

O ZWIĄZKACH PODSTAWOWYCH TEORII POWŁOK PLASTYCZNYCH

MARIA DUSZEK i ANTONI SAWCZUK (WARSZAWA)

1. Wprowadzenie

Każde przejście od układu równań opisujących zachowanie się ośrodka trójwymiarowego do układu równań teorii powłok, rozpatrywanych jako dwuwymiarowa przestrzeń zakrzywiona, związane jest z wprowadzeniem pewnych założeń upraszczających. Założenia takie dotyczą głównie stanu odkształcenia oraz stanu naprężenia w powłoce. Nie może istnieć jednoznaczne, ścisłe przejście od opisu trójwymiarowego do równań określonych na powierzchni środkowej powłoki.

Teorie przybliżone mają sens, jeśli są wewnętrznie spójne, tzn. gdy wprowadzone założenia nie są wzajemnie sprzeczne oraz jeśli ponadto konsekwentnie uwzględniane są w otrzymanyach związkach wyrazy tego samego rzędu wielkości. W zakresie teorii powłok sprężystych ostatnie lata przyniosły szereg podstawowych studiów wyjaśniających konsekwencje różnych założeń, m. in. założeń Kirchhoffa-Love'a (P. M. NAGHDI [1], W. T. KOITER [2], J. L. SANDERS [3] i Cz. WOŹNIAK [4]).

Studia te umożliwiają rozpatrzenie związków podstawowych teorii powłok plastycznych i zbudowanie konsekwentnych teorii tego typu konstrukcji. Zagadnienie nie jest trywialne, gdyż teoria ośrodków sztywno-plastycznych charakteryzuje się szeregiem własnych założeń, wykorzystywanych np. przy wyprowadzaniu równań powierzchni granicznych. Należy więc zbadać konsekwencje wprowadzonych przyjęć i pozbyć się takich założeń, które są — w ramach określonej teorii — wewnętrznie niezgodne. Układ równań teorii powłok powinien zawierać również odpowiedni układ warunków brzegowych.

Niniejsza praca zawiera dyskusję związków teorii powłok plastycznych z materiału nieściśliwego. Podstawowym przyjęciem jest stosowalność zasady prac przygotowanych. W p. 2 autorzy zestawiają definicje i założenia, podczas gdy w następnym zawarta jest propozycja miary odkształcenia i wprowadzony jest odpowiedni tensor zmian krzywizny powierzchni środkowej powłoki na drodze oszacowania rzędu wielkości poszczególnych wyrazów w wyrażeniu na prędkość rozpraszania energii. W p. 4 podano układ równań równowagi i warunków brzegowych, uzyskany z zasady prac przygotowanych. Punkt 5 zawiera omówienie warunków plastyczności dla powłok w szczególności omówienie powierzchni granicznych dla powłok z materiału Hubera-Misesa. Ostatni punkt zawiera zestawienie podstawowych równań dla szczególnych przypadków geometrii powłok.

Wszystkie wyniki przedstawione są w przestrzennym opisie. Dla pełności obrazu przytoczono również główne formuły teorii powłok, a niezwiązane bezpośrednio z własnościami materiału.

2. Założenia. Oznaczenia

Niech X^A i x^i oznaczają odpowiednio materialne i przestrzenne współrzędne normalne, G_{AB} i g_{ij} — tensory metryczne baz. Dla układów normalnych $G_{A3} = g_{\alpha 3} = 0$, $G_{33} = g_{33} = 1$. Litery greckie przebiegają liczby 1, 2, łacińskie — liczby 1, 2, 3.

Deformacja powłoki określona jest przez podanie praw transformacji

$$(2.1) \quad X^A = X^A(x^\alpha, x^3), \quad x^i = x^i(X^T, X^3).$$

Pewne ograniczenia na (2.1) nakładają założenia teorii Love'a-Kirchhoffa.

Teoria Love'a-Kirchhoffa (pierwsze przybliżenie Love'a) opiera się na następujących czterech założeniach:

1) prostoliniowe włókna, normalne do powierzchni środkowej powłoki w konfiguracji początkowej, pozostają prostoliniowe i normalne we wszystkich innych konfiguracjach, tzn.

$$(2.2) \quad X^T = X^T(x^\alpha), \quad x^\alpha = x^\alpha(X^T);$$

2) normalne do powierzchni środkowej włókna powłoki nie zmieniają swej długości w procesie odkształcania, tzn. że

$$(2.3) \quad X^3 = x^3;$$

3) naprężenia normalne, działające na powierzchniach równoległych do powierzchni środkowej, są niewielkie w porównaniu z pozostałymi naprężeniami i mogą być pominięte w związkach konstytutywnych i równaniach równowagi wewnętrznej, tzn.

$$(2.4) \quad \sigma_{33} = 0;$$

4) grubość powłoki $2H$ jest niewielka w porównaniu z najmniejszym promieniem krzywizny R powierzchni środkowej oraz że grubość powłoki jest niewielka w porównaniu z długością L fali przemieszczenia powierzchni środkowej [2]. Założenia te pozwalają pominąć w porównaniu z jednością wyrazy rzędu H^2/R^2 i H^2/L^2 , czy nawet H/R , w zależności od wymaganej «dokładności» teorii.

Kinematyczne warunki (2.2) i (2.3), tzn. założenia 1 i 2, powodują, że odkształcenia poprzeczne w powłoce znikają tożsamościowo. W konsekwencji we wszystkich równoległych do powierzchni środkowej warstwach powłoki panuje płaski stan odkształcenia.

Dotychczas, rozpatrując zagadnienia nośności granicznej posługiwano się teorią powłok, wykorzystującą założenia Love'a-Kirchhoffa, bez badania konsekwencji tych założeń. Ze stanowiska teorii powłok plastycznych z materiału nieściśliwego, uwzględniającej zmiany geometrii, stanowisko takie nie może być zaakceptowane bez dodatkowych wyjaśnień. Przedstawione wyżej założenia wywołują następujące uwagi:

a) wymagania 2 i 3 pozostają ze sobą w sprzeczności,

b) dla materiału nieściśliwego, podlegającego stowarzyszonemu prawu płynięcia plastycznego, założenie 2, konsekwentnie stosowane, zmuszałoby do ograniczenia się do profili naprężeń reprezentowanych przez rzut warunku plastyczności na płaszczyznę: $\sigma_{11} - \sigma_{22} = 0$.

W celu uniknięcia takich niekonsekwencji rozpatrywać będziemy teorię sformułowaną przy następujących założeniach:

1. Odształcenia poprzeczne są pomijalnie małe, tzn.

$$(2.5) \quad e_{\alpha 3} \equiv 0.$$

Na mocy tego założenia siły poprzeczne nie biorą udziału w rozpraszaniu energii i mogą więc być traktowane jako reakcje.

2. Odształcanie plastyczne zachodzi bez zmiany objętości, tzn. że idealnie plastyczny materiał jest nieściśliwy.

3. Składowe wektora prędkości przemieszczeń są analitycznymi funkcjami zmiennej x^3 , tzn. w kierunku normalnym do powierzchni środkowej. Nadmienimy, że przybliżone teorie powłok sprężystych korzystają raczej z asymptotycznych rozwinięć równań trójwymiarowego problemu względem pewnego małego parametru (np. grubości powłoki). Wobec braku ogólnych metod rozwiązywania trójwymiarowych zadań teorii idealnej plastyczności analogiczne podejście nie może być zastosowane do powłok plastycznych.

Dalsze dwa założenia przyjmujemy stosownie do przybliżenia Love'a-Kirchhoffa.

4. Naprężenia normalne σ_{33} są pomijalne.

5. Grubość powłoki jest niewielka w porównaniu z najmniejszym promieniem krzywizny powierzchni środkowej.

Należy podkreślić, że z tych założeń nie wynika ani płaskość przekroju, ani nieodkształcalność elementu normalnego do powierzchni środkowej powłoki.

W przyjętym układzie współrzędnych normalnych $\{x^\alpha, x^3\}$ $\alpha=1, 2$, linie parametryczne x^α tworzą siatkę na powierzchni środkowej, x^3 zaś oznacza współrzędną odmierzaną w kierunku zewnętrznej normalnej do tej powierzchni. Lokalną bazę na powierzchni środkowej $\{x^\alpha, 0\}$ tworzą wektory $\{a_\alpha, a_3\}$, przy czym

$$(2.6) \quad a_3 \cdot a_\alpha = 0, \quad a_3 \cdot a_3 = 1.$$

Wektory bazy lokalnej w dowolnym punkcie powłoki oznaczono przez $\{g_\alpha, g_3\}$. Związane są one z wektorami bazy na powierzchni środkowej zależnościami

$$(2.7) \quad g_\alpha = \mu_\alpha^\gamma a_\gamma, \quad g_3 = a_3,$$

gdzie

$$(2.8) \quad \mu_\alpha^\gamma = \delta_\alpha^\gamma - x^3 b_\alpha^\gamma$$

jest translatorem pozwalającym rozpatrywać zjawiska zachodzące w poszczególnych punktach powłok w bazie związanej z powierzchnią środkową.

Wektory bazy odwrotnej oraz odwrotność wielkości (2.8) określone są następującymi zależnościami [1]:

$$(2.9) \quad a^\alpha = \mu_\gamma^\alpha g^\gamma, \quad g^\alpha = (\mu^{-1})^\alpha_\gamma a^\gamma,$$

$$(2.10) \quad \mu_{\beta}^{\alpha} (\mu^{-1})_{\alpha}^{\gamma} = \delta_{\beta}^{\gamma}, \quad (\mu^{-1})_{\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{\mu} [\delta_{\gamma}^{\alpha} - x^3 (b_{\gamma}^{\alpha} - b_{\beta}^{\beta} \delta_{\gamma}^{\alpha})],$$

gdzie $\mu = |\mu_{\beta}^{\alpha}|$. Ponadto oznaczamy przez $a_{\alpha\beta}$ tensor metryczny niezdeformowanej powierzchni środkowej, $b_{\alpha\beta}$ drugi podstawowy tensor tej powierzchni. Siły błonowe, momenty i siły poprzeczne w powłoce o grubości $2H$ zdefiniowane są następująco:

$$(2.11) \quad N^{\alpha\beta} = \int_{-H}^H \mu \sigma^{\alpha\gamma} \mu_{\gamma}^{\beta} dx^3, \quad M^{\alpha\beta} = \int_{-H}^H \mu \sigma^{\alpha\gamma} \mu_{\gamma}^{\beta} x^3 dx^3, \quad Q^{\alpha} = \int_{-H}^H \mu \sigma^{\alpha 3} dx^3.$$

Definicje te przedstawiają odpowiednie wypadkowe naprężeń i momenty naprężeń na jednostkę długości przekroju powierzchni środkowej. Dodatkowo siły błonowe powodują rozciąganie powierzchni środkowej, dodatnie momenty zaś zmniejszają promienie krzywizny powłoki.

3. Miary odkształcenia. Symetryzacja sił i miar prędkości odkształceń

Wektor prędkości v dowolnego punktu powłoki może być przedstawiony następująco:

$$(3.1) \quad v = v^i g_i = v^{\alpha} g_{\alpha} + v^3 g_3 = \bar{v}^{\alpha} a_{\alpha} + \bar{v}^3 a_3,$$

gdzie \bar{v}^{α} , \bar{v}^3 oznaczają odpowiednie składowe po przesunięciu wektora chwilowej prędkości do bazy na powierzchni środkowej.

Tensor prędkości odkształcenia określony jest przez następujące składowe w bazie $\{g_{\alpha}, g_3\}$:

$$(3.2) \quad v_{i,j} = \frac{1}{2} (v_{i||j} + v_{j||i}),$$

gdzie symbol $||$ oznacza kowariantne różniczkowanie w tej bazie. W celu określenia miary odkształcenia powłoki traktowanej jako kontinuum dwuwymiarowe opisywać będziemy ruch punktów powłoki w bazie $\{a_{\alpha}, a_3\}$. Wykorzystać trzeba więc prawa przejścia od kowariantnego różniczkowania «przestrzennego» do kowariantnego różniczkowania «powierzchniowego», mianowicie (por. np. [1])

$$(3.3) \quad \begin{aligned} v_{\alpha||\beta} &= v_{\alpha, \beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} v_{\gamma} - \Gamma_{\alpha\beta}^3 v_3 = v_{\alpha|\beta} - b_{\alpha\beta} v_3, \\ v_{3||\beta} &= v_{3, \beta} - \Gamma_{3\beta}^{\gamma} v_{\gamma} = v_{3|\beta} + b_{\beta}^{\gamma} v_{\gamma}, \\ v_{\alpha||3} &= v_{\alpha, \beta} = v_{\alpha|\beta}, \end{aligned}$$

gdzie $|$ oznacza kowariantne różniczkowanie w bazie $\{a_{\alpha}\}$, przecinek zaś — różniczkowanie cząstkowe.

Składowe tensora prędkości odkształcenia, wyrażone w wielkościach określonych na powierzchni środkowej, przybierają postać

$$(3.4) \quad \begin{aligned} 2V_{\alpha\beta} &= \mu_{\alpha}^{\gamma} (\bar{v}_{\alpha|\beta} - b_{\gamma\beta} \bar{v}_3) + \mu_{\beta}^{\gamma} (\bar{v}_{\gamma|\alpha} - b_{\gamma\alpha} \bar{v}_3), \\ 2V_{\alpha 3} &= \mu_{\alpha}^{\gamma} \bar{v}_{\gamma, 3} + \bar{v}_{3, \alpha} + b_{\alpha}^{\gamma} \bar{v}_{\gamma}, \\ 2V_{33} &= 2\bar{v}_{3, 3}. \end{aligned}$$

Zgodnie z przyjętym założeniem o analityczności składowych v_i przedstawimy składowe wektora prędkości przemieszczeń w postaci następującego szeregu potęgowego:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \bar{v}_\alpha &= A_\alpha + x^3 B_\alpha + (x^3)^2 C_\alpha + (x^3)^3 D_\alpha + \dots, \\ \bar{v}_3 &= A_3 + x^3 B_3 + (x^3)^2 C_3 + (x^3) D_3 + \dots. \end{aligned}$$

Po wykorzystaniu (3.5) w (3.4) otrzymujemy

$$(3.6) \quad \begin{aligned} 2V_{\alpha\beta} &= \mu_\alpha^\gamma [A_{\gamma|\beta} - b_{\gamma\beta} A_3 + x^3 (B_{\gamma|\beta} - b_{\gamma\beta} B_3) + \dots] + \\ &\quad + \mu_\beta^\gamma [A_{\gamma|\alpha} - b_{\gamma\alpha} A_3 + x^3 (B_{\gamma|\alpha} - b_{\gamma\alpha} B_3) + \dots], \\ 2V_{\alpha 3} &= \mu_\alpha^\gamma [B_\gamma + 2x^3 C_\gamma + 3(x^3)^2 D_\gamma + \dots] + A_{3,\alpha} + \\ &\quad + x^3 B_{3,\alpha} + \dots + b_\alpha^\gamma [A_\gamma + x^3 B_\gamma + (x^3)^2 C_\gamma + \dots], \\ V_{33} &= B_3 + 2x^3 C_3 + 3(x^3)^2 D_3 + \dots. \end{aligned}$$

Wielkości A_α i A_3 przedstawiają składowe wektora prędkości przemieszczeń punktów powierzchni środkowej. Znając pozostałe funkcje powierzchniowe opisać można z wymaganą dokładnością chwilowy stan odkształcenia w punktach poza tą powierzchnią. Funkcje te można bliżej sprecyzować korzystając z założeń kinematycznych 1 i 2. Wyrażają się one odpowiednio

$$(3.7) \quad V_{\alpha 3} = 0, \quad V_{33} = -V_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}.$$

Te dwa warunki umożliwiają wyznaczenie funkcji B_α , C_α , D_α i B_3 , C_3 , D_3 w zależności od A_α i A_3 , czyli określenie prędkości przemieszczeń dowolnego punktu za pomocą funkcji opisujących ruch punktów powierzchni środkowej. Wprowadzając (3.6) do (3.7) i żądając, aby spełnione one były dla każdego x^3 , otrzymujemy w rezultacie następujące układy równań:

$$(3.8) \quad \begin{aligned} B_\alpha &= -A_{3,\alpha} - b_\alpha^\gamma A_\gamma, \\ B_3 &= -a^{\alpha\gamma} (A_{\alpha|\gamma} - b_{\alpha\gamma} A_3), \\ 2C_\alpha &= -B_{3,\alpha}, \\ 2C_3 &= -a^{\alpha\beta} (B_{\alpha|\beta} - b_{\alpha\beta} B_3) - b^{\alpha\beta} (A_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta} A_3), \\ 3D_\alpha &= b_\alpha^\gamma C_\gamma - C_{3,\alpha}, \\ 3D_3 &= -a^{\alpha\beta} (C_{\alpha|\beta} - b_{\alpha\beta} C_3) - (b^{\alpha\beta} - H a_{\alpha\beta}) (B_{\alpha|\beta} - b_{\alpha\beta} B_3) - \\ &\quad - (H b^{\alpha\beta} - K a^{\alpha\beta}) (A_{\alpha|\beta} - b_{\alpha\beta} A_3), \\ 4E_4 &= 2b_\alpha^\gamma D_\gamma - D_{3,\alpha}, \end{aligned}$$

gdzie

$$H = \frac{1}{2} b_\gamma^\gamma, \quad K = \frac{1}{2} \delta_{\lambda\mu}^\gamma \epsilon b_\gamma^\lambda b_\epsilon^\mu.$$

Wstawiając kolejno wyznaczone funkcje do wzorów na prędkości odkształceń otrzymujemy opis kinematyki z żadaną dokładnością.

Aby ocenić rząd wielkości poszczególnych składników tensora prędkości odkształcenia oraz w celu ustalenia miary odkształcenia powierzchni środkowej, rozpatrzmy rozpraszanie energii w procesie plastycznego płynięcia powłoki. Dysypacja, odniesiona do jednostki powierzchni środkowej, zdefiniowana jest następująco:

$$(3.9) \quad D = \int_{-H}^H \mu (\sigma^{\alpha\beta} V_{\alpha\beta} + 2\sigma^{\alpha 3} V_{\alpha 3} + \sigma^{33} V_{33}) dx^3.$$

Stosownie do przyjętych założeń

$$(3.10) \quad V_{\alpha 3} = 0, \quad \sigma_{33} = 0$$

jednostkowa dysypacja wyraża się następującym wzorem przybliżonym:

$$(3.11) \quad D = \int_{-H}^H \mu \sigma^{\alpha\beta} V_{\alpha\beta} dx^3.$$

W przypadku powłok liniowo-sprężystych analogiczne do (3.11) ograniczenie wyrażenia na jednostkową energię sprężystą powoduje względny błąd rzędu H^2/L^2 lub H/R (W. T. KOITER [5]).

Mając powyższą informację na uwadze, przy rozpatrywaniu (3.11) pominiemy w porównaniu do jednościi wyrazy rzędu H^2/L^2 i H^2/R^2 i wyższych. Wykorzystując definicję (2.11) sił przekrojowych w powłoce oraz wprowadzając do (3.11) zależności (3.6) i (3.8), jednostkową dysypację wyrazimy ostatecznie wzorem

$$(3.12) \quad D = N^{\beta\alpha} (A_{\alpha|\beta} - b_{\alpha\beta} A_3) \left[1 + O\left(\frac{H^2}{R^2}\right) + O\left(\frac{H^2}{RL}\right) + O\left(\frac{H^2}{L^2}\right) + \right. \\ \left. + O\left(\frac{H^4}{R^4}\right) + \dots \right] + M^{\beta\alpha} \left[-A_{3|\alpha\beta} - b_{\alpha|\beta}^{\gamma} A_{\gamma} - b_{\alpha}^{\gamma} A_{\gamma|\beta} + \right. \\ \left. + b_{\alpha\beta} (A^{\gamma}{}_{|\gamma} - b_{\gamma}^{\gamma} A_3) \left[1 + O\left(\frac{H^2}{R^2}\right) + O\left(\frac{H^2}{RL}\right) + O\left(\frac{H^2}{L^2}\right) + \dots \right] \right].$$

Przy ustalaniu (3.12) różniczkowanie kowariantne oszacowywano odwrotnością długości fali przemieszczenia. Przybliżone wyrażenie na gęstość dysypacji ma więc postać

$$(3.13) \quad D \approx N^{\beta\gamma} [A_{\gamma|\beta} - b_{\gamma\beta} A_3] + M^{\beta\gamma} [-A_{3|\gamma\beta} - b_{\gamma|\beta}^{\alpha} A_{\alpha} - b_{\gamma}^{\alpha} A_{\alpha|\beta} + b_{\gamma\beta} (A^{\alpha}{}_{|\alpha} - b_{\alpha}^{\alpha} A_3)].$$

Wzór ten pozwoli na zdefiniowanie miar odkształceń powłoki jako uogólnionych prędkości odkształceń stowarzyszonych z uogólnionymi naprężeniami [6].

Teoria cienkich powłok plastycznych opiera się, stosownie do wymagań (3.10), na następującej definicji mocy rozpraszanej:

$$(3.14) \quad D = \dot{N}^{\beta\gamma} \dot{\lambda}_{\gamma\beta} + \dot{M}^{\beta\gamma} \dot{\kappa}_{\gamma\beta},$$

gdzie $\dot{N}^{\beta\gamma}$, $\dot{M}^{\beta\gamma}$ są uogólnionymi naprężeniami oraz $\dot{\lambda}_{\gamma\beta}$, $\dot{\kappa}_{\gamma\beta}$ uogólnionymi prędkościami odkształceń.

Jeśli wybrać siły błonowe i momenty zdefiniowane we wzorze (2.11) jako uogólnione naprężenia, to z porównania (3.13) i (3.14) wynika następującą definicją stowarzyszonych uogólnionych prędkości odkształceń:

$$(3.15) \quad \begin{aligned} \lambda_{\gamma\beta} &= u_{\beta|\gamma} - b_{\gamma\beta} w, \\ \kappa_{\gamma\beta} &= -w_{|\gamma\beta} - b_{\gamma|\beta}^{\alpha} u_{\alpha} - b_{\gamma}^{\alpha} u_{\alpha|\beta} + b_{\gamma\beta} (u^{\alpha}{}_{|\alpha} - b_{\alpha}^{\alpha} w). \end{aligned}$$

W (3.15) wprowadzono zwykle stosowane oznaczenia: $u_{\gamma} \equiv A_{\gamma}$ (prędkość przemieszczeń w kierunkach stycznych do powierzchni środkowej powłoki) oraz $w \equiv A_3$ (prędkość przemieszczeń normalnych (ugięć) powierzchni środkowej).

Otrzymane miary odkształcenia różnią się od odpowiednich miar wynikających z założeń teorii Love'a-Kirchhoffa ostatnim, dodatkowym wyrazem we wzorze na prędkość zmiany krzywizny $\kappa_{\gamma\beta}$. Prędkość wydłużeń powierzchni środkowej $\lambda_{\gamma\beta}$ pozostaje bez zmian. Dodatkowy wyraz w wyrażeniu na prędkość zmiany krzywizny jest konsekwencją wprowadzonego założenia o nieściśliwości materiału, a ściślej konsekwencją odejścia od wymagań równoczesnego spełnienia zależności płaskiego stanu naprężenia i płaskiego stanu odkształcenia. Ten dodatkowy wyraz przedstawić można w postaci

$$(3.16) \quad b_{\gamma\beta} (u^{\alpha}{}_{|\alpha} - b_{\alpha}^{\alpha} w) = b_{\gamma\beta} a^{\alpha\beta} \lambda_{\alpha\beta}.$$

Jego udział we wzorze (3.15) zależy od parametrów geometrycznych powłoki i w porównaniu do pozostałych wyrazów udział ten może być oszacowany dla szczególnych geometrii. Dla powłok sprężystych analogiczną miarę prędkości krzywizn otrzymał na innej drodze W. T. KOITER [2].

Uogólnione naprężenia (2.11) i stowarzyszone z nimi odkształcenia (3.15) nie są tensorami symetrycznymi z wyjątkiem przypadku płyt. Istnieją jednak możliwości symetryzacji wielkości występujących w teorii powłok, a więc obniżenia liczby niewiadomych funkcji i tożsamościowego spełnienia równania równowagi, charakteryzującego symetrię tensora naprężenia (tzw. szóste równanie równowagi). Kryteria symetryzacji mogą być różne. Jedynym wymaganiem, które muszą spełniać wszystkie symetryzacje, jest równoważność dysypacji:

$$(3.17) \quad D \equiv M^{\beta\alpha} \lambda_{\alpha\beta} + M^{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta} = \bar{N}^{\alpha\beta} \bar{\lambda}_{\beta\alpha} + \bar{M}^{\alpha\beta} \bar{\kappa}_{\alpha\beta},$$

gdzie $\bar{N}^{\alpha\beta} = \bar{N}^{\beta\alpha}$, $\bar{\lambda}_{\alpha\beta} = \bar{\lambda}_{\beta\alpha}$ itd. Znane są różne propozycje symetryzacji [1, 2 i 7]. Stosowane są również symetryzacje nie dające tensorowej postaci składowych sił wewnętrznych [8].

Dla naszych celów przyjmiemy następującą postać symetrycznych tensorów sił wewnętrznych:

$$(3.18) \quad \begin{aligned} \bar{N}^{\beta\alpha} &= N^{\beta\alpha} + b_{\beta}^{\alpha} M^{\gamma\beta} + M^{\rho\gamma} b_{\rho\gamma} a^{\alpha\beta}, \\ \bar{M}^{\beta\alpha} &= \frac{1}{2} (M^{\beta\alpha} + M^{\alpha\beta}). \end{aligned}$$

Symetria $\bar{N}^{\alpha\beta}$ wynika z szóstego równania równowagi, które w wielkościach zdefiniowanych przez (2.11) ma postać [1]

$$(3.19) \quad \epsilon_{\alpha\beta} [N^{\beta\alpha} - b_{\gamma}^{\beta} M^{\alpha\beta}] = 0,$$

gdzie $\epsilon_{\alpha\beta}$ jest alternatorem.

Wielkościami kinematycznymi stowarzyszonymi z (3.18) są, stosownie do wymagania (3.17), następujące symetryczne miary odkształcenia:

$$(3.20) \quad \bar{\lambda}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\lambda_{\alpha\beta} + \lambda_{\beta\alpha}), \quad \bar{\kappa}_{\alpha\beta} = \kappa_{\alpha\beta} - b_{\beta}^{\gamma} \lambda_{\gamma\beta} - b_{\alpha\beta} \lambda_{\gamma}^{\gamma}.$$

Stanowią one układ miar odkształcenia przedstawionej teorii powłok plastycznych, wykorzystującej symetryczne tensory sił wewnętrznych (3.18).

Miary odkształcenia (3.20) mają prostą interpretację geometryczną. Jeśli oznaczyć przez $\bar{a}_{\beta\alpha}$ i $\bar{b}_{\alpha\beta}$ odpowiednio pierwszą i drugą formę podstawową powierzchni środkowej po chwilowym ruchu, to

$$(3.21) \quad \bar{\lambda}_{\alpha\beta} = \bar{a}_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}, \quad \bar{\kappa}_{\alpha\beta} = \bar{b}_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta}.$$

Łatwo się o tym przekonać ze związków (3.36) i (4.2) studium W. T. KOITERA [2]. Zależności (3.21) są natomiast znanymi definicjami miar odkształcenia liniowej teorii powłok, opartej na założeniach Love'a-Kirchhoffa.

Tak więc konsekwentnie zbudowana teoria nośności granicznej powłok plastycznych może się posługiwać miarami odkształcenia (3.21). Z tymi mechanizmami związane są jednak uogólnione naprężenia (3.18), różniące się ostatnim wyrazem w (3.18)₁ od zwykle stosowanych w liniowych teoriach powłok symetryzacjach tensorów sił wewnętrznych (por. np. [1], definicje (5.35)).

Jak widać, symetryzacje sił wewnętrznych i miar odkształcenia nie mogą być dokonywane niezależnie od siebie.

4. Równania równowagi. Warunki brzegowe

Dla uzyskania układu równań równowagi zgodnych z wprowadzonymi założeniami i wyrażonych w wielkościach (3.18) wykorzystamy zasadę prac przygotowanych przedstawioną w formie

$$(4.1) \quad D_{\text{ext}} = D_{\text{int}},$$

gdzie D_{ext} oznacza moc przygotowaną sił powierzchniowych i brzegowych, natomiast D_{int} jest mocą uogólnionych naprężeń określoną poprzez jednostkową dysypację (3.17). Co prawda, w związku z (3.21) wynik (co do formy równań równowagi zgodnych z (4.1)) jest do przewidzenia; niemniej jednak dla zupełności opisu podamy tu i te równania.

Przyjmując, że obciążenie zewnętrzne jest polem wektorowym przepisany na powierzchni środkowej powłoki, tzn.

$$(4.2) \quad \mathbf{p} = p^{\alpha} \mathbf{a}_{\alpha} + p \mathbf{a}_3$$

i nadając wirtualne prędkości (3.1) punktom tej powierzchni, gdzie $\bar{v}_i \equiv v_i$, otrzymujemy

$$(4.3) \quad D_{\text{ext}} = \int_A (p^\alpha \delta u_\alpha + p \delta w) dA + \int_S (\dot{N}^{\alpha\beta} \delta u_\alpha + \dot{Q}^\beta \delta w + \dot{M}^{\alpha\beta} \delta \varphi_\alpha) n_\beta ds.$$

Składowe $\dot{N}^{\alpha\beta} n_\beta$, $\dot{M}^{\alpha\beta} n_\beta$, $\dot{Q}^\beta n_\beta$ oznaczają odpowiednio siły zaczepione na konturze S obszaru A , φ zaś jest wektorem obrotu na brzegu

$$(4.4) \quad -\varphi_\alpha = w_{i\alpha} + b_\alpha^\beta u_\beta.$$

Moc przygotowana, rozpraszana przez jednostkę powierzchni środkowej powłoki, ma postać (3.17). Całkowita dysypacja wynosi

$$(4.5) \quad D_{\text{int}} = \int_A (\bar{N}^{\beta\alpha} \bar{\lambda}_{\alpha\beta} + \bar{M}^{\beta\alpha} \bar{\kappa}_{\alpha\beta}) dA,$$

a po wprowadzeniu miar odkształcenia (3.20)

$$(4.6) \quad D_{\text{int}} = \int_A [\bar{N}^{\beta\alpha} (\delta u_{\alpha|\beta} - b_{\alpha\beta} \delta w) + \bar{M}^{\beta\alpha} (-\delta w_{i\alpha\beta} - b_{\alpha|\beta}^\gamma \delta u_\gamma - b_{\alpha\beta}^\gamma \delta u_{\gamma|\beta} - b_\beta^\gamma \delta u_{\gamma|\alpha} + b_\beta^\gamma b_{\gamma\alpha} \delta w)] dA.$$

Po zastosowaniu twierdzenia Gaussa i po odpowiednim pogrupowaniu wyrazów powyższy związek przyjmuje postać

$$(4.7) \quad D_{\text{int}} = \int_S [(\bar{N}^{\beta\alpha} - \bar{M}^{\beta\gamma} b_\gamma^\alpha - \bar{M}^{\gamma\beta} b_\gamma^\alpha) \delta u_\alpha - \bar{M}^{\beta\alpha} \delta w_{i\alpha} + \bar{M}^{\beta\alpha} \delta w] n_\beta ds + \\ + \int_A \{ [-\bar{N}^{\beta\alpha} \bar{\lambda}_{\alpha\beta} - \bar{M}^{\beta\gamma} b_{\gamma|\beta}^\alpha + (\bar{M}^{\beta\gamma} b_\gamma^\alpha)_{|\beta} + (\bar{M}^{\beta\gamma} b_\beta^\alpha)_{|\gamma}] \delta u_\alpha + \\ + [-\bar{N}^{\beta\alpha} b_{\alpha\beta} - \bar{M}^{\beta\alpha} b_{\alpha\beta}^\gamma + \bar{M}^{\beta\alpha} b_\beta^\gamma b_{\gamma\alpha}] \delta w \} dA.$$

Wykorzystując (4.3), (4.4) i (4.7) w (4.1) otrzymujemy równanie, które musi być spełnione dla dowolnych wirtualnych prędkości δu_α , δw i $\delta w_{i\alpha}$. Stąd jako warunki konieczne do spełnienia zasady mocy wirtualnych otrzymujemy równania równowagi jak i naprężeniowe warunki brzegowe.

Wyrażone w wielkościach (3.18) równania równowagi przyjmują postać następujących trzech związków:

$$(4.8) \quad -\bar{N}^{\beta\alpha} \bar{\lambda}_{\alpha\beta} + 2\bar{M}^{\beta\gamma} b_{\gamma\beta}^\alpha + \bar{M}^{\beta\gamma} b_{\beta|\gamma}^\alpha = p^\beta$$

oraz

$$(4.9) \quad -\bar{N}^{\beta\alpha} b_{\alpha\beta} - \bar{M}^{\beta\alpha} b_{\beta\alpha}^\gamma + \bar{M}^{\beta\alpha} b_\beta^\gamma b_{\gamma\alpha} = p.$$

Na brzegu natomiast składowe wektorów sił i momentów brzegowych wynoszą

$$(4.10) \quad \dot{N}^{\beta\alpha} n_\beta = (\bar{N}^{\beta\alpha} - b_\gamma^\alpha \bar{M}^{\beta\gamma}) n_\beta, \quad \dot{M}^{\beta\alpha} n_\beta = \bar{M}^{\beta\alpha} n_\beta, \quad \dot{Q}^\beta n_\beta = \bar{M}^{\beta\alpha} \bar{\lambda}_{\alpha\beta} n_\beta.$$

Obciążenie brzegu opisuje się zwykle w odniesionych do jednostki długości konturu wielkościach \dot{N}^α , \dot{Q} , \dot{M}_n i \dot{M}_t , przedstawiających odpowiednio wektor siły błonowej, siłę poprzeczną oraz moment normalny i styczny do linii brzegowej.

Jeśli ponadto n_α oznacza jednostkowy wektor normalny do konturu i skierowany na zewnątrz, a t_α jest jednostkowym wektorem stycznym do brzegu, to cząstkową pochodną wielkości δw wzdłuż brzegu można wyrazić za pomocą pochodnej normalnej i stycznej [2]:

$$(4.11) \quad \delta w_{, \alpha} = \delta w_{, n} n_\alpha + \delta w_{, s} t_\alpha.$$

Wykorzystując powyższą zależność w (4.4) dla wariacji kąta obrotu na brzegu, a następnie w (4.3), otrzymuje się następującą postać warunków brzegowych (4.10):

$$(4.12) \quad \begin{aligned} \dot{N}^\alpha - a^{\gamma\beta} b_\beta^\alpha (\dot{M}_n n_\beta + \dot{M}_t t_\beta) &= (\bar{N}^{\beta\alpha} - 2M^{\beta\gamma} b_\gamma^\alpha) n_\beta, \\ \dot{Q} + \dot{M}_{t|s} &= \bar{M}^{\beta\alpha}{}_{|s} + (\bar{M}^{\beta\alpha} t_\alpha n_\beta)_{|s}, \quad \dot{M}_n = \bar{M}^{\beta\alpha} n_\alpha n_\beta. \end{aligned}$$

Równania równowagi (4.8) i (4.9) oraz warunki brzegowe mają więc klasyczną postać znaną z literatury (np. [1] str. 47, [2], str. 25).

W porównaniu z zależnościami posługującymi się hipotezą Kirchhoffa-Love'a, różnica wynikająca z wykorzystania tu warunku nieściśliwości materiału znajduje swój wyraz jedynie w definicji uogólnionych naprężeń (3.18).

Nadmienimy jeszcze, że ograniczenie pola prędkości (3.5) do postaci

$$(4.13) \quad \bar{v}_\alpha = A_\alpha + x^3 B_\alpha, \quad \bar{v}_3 = A_3 + x^3 B_3$$

nie pozwala na równoczesne spełnienie w sposób ścisły warunku nieściśliwości i wymagania $V_{\alpha 3} = 0$. Wykorzystanie natomiast przedstawienia (3.5) oraz ograniczenie funkcji dysypacji do postaci (3.13) uwzględniającej tylko wyrazy liniowe umożliwiło skonstruowanie spójnej teorii powłok plastycznych, w której siły wewnętrzne w powłoce określone są związkami (3.18), miary zaś odkształcenia zależnościami (3.20).

5. Powierzchnie graniczne

Warunki plastyczności dla powłok mogą być bądź 1) sformułowane bezpośrednio w wielkościach uogólnionych, tzn. przy wykorzystaniu tensorów sił i momentów przepisanych na powierzchni środkowej traktowanej jako dwuwymiarowa przestrzeń, bądź też 2) określone przez zastosowanie odpowiednich transformacji z warunku plastyczności, wyrażonego w składowych przestrzennych tensora naprężenia.

Zwykle stosuje się tę drugą metodę. I tak warunek plastyczności Hubera-Misesa lub Treski przedstawia się w zależności od składowych tensorów powierzchniowych sił i momentów. Transformacje takie wykorzystują definiujące zależności (2.9), co prowadzi w rezultacie do równania powierzchni granicznej

$$(5.1) \quad F(\mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{Q}) = 0,$$

tzn. skalarnej funkcji tensorów \mathbf{M} , \mathbf{N} , \mathbf{Q} , których składowe kontrawariantne zdefiniowane są przez (2.11).

W celu wyjaśnienia w jakim stopniu geometria powłoki wpływa na kształt powierzchni granicznej, zajmiemy się bliżej warunkiem plastyczności Hubera-Misesa.

Dla zakrzywionej warstwy warunek ten ma postać

$$(5.2) \quad 2F = 3\sigma^{\alpha\beta} \sigma^{\gamma\delta} g_{\alpha\delta} g_{\gamma\beta} - (\sigma_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta})^2 - 2\sigma_0^2 = 0,$$

przy czym σ_0 oznacza granicę plastyczności materiału. Zadaniem naszym będzie transformacja tego związku do przestrzeni sił uogólnionych [8 i 9]. Dzięki analityczności warunku (5.2) transformacja taka jest stosunkowo prosta.

Stowarzyszone prawo płynięcia, zastosowane do (5.2), daje następujące składowe pola prędkości odkształceń:

$$(5.3) \quad V_{\alpha\beta} = v \frac{\partial F}{\partial \sigma^{\alpha\beta}} = v(3\sigma_{\alpha\beta} - \sigma_\gamma^\gamma g_{\alpha\beta}), \quad v \geq 0.$$

Wykorzystując warunek nieściśliwości i wymagając, aby $v > 0$, powyższy związek możemy odwrócić i uzyskać formułę:

$$(5.4) \quad \sigma^{\alpha\beta} = \frac{1}{3v} (V_{\rho\gamma} g^{\rho\alpha} g^{\gamma\beta} + V_\gamma^\gamma g^{\alpha\beta}).$$

Wprowadzając (5.4) w (5.2) otrzymujemy

$$(5.5) \quad v = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{6}} (V_\alpha^\beta V_\beta^\alpha + V_\alpha^\alpha V_\beta^\beta)^{1/2}.$$

Tak więc składowe tensora naprężenia są w pełni określone przez składowe tensora prędkości odkształcenia.

Dla pola prędkości przemieszczeń (3.5) po wykorzystaniu zależności (3.8) i po dokonaniu oszacowania rzędu wielkości poszczególnych wyrazów w (3.6) otrzymuje się następujące wyrażenia na składowe tensora prędkości odkształceń:

$$(5.6) \quad 2V_{\alpha\beta} = (\mu_\alpha^\gamma \lambda_{\gamma\beta} + \mu_\beta^\gamma \lambda_{\gamma\alpha}) \left[1 + (x^3)^2 O\left(\frac{1}{L^2}, \frac{1}{R^2}\right) + \dots \right] + (\mu_\alpha^\gamma \kappa_{\gamma\beta} + \mu_\beta^\gamma \kappa_{\gamma\alpha}) x^3 \left[1 + x^3 O\left(\frac{1}{R}\right) + \dots \right],$$

gdzie $\lambda_{\alpha\beta}$, $\kappa_{\alpha\beta}$ są zdefiniowane za pomocą wzorów (3.15).

W dążeniu do wyspecyfikowania powierzchni granicznej (5.1) rozpatrzmy dwa przypadki szczególne. W pierwszej kolejności zajmiemy się powłokami «cienkimi». Wówczas wyrazy typu H/R są pomijalne w porównaniu z jednością. Konsekwentne pominięcie takich wyrazów w (5.6) oraz w (2.8) daje następujący symetryczny tensor prędkości odkształcenia:

$$(5.7) \quad V_{(\alpha\beta)} = \lambda_{(\alpha\beta)} + x^3 \kappa_{(\alpha\beta)}.$$

Naprężenia (5.4) określone są więc wzorem

$$(5.8) \quad 3v\sigma^{\alpha\beta} = [(\lambda_{\gamma\delta} + x^3 \kappa_{\gamma\delta}) a^{\gamma\alpha} a^{\delta\beta} + (\lambda_\gamma^\gamma + x^3 \kappa_\gamma^\gamma) a^{\alpha\beta}].$$

Nawiasy przy tensorach symetrycznych opuszczono, ponieważ tylko takie aktualnie występują w rozpatrywanych związkach.

Podstawiając (5.8) do wyrażeń (2.11) definiujących siły wewnętrzne w powłoce otrzymujemy następujące składowe:

$$(5.9) \quad N^{\alpha\beta} = (\lambda^{\alpha\beta} + \lambda_\gamma^\gamma a^{\alpha\beta}) I_1 + (\kappa^{\alpha\beta} + \kappa_\gamma^\gamma a^{\alpha\beta}) I_2,$$

$$(5.10) \quad M^{\alpha\beta} = (\lambda^{\alpha\beta} + \lambda_\gamma^\gamma a^{\alpha\beta}) I_2 + (\kappa^{\alpha\beta} + \kappa_\gamma^\gamma a^{\alpha\beta}) I_3,$$

gdzie

$$(5.11) \quad I_i = \frac{1}{3} \int_{-H}^H \frac{(x^3)^{i-1}}{\nu} dx^3, \quad i=1, 2, 3.$$

Sześć funkcji, mianowicie $N^{\alpha\beta}$, $M^{\alpha\beta}$, zależy tylko od pięciu parametrów, ponieważ wszystkie wyrazy w (5.9) i (5.10) są jednorodnie stopnia zero względem prędkości odkształceń, gdyż ν dane jest przez (5.5). Metryka powierzchni środkowej powłoki wchodzi do równań (5.9) i (5.10), stanowiących naturalne rozszerzenie odpowiednich zależności odnoszących się do niezakrzywionych przestrzeni a podanych przez ILLUSZINA [8].

Aby otrzymać parametryczną postać równania powierzchni granicznej, a w konsekwencji zależność (5.1), wygodniej jest posłużyć się składowymi mieszanymi tensorów sił wewnętrznych lub też składowymi fizycznymi. Łatwo się przekonać, że składowe mieszane nie zależą od metryki powierzchni środkowej powłoki. Tak więc powierzchnia graniczna dla rozpatrywanego przybliżenia polegającego na konsekwentnym pominięciu (w porównaniu z jednością) wyrazów typu x^3/R jest niezależna od geometrii powłoki. Eliminując parametry kinematyczne z równań (5.9) i (5.10), otrzymujemy

$$(5.12) \quad F(M_\beta^\alpha, M_\beta^\alpha) = 0.$$

Jako drugi przypadek rozpatrzmy powłoki «silnie zakrzywione», dla których długość fali odkształcenia jest porównywalna z mniejszym promieniem krzywizny powierzchni środkowej, tzn. $R \approx L$. Wynika wówczas z (3.15) (po dokonaniu odpowiednich oszacowań), że

$$(5.13) \quad \kappa_{\alpha\beta} = O(\lambda_{\alpha\beta}/R).$$

Mając na uwadze tę zależność oraz pomijając w (5.6), w porównaniu z jednością, wyrazy typu $(x^3/R)^2$, $(x^3/L)^2$ oraz wyrazy wyższego rzędu małości, otrzymujemy

$$(5.14) \quad 2V_{\alpha\beta} \approx \mu_\alpha^\gamma \lambda_{\gamma\beta} + \mu_\beta^\gamma \lambda_{\gamma\alpha} + (\mu_\alpha^\gamma \kappa_{\gamma\beta} + \mu_\beta^\gamma \kappa_{\gamma\alpha}) x^3 \approx \mu_\alpha^\gamma \lambda_{\gamma\beta} + \mu_\beta^\gamma \lambda_{\gamma\alpha} + 2\kappa_{(\alpha\beta)} x^3.$$

Naprężenia (5.4) wyrażają się za pomocą wzoru

$$(5.15) \quad 3\nu\sigma^{\alpha\beta} = (\mu_\rho^\gamma \lambda_{\gamma\eta} + x^3 \kappa_{\rho\eta}) g^{\rho\alpha} g^{\eta\beta} + (\mu_\rho^\gamma \lambda_\gamma^\rho + x^3 \kappa_\gamma^\rho) g^{\alpha\beta}.$$

Wykorzystując (2.9) i (2.10) otrzymujemy

$$(5.16) \quad \mu\sigma^{\alpha\beta} \mu_\beta^\gamma = \frac{\mu}{3\nu} [\lambda_{\eta\eta} \mathbf{a}^\eta \mathbf{g}^\alpha \mathbf{g}^\eta \mathbf{a}^\gamma + x^3 \kappa_{\rho\eta} g^{\rho\alpha} \mathbf{g}^\eta \mathbf{a}^\gamma + (\mu_\rho^\eta \lambda_\eta^\rho + x^3 \kappa_\eta^\rho) \mathbf{g}^\alpha \mathbf{a}^\gamma],$$

a po dokonaniu oszacowań rzędu wielkości poszczególnych wyrazów formuła ta przyjmuje postać

$$(5.17) \quad \mu \sigma^{\alpha\beta} \mu_{\beta}^{\gamma} \approx \frac{1}{3\nu\mu} [(\lambda^{\alpha\beta} + \lambda_{\rho}^{\rho} a^{\alpha\gamma}) + x^3 (\kappa^{(\alpha\gamma)} + \kappa_{\rho}^{\rho} a^{\alpha\gamma} + \\ + 2\lambda_{\eta}^{\alpha} b^{\eta\eta} + \lambda_{\rho}^{\rho} b^{\alpha\gamma} - \lambda_{\epsilon}^{\epsilon} b_{\rho}^{\epsilon} a^{\alpha\gamma} - 2b_{\rho}^{\rho} \lambda^{\alpha\gamma} - 2b_{\rho}^{\rho} \lambda_{\epsilon}^{\epsilon} a^{\alpha\gamma})].$$

Podstawiając (5.17) do wzorów (2.11), definiujących siły wewnętrzne, otrzymujemy

$$(5.18) \quad N^{\alpha\gamma} = (\lambda^{\alpha\gamma} + \lambda_{\rho}^{\rho} a^{\alpha\gamma}) I_1 + (\kappa^{(\alpha\gamma)} + \kappa_{\rho}^{\rho} a^{\alpha\gamma} + 2\lambda_{\eta}^{\alpha} b^{\eta\eta} + \\ + \lambda_{\rho}^{\rho} b^{\alpha\gamma} - 2\lambda_{\epsilon}^{\epsilon} b_{\rho}^{\epsilon} a^{\alpha\gamma} - 2b_{\rho}^{\rho} \lambda^{\alpha\gamma} - 2b_{\rho}^{\rho} \lambda_{\epsilon}^{\epsilon} a^{\alpha\gamma}) I_2,$$

$$(5.19) \quad M^{\alpha\gamma} = (\lambda^{\alpha\gamma} + \lambda_{\rho}^{\rho} a^{\alpha\gamma}) I_2 + (\kappa^{(\alpha\gamma)} + \kappa_{\rho}^{\rho} a^{\alpha\gamma} + 2\lambda_{\eta}^{\alpha} b^{\eta\eta} + \\ + \lambda_{\rho}^{\rho} b^{\alpha\gamma} - 2\lambda_{\epsilon}^{\epsilon} b_{\rho}^{\epsilon} a^{\alpha\gamma} - 2b_{\rho}^{\rho} \lambda^{\alpha\gamma} - 2b_{\rho}^{\rho} \lambda_{\epsilon}^{\epsilon} a^{\alpha\gamma}) I_3,$$

gdzie

$$(5.20) \quad I_i = \frac{1}{3} \int_{-H}^H \frac{(x^3)^{i-1}}{\nu\mu} dx^3, \quad i=1, 2, 3.$$

Różnice w porównaniu z (5.9) i (5.10) są widoczne. Otrzymane wielkości nie są symetryczne, gdyż tensory $\lambda^{\alpha\beta}$ i $\lambda_{\rho}^{\rho} b^{\rho\gamma}$ są niesymetryczne. Osiem składowych sił wewnętrznych przedstawionych jest więc w zależności od siedmiu parametrów. Obliczając składowe mieszane (lub składowe fizyczne) i eliminując parametry otrzymamy równanie powierzchni granicznej, do którego w wyraźny sposób wchodzi krzywizna powłoki [7].

6. Przypadki szczególne

Wprowadzone definicje miar odkształcenia i sił wewnętrznych wyspecyfikujemy dla najważniejszych przypadków geometrii powłok. Zestawimy też komplet wzorów napisanych w składowych fizycznych odpowiednich tensorów.

a. *Powłoka walcowa.* W układzie współrzędnych walcowych $\{x, r, \varphi\}$ nieznikające składowe pierwszej i drugiej form podstawowych powierzchni cylindrycznej kołowej są następujące:

$$(6.1) \quad a_{xx} = 1, \quad a^{xx} = 1, \quad a_{\varphi\varphi} = R^2, \quad a^{\varphi\varphi} = \frac{1}{R^2}, \\ b_{\varphi\varphi} = -R, \quad b_{\varphi}^{\varphi} = -\frac{1}{R}.$$

Ponieważ symbole Christoffela II rodzaju znikają w tym przypadku, przeto mamy

$$(6.2) \quad u_{\alpha|\beta} = u_{\alpha, \beta}.$$

Składowe tensorów prędkości odkształceń i prędkości zmiany krzywizn (3.20) przyjmują postać

$$(6.3) \quad \bar{\lambda}_{xx} = u_{x, x}, \quad \bar{\lambda}_{\varphi\varphi} = u_{\varphi, \varphi} + R\omega, \quad \bar{\lambda}_{xy} = \bar{\lambda}_{\varphi x} = 0, \\ \bar{\kappa}_{xx} = -\omega_{, xx}, \quad \bar{\kappa}_{\varphi\varphi} = -\omega_{, \varphi\varphi} + \frac{2}{R} u_{\varphi, \varphi} + \omega, \quad \bar{\kappa}_{x\varphi} = \bar{\kappa}_{\varphi x} = -\omega_{, \varphi x} - \frac{1}{R} u_{\varphi, x}.$$

Dla przypadku obrotowo-symetrycznego odkształcenia powłoki otrzymujemy następujące składowe fizyczne tensorów (3.20):

$$(6.4) \quad \lambda_{xx} = u_{x,x}, \quad \lambda_{\varphi\varphi} = \frac{w}{R}, \quad \lambda_{\varphi x} = \lambda_{x\varphi} = 0.$$

$$K_{xx} = -w_{,xx}, \quad K_{\varphi\varphi} = \frac{w}{R^2}, \quad K_{xy} = K_{\varphi x} = 0.$$

podczas gdy analogiczne fizyczne składowe otrzymane przy założeniach Kirchhoffa-Love'a mają postać (1)

$$(6.5) \quad \lambda_{xx} = u_{x,x}, \quad \lambda_{\varphi\varphi} = \frac{w}{R}, \quad \lambda_{\varphi x} = \lambda_{x\varphi} = 0,$$

$$K_{\varphi\varphi} = -w_{,xx}, \quad K_{\varphi\varphi} = 0, \quad K_{x\varphi} = K_{\varphi x} = 0.$$

Otrzymane związki (6.4) różnią się od (6.5) jedynie wyrażeniem na krzywiznę $K_{\varphi\varphi}$. Wyraz w/R^2 pojawia się w (6.4) w rezultacie symetryzacji związku (3.15). Może on mieć istotne znaczenie jedynie w przypadku powłok silnie zakrzywionych, gdy wielkość H/R nie jest pomijalnie mała w porównaniu z jednością.

Siły wewnętrzne (3.18), wchodzące do trzech równań równowagi (4.8) i (4.9), są następujące:

$$(6.6) \quad \bar{N}^{xx} = N^{xx} - M^{\varphi\varphi} R, \quad \bar{N}^{x\varphi} = N^{x\varphi} - \frac{1}{R} M^{\varphi\varphi}, \quad \bar{N}^{\varphi x} = N^{\varphi x}, \quad \bar{N}^{\varphi\varphi} = N^{\varphi\varphi} - \frac{2}{R} M^{\varphi\varphi},$$

$$\bar{M}^{xx} = M^{xx}, \quad \bar{M}^{x\varphi} = \frac{1}{2} (M^{x\varphi} + M^{\varphi x}) = 0, \quad \bar{M}^{\varphi\varphi} = M^{\varphi\varphi},$$

natomiast składowe fizyczne przyjmują postać

$$(6.7) \quad \bar{N}^{xx} = N^{xx} - \frac{1}{R} M^{\varphi\varphi}, \quad \bar{N}^{\varphi x} = N^{\varphi x}, \quad \bar{N}^{x\varphi} = N^{x\varphi} - \frac{1}{R} M^{\varphi\varphi}, \quad \bar{N}^{\varphi\varphi} = N^{\varphi\varphi} - \frac{2}{R} M^{\varphi\varphi},$$

$$\bar{M}^{xx} = M^{xx}, \quad \bar{M}^{x\varphi} = \frac{1}{2} (M^{x\varphi} + M^{\varphi x}) = 0, \quad \bar{M}^{\varphi\varphi} = M^{\varphi\varphi}$$

podczas gdy analogiczne składowe klasycznej teorii (NAGHDI [1]) są następujące:

$$(6.8) \quad \tilde{N}^{xx} = N^{xx}, \quad \tilde{N}^{xy} = N^{x\varphi} - \frac{1}{R} M^{\varphi\varphi}, \quad \tilde{N}^{\varphi x} = N^{\varphi x}, \quad \tilde{N}^{\varphi\varphi} = N^{\varphi\varphi} - \frac{1}{R} M^{\varphi\varphi},$$

$$\tilde{M}^{xx} = M^{xx}, \quad \tilde{M}^{x\varphi} = M^{(x\varphi)}, \quad \tilde{M}^{\varphi\varphi} = M^{\varphi\varphi}.$$

Równanie powierzchni granicznej (5.1) w przypadku powłok «silnie» zakrzywionych, tzn. gdy spełniony jest związek (5.17), jest określone równaniami (5.18)–(5.20). Dla przypadku obrotowo-symetrycznej deformacji powłoki walcowej para-

(1) Te same oznaczenia zachowano dla składowych fizycznych tensorów.

metryczna postać tej powierzchni przedstawia się następująco:

$$(6.9) \quad \begin{aligned} N_x^x &= \\ M_x^x &= \end{aligned} \left(2\lambda_x^x + \lambda_\varphi^\varphi \right) \left\{ \begin{array}{l} I_1 \\ I_2 \end{array} \right\} + \left[2\kappa_x^x + \kappa_\varphi^\varphi + \frac{4}{R} (\lambda_\varphi^\varphi + \lambda_x^x) \right] \left\{ \begin{array}{l} I_2 \\ I_3 \end{array} \right\},$$

$$(6.10) \quad \begin{aligned} N_\varphi^\varphi &= \\ M_\varphi^\varphi &= \end{aligned} \left(2\lambda_\varphi^\varphi + \lambda_x^x \right) \left\{ \begin{array}{l} I_1 \\ I_2 \end{array} \right\} + \left[2\kappa_\varphi^\varphi + \kappa_x^x + \frac{1}{R} (3\lambda_\varphi^\varphi + \lambda_x^x) \right] \left\{ \begin{array}{l} I_2 \\ I_3 \end{array} \right\},$$

gdzie I_1 , I_2 i I_3 są zdefiniowane przez (5.20). W porównaniu ze związkami teorii Kirchhoffa-Love'a [9] różnice występują przez pojawienie się wyrazów zawierających R oraz przez zastąpienie wyrażen (5.11) przez (5.20).

b. *Powłoka kulista*. W sferycznym układzie współrzędnych $\{\varphi, \theta, r\}$ nie znikające składowe form podstawowych są następujące:

$$(6.11) \quad \begin{aligned} a_{\theta\theta} &= R^2, & a^{\theta\theta} &= \frac{1}{R^2}, & a_{\varphi\varphi} &= R^2 \sin^2 \theta, & a^{\varphi\varphi} &= \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta}, \\ b_{\theta\theta} &= -R, & b_{\varphi\varphi} &= -R \sin^2 \theta, & b_\theta^\theta &= b_\varphi^\varphi = -\frac{1}{R}. \end{aligned}$$

Składowe tensorów (3.20) przyjmują postać

$$(6.12) \quad \begin{aligned} \bar{\lambda}_{\theta\theta} &= u_{\theta, \theta} + R w, \\ \bar{\lambda}_{\varphi\varphi} &= u_{\varphi, \varphi} + u_\theta \sin \theta \cos \theta + R w \sin^2 \theta, \\ \bar{\lambda}_{\theta\varphi} &= \bar{\lambda}_{\varphi\theta} = u_{\theta, \varphi} - u_\varphi \operatorname{ctg} \theta, \\ \bar{\kappa}_{\theta\theta} &= -w_{, \theta\theta} + \frac{2}{R} u_{\theta, \theta} + w, \\ \bar{\kappa}_{\varphi\varphi} &= -w_{, \varphi\varphi} - w_{, \theta} \sin \theta \cos \theta + \frac{2}{R} u_{\varphi, \varphi} + \frac{2}{R} u_\theta \sin \theta \cos \theta + w \sin^2 \theta, \\ \bar{\kappa}_{\varphi\theta} &= \bar{\kappa}_{\theta\varphi} = -w_{, \theta\varphi} + \frac{1}{R} u_{(\theta, \varphi)} - \frac{1}{R} u_\varphi \operatorname{ctg} \theta. \end{aligned}$$

Dla przypadku obrotowo-symetrycznego odkształcenia składowe fizyczne wielkości (6.12) są następujące:

$$(6.13) \quad \begin{aligned} \lambda_{\theta\theta} &= \frac{1}{R} u_{\theta, \theta} + \frac{1}{R} w, \\ \lambda_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{R} u_\theta \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{R} w, \\ \kappa_{\theta\theta} &= -\frac{1}{R^2} w_{, \theta\theta} + \frac{1}{R^2} u_{\theta, \theta} + \left(\frac{1}{R^2} u_{\theta, \theta} + \frac{1}{R^2} w \right), \\ \kappa_{\varphi\varphi} &= -\frac{1}{R^2} (w_{, \theta} - u_\theta) \operatorname{ctg} \theta + \left(\frac{1}{R^2} u_\theta \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{R^2} w \right); \end{aligned}$$

analogiczne związki otrzymane przy założeniach Love'a-Kirchhoffa mają postać

$$(6.14) \quad \begin{aligned} \lambda_{\theta\theta} &= \frac{1}{R} u_{\theta, \theta} + \frac{1}{R} w, & \lambda_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{R} u_{\theta} \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{R} w, \\ \kappa_{\theta\theta} &= -\frac{1}{R^2} w_{, \theta\theta} + \frac{1}{R^2} u_{\theta, \theta}, & \kappa_{\varphi\varphi} &= -\frac{1}{R^2} (w_{, \theta} - u_{\theta}) \operatorname{ctg} \theta. \end{aligned}$$

Jak widać, powyższe dwa układy równań różnią się postacią $\kappa_{\varphi\varphi}$ i $\kappa_{\theta\theta}$. W (6.13) wyrazy w nawiasach pojawiają się w wyniku symetryzacji i są rzędu H/R w stosunku do jedności.

Siły wewnętrzne w powłoce (3.18), symetryczne stosownie do (3.20), są następujące:

$$(6.15) \quad \begin{aligned} \bar{N}^{\varphi\varphi} &= N^{\varphi\varphi} - \frac{2}{R} M^{\varphi\varphi} - \frac{M^{\theta\theta}}{R \sin^2 \theta}, \\ \bar{N}^{\theta\theta} &= N^{\theta\theta} - \frac{2}{R} M^{\theta\theta} - \frac{M^{\varphi\varphi}}{R} \sin^2 \theta, \\ \bar{N}^{\theta\varphi} &= N^{\theta\varphi} - \frac{1}{R} M^{\theta\varphi}, & \bar{N}^{\varphi\theta} &= N^{\varphi\theta} - \frac{1}{R} M^{\varphi\theta}, \\ \bar{M}^{\varphi\varphi} &= M^{\varphi\varphi}, & \bar{M}^{\theta\theta} &= M^{\theta\theta}, & \bar{M}^{\varphi\theta} &= \bar{M}^{\theta\varphi} = \frac{1}{2} (M^{\varphi\theta} + M^{\theta\varphi}). \end{aligned}$$

Składowe fizyczne tych wielkości określają następujące zależności

$$(6.16) \quad \begin{aligned} \bar{N}^{\varphi\varphi} &= N^{\varphi\varphi} - \frac{2}{R} M^{\varphi\varphi} - \frac{1}{R} M^{\theta\theta}, \\ \bar{N}^{\theta\theta} &= N^{\theta\theta} - \frac{2}{R} M^{\theta\theta} - \frac{1}{R} M^{\varphi\varphi}, \\ \bar{N}^{\varphi\theta} &= N^{\varphi\theta} - \frac{1}{R} M^{\varphi\theta}, & \bar{N}^{\theta\varphi} &= N^{\theta\varphi} - \frac{1}{R} M^{\theta\varphi}, \\ \bar{M}^{\varphi\varphi} &= M^{\varphi\varphi}, & \bar{M}^{\theta\theta} &= M^{\theta\theta}, \\ \bar{M}^{\varphi\theta} &= \bar{M}^{\theta\varphi} = \frac{1}{2} (M^{\varphi\theta} + M^{\theta\varphi}). \end{aligned}$$

Analogiczne składowe sił wewnętrznych, stosowane np. przez NAGHDIEGO [1] [wzór (5.35)], wynoszą:

$$(6.17) \quad \begin{aligned} \tilde{N}^{\varphi\varphi} &= N^{\varphi\varphi} - \frac{1}{R} M^{\varphi\varphi}, & \tilde{N}^{\theta\theta} &= N^{\theta\theta} - \frac{1}{R} M^{\theta\theta}, \\ \tilde{N}^{\varphi\theta} &= N^{\varphi\theta} - \frac{1}{R} M^{\varphi\theta}, & \tilde{N}^{\theta\varphi} &= N^{\theta\varphi} - \frac{1}{R} M^{\theta\varphi}, \\ \tilde{M}^{\varphi\varphi} &= M^{\varphi\varphi}, & \tilde{M}^{\theta\theta} &= M^{\theta\theta}, \\ \tilde{M}^{\theta\varphi} &= \tilde{M}^{\varphi\theta} = M^{(\varphi\theta)}. \end{aligned}$$

Zestawienie zależności (6.16) i (6.17) podobnie jak i (6.7) oraz (6.8) wskazuje, jakie są konsekwencje uwzględnienia w związkach teorii powłok warunku nieściśliwości.

Literatura cytowana w tekście

1. P. M. NAGHDI, *Foundations of elastic shell theory*, Progress in Solid Mechanics, 4, North Holland, Amsterdam 1963, 1–90.
2. W. T. KOITER, *On the nonlinear theory of thin elastic shells*, Proc. Kon. Ned. Ak. Wet., B69 (1966), 1–54.
3. J. L. SANDERS, *Nonlinear theories for thin shells*, Quart. Appl. Math., 21 (1963), 21–36.
4. CZ. WOŹNIAK, *Nieliniowa teoria powłok*, PWN, Warszawa 1966.
5. W. T. KOITER, *Foundations and basic equations of shell theory. A survey of recent progress*, Proc. 2nd IUTAM Shell Symp. Copenhagen 1967. *Theory of thin shells*, Springer, Berlin 1969, 93–105.
6. W. PRAGER, *The general theory of limit design*, Proc. 8th Int. Congr. Appl. Mech., Istanbul 1952, 2 (1956), 65–72.
7. А. А. Ильюшин, *Пластичность*, Гостехиздат, Москва 1948.
8. J. RYCHLEWSKI, *К общей теории идеально-пластических оболочек*, Труды VI Всесоюзн. конф. теории пластин и оболочек, Баку 1966, Наука, Москва 1966, 873–880.
9. A. SAWCZUK, J. RYCHLEWSKI, *On yield surfaces for plastic shells*, Arch. Mech. Stos., 12 (1960), 29–53.

Резюме

ОБ ОСНОВНЫХ ЗАВИСИМОСТЯХ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

В работе обсуждаются зависимости теории пластических оболочек из несжимаемого материала. Представленные положения теории, отдаляющиеся от классических предположений Кирхгофа-Лява, благодаря оценке порядка величины отдельных членов в выражении для скорости дисперсии энергии, получена соответствующая система сил и скоростей деформаций. Дается система уравнений равновесия и краевых условий, а также представлены основы определения уравнений поверхностей текучести.

Summary

ON THE BASIS RELATIONSHIPS OF THE THEORY OF PLASTIC SHELLS

This paper presents a discussion of the relationships of the theory of plastic shells made of incompressible material. Given are the assumptions of the theory departing from the classic assumptions of Kirchhoff-Love, and by means of estimation of the order of magnitude of the particular terms in the expression for velocity and energy dissipation, the corresponding set of forces and velocities of deformations are obtained. The set of equilibrium equations and the boundary conditions are given, together with the principles of determining the equations of the yield surfaces.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca została złożona w Redakcji dnia 26 maja 1970 r.