xi^2}$$

zgodnie z (3.13).

Po podstawieniu (4.15) i (4.16) do (4.14) otrzymamy

$$(4.17) \quad \frac{\sqrt{3} (p_a - p_b) \operatorname{sign} \Delta p}{\lambda E \varepsilon_s \sqrt{1 - \left[ \frac{\frac{P}{\pi b^2} - \beta^2 p_a + p_b}{(1 - \beta^2) E \varepsilon_s} \right]^2}} = 1 + \frac{1}{\lambda \xi^2} (1 - \lambda - \beta^2) + \ln \frac{1}{\xi^2}.$$

Sprowadza to nasze zagadnienia do zagadnienia płaskiego, znanego w literaturze [23 i 44]. Pozostałe równanie rozwiążemy łatwo wiedząc, że na podstawie (4.7), (4.11) i (4.4) mamy

$$(4.18) \quad \left| \frac{c_s}{c_p} \right| = \xi^2.$$

### 5. Stan naprężenia i odkształcenia rury częściowo uplastycznionej

Wyjdziemy z równań rury w przypadku odkształceń sprężystych, które (prócz równań (2.39) i (2.41)) podamy bez wyprowadzenia. Przy przyjętych założeniach, znajdziemy następujące wzory dla składowych tensora naprężenia i odkształcenia [23]:

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= -p_a + (p_a - p_b) \frac{1 - \frac{a^2}{r^2}}{1 - \beta^2}, \\ \sigma_\theta &= -p_a + (p_a - p_b) \frac{1 + \frac{a^2}{r^2}}{1 - \beta^2}, \\ \sigma_z &= \frac{P}{\pi b^2 (1 - \beta^2)}, \\ \varepsilon_{r\theta} &= -\frac{\frac{P}{\pi b^2} - \beta^2 p_a + p_b}{2E(1 - \beta^2)} \pm \frac{3(p_a - p_b)}{2E(1 - \beta^2)} \frac{a^2}{r^2}, \\ \varepsilon_z &= -\bar{\varepsilon} = \frac{\frac{P}{\pi b^2} - \beta^2 p_a + p_b}{E(1 - \beta^2)}, \\ u &= \varepsilon_\theta r. \end{aligned}$$

Dla obszaru odkształcenia sprężystego, tzn. dla przypadku

$$b \geq r \geq r_s$$

składowe tensora naprężenia znajdziemy zmieniając w równaniach (5.1)<sub>1</sub> i (5.1)<sub>2</sub>  $p_a$  na  $p_s$ ,  $\beta$  na  $\beta/\zeta$ ,  $P$  na  $P_s$  oraz  $a$  na  $r_s$ :

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= -p_s + (p_s - p_b) \frac{1 - \frac{r_s^2}{r^2}}{\beta^2} = -p_s + (p_s - p_b) \frac{1 - \frac{a^2}{r^2} \zeta^{-2}}{1 - \beta^2 \zeta^{-2}}, \\ \sigma_\theta &= -p_s + (p_s - p_b) \frac{1 + \frac{r_s^2}{r^2}}{1 - \beta^2 \zeta^{-2}} = -p_s + (p_s - p_b) \frac{1 + \frac{a^2}{r^2} \zeta^{-2}}{1 - \beta^2 \zeta^{-2}}, \\ \sigma_z &= \frac{P_s}{\pi b^2 (1 - \beta^2 \zeta^{-2})}. \end{aligned}$$

Analogicznie składowe tensora przemieszczenia:

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{r/\theta} &= \frac{\frac{P_s}{\pi b^2} - \beta^2 \zeta^{-2} p_s + p_b}{2E(1 - \beta^2 \zeta^{-2})} \pm \frac{3}{2} \frac{p_s - p_b}{E(1 - \beta^2 \zeta^{-2})} \frac{a^2 \zeta^{-2}}{r^2}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\frac{P_s}{\pi b^2} - \beta^2 \zeta^{-2} p_s + p_b}{E(1 - \beta^2 \zeta^{-2})}. \end{aligned}$$

Stan naprężenia dla części rury uplastycznionej, tj. dla przypadku  $r_s \geq r \geq a$ , znajdziemy wykorzystując wzory dla rury całkowicie uplastycznionej (3.3), (3.4), (3.5) i dalsze. Zmieńmy symbolikę następująco:  $p_b$  na  $p_s$ ,  $\beta$  na  $\zeta$ ,  $P$  na  $P_p$  oraz  $b$  na  $r_s$ . Po tych zmianach otrzymamy

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= -p_a + \frac{\lambda E \varepsilon_s}{\sqrt{3}} \left[ \operatorname{arsh} c_p - \operatorname{arsh} c_p \left( \frac{a}{r} \right)^2 \right] \operatorname{sign} \Delta_p \operatorname{sign} c_p + \\ &\quad + \frac{1 - \left( \frac{a}{r} \right)^2}{1 - \zeta^2} \left[ p_a - p_s - \frac{\lambda E \varepsilon_s}{\sqrt{3}} (\operatorname{arsh} c_p - \operatorname{arsh} c_p \zeta^2) \operatorname{sign} \Delta_p \operatorname{sign} c_p \right], \\ \sigma_\theta &= -p_a + \frac{\lambda E \varepsilon_s}{\sqrt{3}} \left[ \frac{2c_p \left( \frac{a}{r} \right)^2}{\sqrt{1 + c_p^2 \left( \frac{a}{r} \right)^4}} + \operatorname{arsh} c_p - \operatorname{arsh} c_p \left( \frac{a}{r} \right)^2 \right] \operatorname{sign} \Delta_p \operatorname{sign} c_p + \\ &\quad + \frac{1 + \left( \frac{a}{r} \right)^2}{1 - \zeta^2} \left[ p_a - p_s - \frac{\lambda E \varepsilon_s}{\sqrt{3}} (\operatorname{arsh} c_p - \operatorname{arsh} c_p \zeta^2) \operatorname{sign} \Delta_p \operatorname{sign} c_p \right], \end{aligned}$$

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \text{c. d.} \quad \sigma_z = & -p_a + \frac{\lambda E \varepsilon_s}{\sqrt{3}} \left[ \frac{c_p \left(\frac{a}{r}\right)^2 - \sqrt{3}}{\sqrt{1 + c_p^2 \left(\frac{a}{r}\right)^4}} + \operatorname{arsh} c_p - \operatorname{arsh} c_p \left(\frac{a}{r}\right)^2 \right] \operatorname{sign} \Delta_p \operatorname{sign} c_p + \\ & + \frac{1 - \sqrt{3}}{1 - \zeta^2} \left[ p_a - p_s - \frac{\lambda E \varepsilon_s}{\sqrt{3}} (\operatorname{arsh} c_p - \operatorname{arsh} c_p \zeta^2) \operatorname{sign} \Delta_p \operatorname{sign} c_p \right]. \end{aligned}$$

Analogicznie odkształcenia prowadzą do wzorów

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{r/\theta} = & \frac{B_1 \operatorname{sign} \Delta_p - (\sqrt{1 + c_p^2 \zeta^4} - \zeta^2 \sqrt{1 + c_p^2}) \operatorname{sign} c_p}{2 \left( \frac{1}{\lambda} - 1 \right) (1 - \zeta^2)} \varepsilon_s \pm \\ & \pm \frac{A_1 \operatorname{sign} \Delta_p - (\operatorname{arsh} c_p - \operatorname{arsh} c_p \zeta^2) \operatorname{sign} c_p \left(\frac{a}{r}\right)^2}{\frac{2}{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{\lambda} - 1 \right) (1 - \zeta^2)} \varepsilon_s, \\ \varepsilon_z = & \frac{B_1 \operatorname{sign} \Delta_p - (\sqrt{1 + c_p^2 \zeta^4} - \zeta^2 \sqrt{1 + c_p^2}) \operatorname{sign} c_p}{\left( \frac{1}{\lambda} - 1 \right) (1 - \zeta^2)} \varepsilon_s, \end{aligned}$$

gdzie  $A_1$  i  $B_1$  wg (4.8)<sub>2</sub> i przy przyjętych obciążeniach mają wartość stałą.

Jak widać z podanych wzorów, aby określić stan naprężenia i odkształcenia, należy wyznaczyć stałe równowagi podane w p. 4, które po podstawieniu do wyżej podanych wzorów dają gotowy wynik.

*Przykład.* Dane jest następujące obciążenie cylindra swobodnego:

$$p_a = 0,4E\varepsilon_s, \quad p_b = \frac{P}{\pi b^2} = 0.$$

Stawiamy pytanie, o ile należy zwiększyć ciśnienie  $p_a$ , aby rura uplastyczniła się  $\zeta = 1/1,6$ , jeżeli  $\beta = 1/2$ , a  $\lambda = 0,95$ . Obliczyć pozostałe parametry równowagi w stanie częściowego uplastycznienia, tj.  $c_p$ ,  $c_s$ ,  $p_s$ ,  $P_p/\pi b^2$  i  $P_s/\pi b^2$ . Określić stan naprężenia i odkształcenia w cylindrze.

*Rozwiązanie:* 1. Stosując kryterium (2.29) stwierdzamy obszar  $R_s$ .

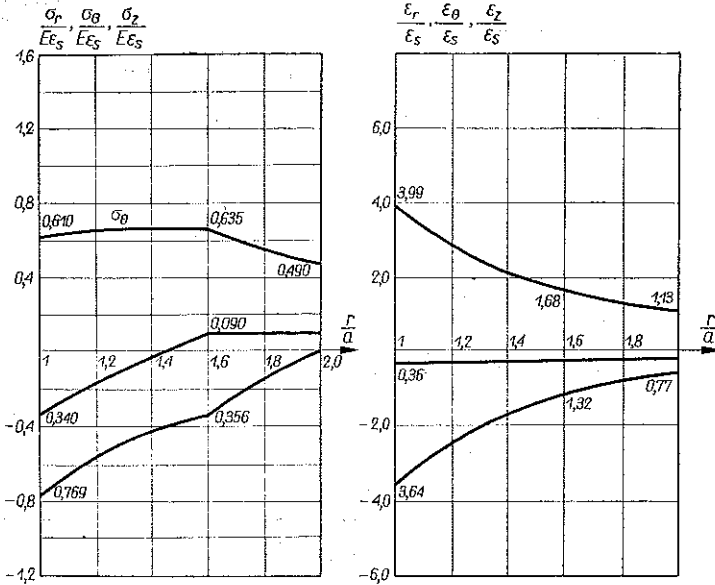
2. Z równania (4.17) obliczamy  $p_a = 0,789E\varepsilon_s$  dla  $\zeta = 1/16$  (dla całkowitego uplastycznienia  $p_a = 0,852E\varepsilon_s$ ).

3. Z równań (2.28)  $c_s = 6,92$ , a na podstawie (4.18) —  $c_p = 1,7$ .

4. Ciśnienie na granicy stref  $p_s = 0,356E\varepsilon_s$  wyliczamy z (4.4) i sprawdzamy z (4.7).

5. Z równania (4.8)<sub>2</sub>  $B_1 = 0,336$ , a stąd  $P_p/\pi b^2 = -0,032E\varepsilon_s$  wg (4.9)  $P_s/\pi b^2 = -0,032E\varepsilon_s$ .

6. Na rys. 9 mamy wykresy składowych naprężenia i odkształcenia wg (5.4) i (5.1).



Rys. 9

## Literatura cytowana w tekście

1. G. ALLEN, D. N. SOPWITH, *The stresses and strains in a partly plastic thick tube under internal pressure and end load*, Proc. 7 Int. Congr. Appl. Mech., Cambridge 1948, 403.
2. M. WIENIEK, M. SHINZUKA, A. FREUDENTHAL, *Case bounded elastic-plastic and nonlinear hollow cylinders*, AIAA Journal, 1, 8 (1963), 1828.
3. N. I. WIEZUCHOW, *Teoria sprężystości i plastyczności*, PWN, Warszawa 1957.
4. С. А. БОГАРОВА, *Напряженное состояние трубы находящейся под действием равномерного давления и продолжной силы при больших пластических деформациях*, Расч. на прочн., 9, 1963, 196.
5. D. R. BLAND, *Elasto-plastic thick-walled tubes of work hardening material subjected to internal and external pressure and to temperature*, J. Mech. Phys. Sol., 4, 1956, 209.
6. J. A. BONES, S. CROSLAND, *The strength of thick-walled cylinders*, Paper. ASME, 20, 1958, 72.
7. J. A. BONES, S. CROSLAND, *Behaviour of thick-walled steel cylinders subjectet to internal pressure*, Proc. Inst. Mech. Engen., 172, 1959, 777.
8. J. A. BONES, S. CROSLAND, *Thick-walled cylinders under internal pressure*, Engin., 180, 1955, 4677.
9. Н. М. Беляев, *Труды по теории упругости и пластичности*, ГИТТЛ, Москва 1957.
10. D. G. CHRISTOPHERSON, R. G. HIGGINSON, *The strength of short cylinders under internal pressure*, J. Mech. Phys. Sol., 2, 1954, 217.
11. G. COOK, *The stresses in thick-walled cylinders of mild steel overstrained by internal pressure*, Proc. Inst. Mech. Engen., 6, 1934, 407.
12. П. Давидов, Д. Димитрова, *Некоторые особенности при осадке цилиндрических тел*, Год. Маши. и Металлообраб., 1962, 7-21.
13. J. H. FAUPEL, *Yield and bursting characteristics of heavy-wall cylinders*, Trans. ASME, 5, 78 (1956), 1031.
14. J. H. FAUPEL, *Residual stresses in heavy-wall cylinders*, J. Franklin Inst., 5, 259 (1955) 405.
15. A. GREEN, *Hydro-elasticity and plasticity*, Rat. Mech. and Anal. 5, 1956.



16. Л. А. ГЛИКМАН, А. Н. БАБАЕВ, *Рациональное применение способа Зарса о полных цилиндрах*, Зав. Лаб., 4, 22 (1956).
17. C. W. MC. GREGOR, L. F. COFFIN, J. G. FISHER, *The plastic flow of thick-walled tubes with large strains*, J. Mech. Phys. Sol., 3, 1948.
18. R. HILL, *The mathematical theory of plasticity*, przekł. ros., GITTL, Moskwa 1956.
19. R. HILL, E. H. LEE, S. J. TUPPER, *The theory of combined plastic and elastic deformation with particular reference to a thick tube under internal pressure*, Proc. Roy. Soc., 4, 1947, 191.
20. R. HILL, E. H. LEE, S. J. TUPPER, *Plastic flow in a closed-end tube with internal pressure*, Proc. Roy. Soc., 4, 1947, 191.
21. P. G. HODGE, G. N. WHITE, *A quantitative comparison of flow and deformation theories of plasticity*, J. Appl. Mech., 17, 1950.
22. А. ИЛЬЮШИН, *Пластичность*, ГИТТЛ, Москва-Ленинград 1948.
23. А. ИЛЬЮШИН, П. М. ОГИБАЛОВ, *Упруго-пластические деформации полных цилиндров*, ИМУ, Москва 1960.
24. F. K. ITERSON, *The strength of thick hollow cylinders*, Engin., 1, 5 (1912).
25. H. JUNG, *Über die Spannungen in dickwandigen Rohren bei elastisch-plastischer Beanspruchung*, Springer-Verlag, Berlin 1950.
26. W. KRZYŚ, M. ŻYCZKOWSKI, *Sprężystość i plastyczność*, PWN, Warszawa 1962.
27. М. КАЗАНОВ, *Основы теории пластичности*, ГИТТЛ, Москва 1956.
28. А. Г. КОСТЮК, *Напряжения в силовом вращающейся цилиндре за пределом упругости*, Прикл. Мат. Мех., 4, 18 (1954).
29. В. А. ЛОМАКИН, *Большие деформации трубы и полного шара*, Инж. Сборн., 12, 1955.
30. Т. МАХОНИН, *Графический способ расчета толстостенных труб за пределом упругости*, Машгиз, Москва 1958.
31. W. R. MANING, *The overstrain of tubes by internal pressure*, Engin., 101, 1959.
32. В. В. МОСКВИТИН, *О вторичных пластических деформациях*, ПИММ АН СССР, 3, 16 (1952).
33. В. В. МОСКВИТИН, *Пластичность при переменных нагрузжениях*, ИМУ, Москва 1965.
34. A. NÁDAI, *Theory of flow and fracture of solids*, Mc. Graw-Hill N. Y., Toronto-London 1950.
35. J. NOWIŃSKI, *Podstawy teorii plastyczności*, Rozpr. Inżyn., 1, 2 (1954).
36. В. НЕМИРОВСКИЙ, *Об упруго-пластических равновесиях и несущей способности полной вращающейся трубы*, Машиностр., 2, 1959.
37. П. М. ОГИБАЛОВ, *Большие упруго-пластические симметричные деформации толстостенной трубы*, Науч. Докл. Высш. Школы, 1, 1959.
38. W. OLSZAK, W. URBANOWSKI, *Sprężysto-plastyczny grubościenny walec niejednorodny pod działaniem parcia wewnętrznego i siły podłużnej*, Arch. Mech. Stos., 3, 7 (1955).
39. E. PESINA, *Elastisch-plastischer Spannungszustand eines dickwandigen Rohres*, Wiss. Z. Tech. Hochschule Dresden., 2, 9 (1959).
40. A. PHILIPS, *Introduction to plasticity*, Ronald Press Comp., N.Y. 1956.
41. W. PRAGER, P. G. HODGE, *The theory of perfectly plastic solids*, Wiley, N.Y. 1951.
42. F. RIMOROTT, *Le compartiment plastique des tubes ouvert à pavois soumis à des pressions intérieures*, Ing., 46, 1960.
43. М. РАБОТНОВ, *Модель иллюстрирующей некоторые свойства упрочняющегося пластического тела*, Прикл. Мат. Мех., 1, 18 (1954).
44. W. W. SOKOŁOWSKI, *Teoria plastyczności*, PWN, Warszawa 1957.
45. В. В. СОКОЛОВСКИЙ, *Упруго-пластическое равновесие цилиндрической трубы при наличии упрочнения материала*, Прикл. Мат. Мех., 4, 7 (1943).
46. M. C. STEEL, *Partial plastic thick-walled cylinder*, J. Appl. Mech., 19, 1952.
47. W. STUIVER, P. E. TOMALIN, *The failure of tubes under combined external pressure and axial load*, Proc. Exptl. Stress Anal., 1, 16 (1959).
48. Г. С. ШАПИРО, *Об интегрировании в квадратурах уравнений плоской одномерной задачи теории пластичности с учетом упрочнения материала*, Прикл. Мат. Мех., 2, 13 (1949).

49. N. L. SVENSSON, *The bursting pressure of cylindrical and spherical vessels*, J. Appl. Mech., 25, 1958.
50. C. A. SMITH, *Engin.*, 3, 1909, 307.
51. E. THOMSON, *Plasticity equation and their application to working of metals in the work hardening range*, Trans. ASME, 2, 1965.
52. E. THOMSON, *Fracture of circular pipes by internal pressure*, J. Math. and Mech. 6, 1957.
53. L. B. TURNER, *Trans. Camb. Phil. Soc.*, 21, 1909.
54. R. E. WEIGLE, J. R. PURTEL, *Pressure technique for determining residual stresses in circular tubes*, Pergamon Press, Oxford London-N.Y.-Paris 1963.
55. M. ŻYCZKOWSKI, *Combined loading in the theory of plasticity*, Pergamon Press, Oxford N.Y. Paris 1967.

## Резюме

### ЭФФЕКТИВНЫЙ РАСЧЕТ ТОЛСТОСТЕННЫХ ТРУБ ДЛЯ СЛУЧАЯ ЛИНЕЙНОГО ПЛАСТИЧЕСКОГО УПРОЧНЕНИЯ

Используя интегральные уравнения равновесия для толстостенной трубы, нагруженной давлением и осевой силой, при предположении несжимаемости и линейного упрочнения материала, определено в некоторый способ, выбранной координатной системе зависимой от нагрузок — области деформации трубы. Благодаря аппроксимации предельных кривых эллипсами, а также зная нагрузки, можно априори найти ответ на вопрос, находится ли труба в упругом, упругопластическом или в пластическом состоянии, вплоть до момента разрушения. Для области пластической деформации получено одно уравнение равновесия и дается решение для произвольных нагрузок, а также даются формулы для составляющих тензора напряжения и деформации. Для области упруго-пластических деформаций трубы дается шесть уравнений равновесия, сводя затем задачу к плоской задаче. Выводятся кроме того формулы для напряжения и деформации в обеих областях: упругой и пластической.

Приведенные примеры, иллюстрируют способ использования приведенных уравнений и формул.

## Summary

### EFFECTIVE COMPUTATION OF THICK-WALLED TUBES IN THE CASE OF LINEAR PLASTIC STRAIN HARDENING

Making use of the integral equations of equilibrium for a thick-walled tube loaded by a pressure and an axial force, assuming incompressibility and linear strain hardening of the material, the strain regions of the tube are determined in a system of coordinates selected in a certain way, depending on the loaded. By approximating the limit curves by ellipses and knowing the loads, we can answer beforehand the question as to whether the tube is in the elastic, elastic-plastic or plastic state up to the moment of collapse. For the region of plastic strain a single equation of equilibrium is obtained, its solution being found for any load. Equations for the components of the stress and strain tensor are also given. For the region of elastic-plastic strain of the tube six equilibrium equations are obtained. Then, by approximation, the problem is reduced to a plane problem. Expressions of the stresses and strains are also derived for both regions: elastic and plastic.

The examples given illustrate the way in which use is made of the equations obtained.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 6 lipca 1968 r.*