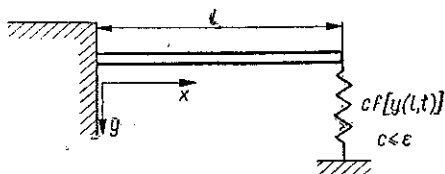


WPLYW WARUNKÓW POCZĄTKOWYCH NA DRGANIA SWOBODNE
PRĘTA ZAMOCOWANEGO NIELINIOWO

CZESŁAW CEMPEL (POZNAŃ)

1. W pracach dotyczących tego tematu [1-4] zakłada się zazwyczaj, że początkowa prędkość pręta $\dot{y}(x, 0)$ jest zerowa, a początkowe ugięcie jest bliskie pierwszej postaci drgań własnych. Niżej podjęto próbę analizy drgań własnych pręta ze słabo nieliniowymi warunkami brzegowymi i przy dowolnych wrunkach początkowych. Uwzględnienie większej liczby nieliniowości w warunkach brzegowych nie stwarza zasadniczych trudności [5], dlatego też w tym miejscu ograniczymy się do jednej małej nieliniowości.



Rys. 1

2. Weźmy pod uwagę pręt zamocowany jak na rys. 1. Równanie drgań oraz warunki początkowe i brzegowe mają postać:

$$(1) \quad K \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + y \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad y = y(x, t), \quad K = EJ, \quad \mu = \rho A;$$

$$(2) \quad y(0, t) = 0, \quad K \frac{\partial^2 y(l, t)}{\partial x^2} = 0, \quad y(x, 0) = \varphi(x),$$

$$\frac{\partial}{\partial x} y(0, t) = 0, \quad K \frac{\partial^3 y(l, t)}{\partial x^3} = cf[y(l, t)], \quad \frac{\partial}{\partial t} y(x, 0) = \dot{y}(x, 0) = \psi(x).$$

Rozwiązania (1) z warunkami (2) szukać będziemy w postaci szeregu

$$(3) \quad y(x, t) = \sum_n X_n(x) S_n(t),$$

gdzie $X_n(t)$ to funkcje własne zagadnienia zlinearyzowanego ($c = 0$) spełniające zależności

$$(4) \quad X_n^{IV}(x) = \frac{\mu \omega_n^2}{K} X_n(x), \quad \int_0^l X_n(x) X_m(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } n \neq m, \\ b_m, & \text{jeśli } n = m. \end{cases}$$

$S_n(t)$ oznaczają poszukiwane funkcje czasu, mające sens współrzędnych uogólnionych oraz ω_n częstości własne drgań liniowych.

Przy takim przyjęciu funkcji rozwiązującej (3) do prawej strony równania (1) należy dołączyć dodatkową siłę o intensywności $q(x, t)$; wynika to z niespełnienia przez (3) warunków brzegowych (2). W związku z tym zamiast równania (1) będziemy rozpatrywać równanie

$$(5) \quad K \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = q(x, t).$$

Mnożąc je obustronnie przez funkcje własne $X_s(x)$, korzystając z rozkładu (3) oraz z własności funkcji własnych (4) i całkując po rozpiętości pręta otrzymamy

$$(6) \quad \ddot{S}_s(t) + \omega_s^2 S_s(t) = \frac{1}{\mu b_s} \int_0^l X_s(x) q(x, t) dx, \quad s = 1, \dots$$

Nieliniowy warunek brzegowy można napisać jako dodatkową siłę działającą na koniec pręta:

$$(7) \quad Q(l, t) = cf[y(l, t)].$$

Wtedy intensywność siły $q(x, t)$ w przyjętym układzie współrzędnych (rys. 1) wyniesie

$$(8) \quad q(x, t) = -Q(l, t) \delta(x - l) = -cf[y(l, t)] \delta(x - l).$$

Zatem prawa strona równania (6) przyjmie postać

$$(9) \quad \int_0^l X_s(x) q(x, t) dx = - \int_0^l X_s(x) cf[y(l, t)] \delta(x - l) dx = \\ = -cX_s(l) f[y(l, t)],$$

gdzie $\delta(x - l)$ jest funkcją Diraca. Uwzględniając jeszcze w (9) rozkład (3) otrzymamy równanie (6) o postaci

$$(10) \quad \ddot{S}_s(t) + \omega_s^2 S_s(t) + \frac{cX_s(l)}{\mu b_s} f\left[\sum_n X_n(l) S_n(t)\right] = 0, \quad s, n = 1, \dots$$

Przechodząc z kolei do bezwymiarowego czasu $\tau_s = \omega_s t$, znajdziemy

$$(11) \quad \ddot{S}_s(\tau_s) + S_s(\tau_s) + \gamma_s f(S_1, \dots, S_n \dots) = 0, \quad s = 1, \dots,$$

gdzie

$$\gamma_s = \frac{cX_s(l)}{\mu b_s \omega_s^2}, \quad f(S_1, \dots, S_n \dots) = f\left[\sum_n X_n(l) S_n(\tau)\right].$$

Poprzednio założyliśmy, że c jest wielkością małą, a ponieważ $\omega^2 \gg 1$, $b_s \gg 1$ oraz $X_s(l) \approx 1$, więc współczynnik γ_s jest również wielkością małą pierwszego rzędu. Otrzymany nieskończony układ równań różniczkowych nieliniowych sprzężonych (11) określa rozwiązanie równania (1) z nieliniowymi warunkami brzegowymi

i dowolnymi warunkami początkowymi. Analizując zmianę wartości wielkości współczynnika γ_s , można zauważyć, co następuje:

Ponieważ

$$(12) \quad \left\| \sum_n X_n(t) \right\| \leq M < \infty, \quad b_s \leq m < \infty, \quad \omega_{s+1}^2 > \omega_s^2, \quad s = 1, \dots,$$

to dla $s \rightarrow \infty$ mamy $\gamma_s \rightarrow 0$. W związku z tym rozwiązując układ wyjściowy (11) możemy ograniczyć się do badania skończonego układu równań, $s = 1, \dots, r$.

3. Przy powyższych założeniach układ równań (11) przyjmie obecnie postać

$$(13) \quad \ddot{S}_s(\tau_s) + S_s(\tau_s) + \gamma_s f(S_1, \dots, S_r) = 0, \quad s = 1, \dots, r.$$

Ponieważ wyraz sprzęgający $\gamma_s f(S_1, \dots, S_r)$ jest mały, równania (13) zastąpimy w pierwszym przybliżeniu układem zlinearyzowanym

$$(14) \quad \ddot{S}_s(\tau_s) + \lambda_s^2 S_s(\tau_s) = 0, \quad s = 1, \dots, r,$$

gdzie λ_s^2 jest współczynnikiem linearyzacji, obliczeniem którego zajmiemy się później.

Chcąc rozwiązać układ (14) musimy ustalić odpowiednie warunki początkowe. Z zależności (2) mamy

$$y(x, 0) = \sum_n X_n(x) S_n(0) = \varphi(x),$$

$$\begin{aligned} \dot{y}(x, 0) &= \left[\sum_n X_n(x) \dot{S}_n(t) \right]_{t=0} = \left[\sum_n X_n(x) \omega_n \dot{S}_n(\tau_n) \right]_{\tau_n=0} = \\ &= \sum_n \omega_n X_n(x) \dot{S}_n(0) = \psi(x), \end{aligned}$$

stąd

$$(15) \quad \begin{aligned} S_n(0) &= \frac{1}{b_n} \int_0^l \varphi(x) X_n(x) dx = \frac{\zeta_n}{b_n}, \quad \dot{S}_n(0) = \\ &= \frac{1}{\omega_n b_n} \int_0^l \psi(x) X_n(x) dx = \frac{\vartheta_n}{\omega_n b_n}. \end{aligned}$$

Wobec (15) rozwiązania układu (14) będą miały postać

$$(16) \quad \begin{aligned} S_s(\tau_s) &= a_s \cos(\lambda_s \tau_s - \theta_s), \\ a_s &= \frac{1}{b_s} \sqrt{\zeta_s^2 + \frac{\vartheta_s^2}{\lambda_s^2 \omega_s^2}}, \quad \operatorname{tg} \theta_s = \frac{\vartheta_s}{\zeta_s \lambda_s \omega_s}, \quad s = 1, \dots, r. \end{aligned}$$

Współczynnik linearyzacji obliczymy z warunku minimum średniej wartości kwadratu odchylenia [6]:

$$(17) \quad E \{ \lambda_s^2 S_s(\tau) - [S_s(\tau) + \gamma_s f(S_1, \dots, S_r)] \}^2 = \min, \quad s = 1, \dots, r,$$

gdzie E jest operatorem wartości średniej.

Szukając minimum (17) mamy

$$(18) \quad \frac{\partial}{\partial \lambda_s^2} E \{ \dots \}^2 = 0, \quad \lambda_s^2 = 1 + \gamma_s \frac{E \{ f(S_1, \dots, S_r) S_s(\tau_s) \}}{E \{ S_s^2(\tau_s) \}}, \quad s = 1, \dots, r.$$

Z otrzymanej zależności (18) wynika, że obliczenie współczynnika linearyzacji sprowadza się do wyliczenia wartości średniej kwadratu współrzędnej uogólnionej oraz iloczynu współrzędnej i funkcji sprzęgającej. Pierwsza operacja nie nastęrcza trudności, natomiast druga wymaga obliczenia średniej z funkcji zależnej od wielu harmoniczných składowych, przy czym dla zagadnienia zlinearyzowanego częstości tych składowych są liniowo niezależne:

$$(19) \quad n\omega_1 + m\omega_2 + \dots + r\omega_n \neq l,$$

gdzie n, m, r, \dots, l są to liczby całkowite nierówne jednocześnie zeru.

Zakładając, że przy małej nieliniowości zależność (19) pozostaje spełniona, poszukiwaną średnią można obliczyć za pomocą twierdzenia Weyla [7]:

$$(20) \quad E \{ F(\omega_1^* t, \dots, \omega_r^* t) \} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(\omega_1^* t_1 \dots \omega_r^* t) dt = \\ = \int_0^1 \dots \int_0^1 F(2\pi x_1, \dots, 2\pi x_r) dx_1 \dots dx_r,$$

gdzie $\omega_n^* t = 2\pi x_n$. W naszym przypadku $\omega_n^* t = \lambda_n \tau_n = \lambda_n \omega_n t = 2\pi x_n$. Korzystając z (20) współczynnik linearyzacji wyrazimy następująco:

$$(21) \quad \lambda_s^2 = 1 + \gamma_s \frac{\int_0^1 \dots \int_0^1 f(S_1 \dots S_r) S_s(2\pi x_s) dx_1 \dots dx_r}{\int_0^1 S_s^2(2\pi x_s) dx_s}, \quad s = 1, \dots, r.$$

Mając dany nieliniowy warunek brzegowy (tj. funkcję $f(S_1, \dots, S_r)$) ze wzoru (21) łatwo znaleźć współczynnik linearyzacji λ_s^2 . Zauważmy jeszcze, że ponieważ funkcje podcałkowe w (21) są ograniczone, a $\gamma_s \rightarrow 0$ dla $s \rightarrow \infty$, to dla tych samych s mamy $\lambda_s^2 \rightarrow 1$.

4. W celu ilustracji powyższych rozważań przyjmijmy nieliniowy warunek brzegowy (2) postaci

$$K \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = [cy^3]_{x=l}.$$

Wobec tego

$$f[y(l, t)] = \left[\sum_n x_n(l) S_n(l) \right]^3.$$

Pamiętając, że współrzędne uogólnione wyrażają się wzorami (16), z zależności (21) uzyskamy

$$\lambda_s^2 = 1 + \gamma_s \frac{\int_0^1 \dots \int_0^1 \left[\sum_n^r X_n(l) a_n \cos(2\pi x_n - \theta_n) \right]^3 a_s \cos(2\pi x_s - \theta_s) dx_1 \dots dx_r}{\int_0^1 a_s^2 \cos^2(2\pi x_s - \theta_s) dx_s},$$

a stąd

$$(22) \quad \lambda_s^2 = 1 + \gamma_s X_s(l) \left[\frac{1}{4} X_s^2(l) a_s^2 + \frac{1}{2} \sum_n^r X_n(l) a_n^2 \right], \quad s = 1, \dots, r.$$

Wyrażając γ_s zgodnie z (11) mamy

$$(23) \quad \lambda_s^2 = 1 + \frac{cX_s^2(l)}{\mu b_s \omega_s^2} \left[\frac{1}{4} X_s^2(l) a_s^2 + \frac{1}{2} \sum_n^r X_n^2(l) a_n^2 \right], \quad s = 1, \dots,$$

Zauważmy, że jeśli rozkład (3) przedstawić w postaci

$$y(x, t) = \sum_n y_n(x, t) = \sum_n X_n(l) S_n(t),$$

to współczynnik linearyzacji można napisać inaczej w postaci

$$(24) \quad \lambda_s^2 = 1 + \frac{cX_s^2(l)}{\mu b_s \omega_s^2} \left[\frac{1}{2} E \{y_s^2(l, t)\} + E \{y^2(l, t)\} \right].$$

A ponieważ w naszym przypadku

$$E \{y^2(l, t)\} = E \left\{ \sum_n y_n^2(l, t) \right\} \leq M_0 < \infty,$$

to dla $s \rightarrow \infty$, $E \{y_s^2(l, t)\} \rightarrow 0$. Stąd dla dużych s wzór (24) można zamienić wzorem asymptotycznym

$$(25) \quad \lambda_s^2 = 1 + \frac{cX_s^2(l)}{\mu \omega_s^2 b_s} E \{y^2(l, t)\}, \quad s \geq n.$$

Stąd wniosek, że współczynnik ten zależy przede wszystkim od wartości średniej kwadratu całkowitej amplitudy drgań w punkcie dołączenia nieliniowości.

Dla celów obliczeniowych przedstawmy współczynnik linearyzacji w postaci rozwiniętej. Wstawiając (16) do (23) otrzymamy

$$(26) \quad \lambda_s^2 = 1 + \frac{cX_s^2(l)}{2\mu \omega_s^2 b_s} \left\{ \frac{X_s^2(l)}{2b_s^2} \left(\zeta_s^2 + \frac{\theta_s^2}{\lambda_s^2 \omega_s^2} \right) + \sum_{n=1}^r \frac{X_n^2(l)}{b_n^2} \left(\zeta_n^2 + \frac{\theta_n^2}{\lambda_n^2 \omega_n^2} \right) \right\},$$

$s = 1, \dots, r.$

Jak widać obliczenie kolejnych współczynników λ_s^2 wymaga rozwiązania r równań kwadratowych. Jeśli ograniczymy się do wielkości małych pierwszego rzędu, to wy-

rażenia w mianownikach $\lambda_s^2 \omega_s^2$ można zamienić na ω_s^2 . Wtedy wzór (25) i jego asymptotyczne przybliżenie przyjmą postać

$$\lambda_s^2 = 1 + \frac{cX_s^2(l)}{2\mu\omega_s^2 b_s} \left\{ \frac{X_s^2(l)}{2b_s^2} \left(\zeta_s^2 + \frac{\vartheta_s^2}{\omega_s^2} \right) + \sum_{n=1}^r \frac{X_n^2(l)}{b_n^2} \left(\zeta_n^2 + \frac{\vartheta_n^2}{\omega_n^2} \right) \right\},$$

(27)

 $s = 1, \dots, r,$

$$\lambda_s^2 = 1 + \frac{cX_s^2(l)}{2\mu\omega_s^2 b_s} \left\{ \sum_{n=1}^r \frac{X_n^2(l)}{b_n^2} \left(\zeta_n^2 + \frac{\vartheta_n^2}{\omega_n^2} \right) \right\}, \quad s \geq n.$$

Podstawiając do ostatnich zależności konkretne wielkości charakteryzujące badany pręt obliczymy kolejne wartości współczynników linearyzacji λ_s^2 , λ_s^2 oraz częstości drgań nieliniowych $\lambda_s^2 \omega_s^2$, jak również zbadamy wpływ warunków początkowych na wymienione wielkości.

5. Określmy warunki początkowe funkcją postaci dx/l , przy czym amplitudy ugięcia przyjmiemy tego samego rzędu, co ugięcie statyczne, czyli $\varphi(x) = \frac{10^{-2} dx}{l}$ [cm]. Początkowe prędkości weźmiemy w pierwszym przypadku stukrotnie większe od amplitudy ugięć, czyli $\psi_I(x) = \frac{dx}{l} \left[\frac{\text{cm}}{s} \right]$, a w drugim wypadku tylko dziesięciokrotnie, $\psi_{II}(x) = \frac{10^{-1} dx}{l} \left[\frac{\text{cm}}{s} \right]$. Czynniki d , jak widać, ma tu sens wspólnej amplitudy prędkości i ugięcia początkowego. Dane liczbowe rozpatrywanego pręta przyjmiemy następujące: długość $l = 100$ cm, przekrój $A = 1 \times 1$ cm², moduł Younga $E = 2 \cdot 10^{-6}$ KGcm⁻², gęstość liniowa masy $\mu = 7,8 \cdot 10^{-6}$ KGs²cm⁻², sztywność sprężyny nieliniowej $c = 1$ KG cm⁻³.

Posługując się funkcjami własnymi badanego pręta [8] obliczono współczynniki wchodzące we wzory (27) dla pięciu kolejnych rzędów drgań własnych i dwu różnych wartości prędkości początkowej. Przedstawiając poszukiwane współczynniki linearyzacji w postaci $\lambda_s^2 = 1 + \sigma_s$, porównano poprawki bez uwzględnienia prędkości początkowej (σ_{sx}) i z jej uwzględnieniem (σ_s). Ponadto porównano wyniki otrzymane za pomocą wzoru asymptotycznego (σ_s) z wynikami pierwszego przybliżenia (σ_s). Przypadek większej prędkości początkowej oznaczono symbolem I, a mniejszej — II. Wyniki tych obliczeń przedstawia tablica 1.

Tablica 1

| s | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--------------------------------|---------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| ω_s^2 | 2.640,7 | 103.736,0 | 813.441,0 | 3.123.850 | 7.930.789 |
| I $\sigma_{sx} = \sigma_s \%$ | 22,5% | 22,38% | 22,26% | 22,04% | 22,04% |
| II $\sigma_{sx} = \sigma_s \%$ | 96,66% | 96,64% | 96,62% | 96,58% | 96,58% |
| I $\sigma_s = \sigma_s \%$ | 67,12% | 96,63% | 99,83% | 99,97% | 99,98% |
| II $\sigma_s = \sigma_s \%$ | 68,15% | 98,23% | 98,79% | 99,99% | 99,99% |

Wartości współczynnika linearyzacji wynoszą:

$$\lambda_s^2 = 1 + \sigma_s d^2,$$

$$\lambda_1^2 = 1 + 71,077 \cdot 10^{-4} d^2, \quad \lambda_2^2 = 1 + 114,507 \cdot 10^{-6} d^2,$$

$$\lambda_3^2 = 1 + 13,856 \cdot 10^{-6} d^2, \quad \lambda_4^2 = 1 + 4,143 \cdot 10^{-6} d^2$$

$$\lambda_5^2 = 1 + 0,401 \cdot 10^{-6} d^2,$$

w przypadku I;

$$\lambda_1^2 = 1 + 15,960 \cdot 10^{-4} d^2, \quad \lambda_2^2 = 1 + 26,523 \cdot 10^{-6} d^2,$$

$$\lambda_3^2 = 1 + 3,192 \cdot 10^{-6} d^2, \quad \lambda_4^2 = 1 + 0,945 \cdot 10^{-6} d^2$$

$$\lambda_5^2 = 1 + 0,092 \cdot 10^{-6} d^2,$$

w przypadku II.

6. Przedstawione rozważania ogólne i obliczenia cyfrowe prowadzą do następujących wniosków:

Pominięcie prędkości początkowej w drganiach pręta (we współczynniku linearyzacji) jest możliwe tylko dla amplitud prędkości rzędu ugięć statycznych. Dla prędkości dziesięciokrotnie większych (II) błąd wynosi już około 4%, a dla stukrotnie wyższych (I) ponad 70%. Wielkość tego błędu jest dla wszystkich częstości własnych $s = 1, 2, \dots$ taka sama. A więc dla dużych prędkości początkowych (wynikających np. z uderzenia) wpływ ich na częstości własne układu nieliniowego i jego drgania jest nie do pominięcia. Wyprowadzony asymptotyczny wzór na częstość drgań daje poprawne wyniki tak dla dużych, jak i dla małych prędkości już dla trzeciej częstości własnej.

Literatura cytowana w tekście

1. K. PISZCZEK, R. WOJDANOWSKA-ZAJĄC, *Free vibration of a beam on elastic supports with one weakly nonlinear condition*, Arch. Mech. Stos., 3, 17 (1965).
2. K. PISZCZEK, L. SOBEJKO, *Drgania swobodne belki przy słabo nieliniowych warunkach brzegowych*, Rozpr. Inżyn., 2, 13 (1965).
3. B. PORTER, R. A. BILLET, *Harmonic and subharmonic vibrations of continuous system having nonlinear constrain*, Int. J. Mech. Sci., 7 (1965), 431-439.
4. W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, *Periodyczne drgania swobodne belki przy słabo nieliniowych warunkach brzegowych*, Rozpr. Inżyn., 1, 15 (1967).
5. Cz. CEMPEL, *Wpływ nieliniowego utwierdzenia na częstości drgań swobodnych pręta*, Zesz. Nauk. Pol. Pozn., Mechanika, 8, 1967.
6. В. С. Пугачев, *Теория случайных функции*, Физматгиз, Москва 1962.
7. М. В. Миронов, *Одно видоизменение теории равномерного распределения и ее применение в теории колебаний*, Прикл. мат. мех., 1, 32 (1968).
8. М. М. Бабаков, *Теория колебаний*, Москва 1958.

Резюме

ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ
НА СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕЛИНЕЙНО ЗАКРЕПЛЕННОГО СТЕРЖНЯ

В работе рассмотрено влияние начальных условий на частоты нелинейных колебаний стержня. Исходя из теоремы о среднем значении Г. Вейля, получено равенство, определяющее частоты колебаний произвольного порядка. На приведенном примере показано, что пренебрежение начальной скоростью возможно только лишь когда амплитуды скорости имеют порядок амплитуд статических прогибов стержня.

Summary

INFLUENCE OF THE INITIAL CONDITIONS ON NATURAL VIBRATIONS
OF A BAR WITH NONLINEAR FIXING

This paper is devoted to the analysis of the influence of the initial conditions on the frequency of nonlinear vibrations. Making use of Weyl's theorem on the mean value relations are obtained for the frequency of vibration of any order. By considering a numerical example it is shown that the initial velocity can be disregarded only if the velocity amplitude is of the order of the static deflection of the bar.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 4 lipca 1968 r.
