

PLASTYCZNE SKRĘCANIE PRĘTÓW KOŁOWO-ZAKRZYWIONYCH O DOWOLNEJ
NIEJEDNORODNOŚCI POPRZECZNEJ

MARIAN GALOS i MICHAŁ ŻYCZKOWSKI (KRAKÓW)

1. Wstęp

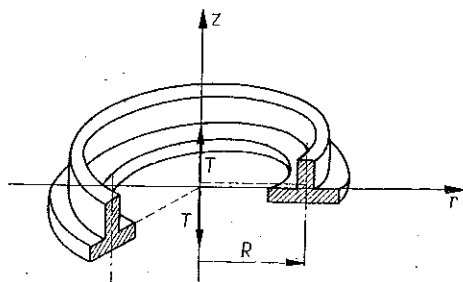
Problemem sprężystego skręcania wycinka pierścienia kołowego zajmowali się V. ROEVER [10] i M. PILGRAM [9], którzy w r. 1913 podali elementarną teorię skręcania takiego wycinka. W r. 1930 O. GÖHNER [6 - 8] zastosował do rozwiązania tego problemu ogólne równania teorii sprężystości we współrzędnych walcowych, co pozwoliło (przy uwzględnieniu zasady de St. VENANTA) na otrzymanie ścisłych równań. Rozwiązanie problemu sprowadza się mianowicie do znalezienia dwu składowych stanu naprężenia $\tau_{\theta r}$ i $\tau_{\theta z}$, jeżeli problem jest rozwiązywany w układzie walcowym r, θ, z . Zagadnienie plastycznego skręcania wycinka pierścienia kołowego wykonanego z materiału jednorodnego rozważali A. J. WANG, W. PRAGER [17], W. FREIBERGER, W. PRAGER [2], W. FREIBERGER [3] oraz A. M. WAHL [16]. Podali oni równanie charakterystyk problemu oraz rozwiązali kilka przykładów. Przykłady rozwiązano przybliżonymi metodami graficzno-analitycznymi. Rozwiązaniem sprężysto-plastycznego skręcania prętów kołowo-zakrzywionych zajmowali się W. FREIBERGER [1] i W. W. SOKOŁOWSKI [15], którzy rozwiązali kilka przykładów. Np. W. W. SOKOŁOWSKI zastosował do rozwiązania podaną przez siebie w [13] metodę odwrotną.

W pracy obecnej zajęto się głównie zagadnieniem plastycznego skręcania prętów kołowo-zakrzywionych o dowolnej niejednorodności poprzecznej. Stwierdzono mianowicie analogię matematyczną, jaka zachodzi pomiędzy tym przypadkiem wytrzymałościowym a przypadkiem plastycznego skręcania prętów przyrównanych o dowolnej niejednorodności poprzecznej, rozpatrzonym przez M. GALOSA w pracy [4]. Wobec tego, podobnie jak w [4], problem rozwiązano przez wprowadzenie funkcji naprężeń Φ , która tożsamościowo spełnia warunek równowagi. Zajęto się mianowicie określeniem linii największego spadku funkcji naprężeń (a ściślej mówiąc rzutów tych linii na płaszczyznę przekroju). Przy znajomości linii największego spadku funkcji naprężeń Φ można było określić wartości samej funkcji Φ wzdłuż takiej linii, rozkład naprężeń i nośność graniczną przekroju. Pracę zilustrowano przykładami obrazującymi metody rozwiązywania zagadnienia.

2. Równania podstawowe

Przez pręt zakrzywiony, poddany działaniu skręcania, rozumiemy będziemy w dalszych rozważaniach pręt o stałym promieniu krzywizny R , obciążony jak na rys. 1. W istocie pręt taki jest poddany skręcaniu z jednoczesnym ścinaniem bez zginania.

Przy rozpatrywaniu problemu sprężystego skręcania prętów zakrzywionych wykazano, że ze wszystkich składowych stanu naprężeń tylko dwie składowe $\tau_{\theta r}$,



Rys. 1

$\tau_{\theta z}$ są różne od zera. Przy rozwiązywaniu problemu sprężysto-plastycznego czy też czysto plastycznego tych prętów, wykonanych z materiałów jednorodnych lub niejednorodnych plastycznie (niejednorodność zależna od współrzędnych r, z w stosowanym tutaj układzie współrzędnych r, θ, z) prawidłowość ta pozostaje aktualna. Wobec powyższego problem plastycznego skręcania prętów zakrzywionych będzie się sprowadzał do rozwiązania układu dwu równań o niewiadomych $\tau_{\theta r}$ i $\tau_{\theta z}$, mianowicie równanie równowagi:

$$(2.1) \quad \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{\theta r}}{r} = 0$$

i warunku plastyczności

$$(2.2) \quad \tau_{\theta r}^2 + \tau_{\theta z}^2 = k^2(r, z)$$

przy odpowiednich, naprężeniowych warunkach brzegowych.

Jeżeli do rozważań wprowadzimy dalej funkcję naprężeń $\Phi(r, z)$ taką, że

$$(2.3) \quad \tau_{\theta r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad \tau_{\theta z} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r},$$

to układ równań (2.1) i (2.2) sprowadzi się do jednego równania o niewiadomej funkcji Φ :

$$(2.4) \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 = r^4 k^2(r, z) = \tilde{k}^2(r, z),$$

co można napisać także w postaci

$$(2.5) \quad |\text{grad } \Phi| = \tilde{k}(r, z).$$

Równanie to jest identyczne z równaniem rozwiązującym problem plastycznego skręcania pryzmatycznych prętów o dowolnej niejedności poprzecznej, który to problem był dokładnie rozpatrzony w pracy M. GALOSA [4]. Wobec tej stwierdzonej analogii można wprowadzić pojęcie linii największego spadku funkcji naprężeń Φ (tak w dalszych rozważaniach nazywać będziemy krótko rzuty tych linii na płaszczyznę przekroju pręta) podobnie, jak w pracy [4]. Ponadto, jak wynika z zestawienia podstawowych równań obecnej pracy i pracy W. W. SOKOŁOWSKIEGO [14], w przypadku jednorodności materiału występuje pewna analogia hydrodynamiczna, jednak w obecnej pracy nie będziemy z niej korzystali.

Równanie różniczkowe linii największego spadku, wykorzystując wyniki pracy [4], można napisać w postaci

$$(2.6) \quad z' \frac{\partial \bar{k}}{\partial r} - \frac{\partial \bar{k}}{\partial z} = - \frac{z'' \bar{k}}{1+z'^2},$$

gdzie $\bar{k}(r, z) = r^2 k(r, z)$ nazywać będziemy dalej niejednorodnością zastępczą.

Rozwiązanie równania (2.6) w sposób ścisły w większości przypadków niejednorodności jest niemożliwe, dlatego należy w tym celu stosować metody przybliżone, np. metodę szeregów potęgowych.

W przypadku, gdy niejednorodność zastępcza materiału zależna jest tylko od zmiennej r , równanie ulegnie uproszczeniu do postaci

$$(2.7) \quad z' \frac{\partial \bar{k}}{\partial r} = - \frac{z'' \bar{k}}{1+z'^2}.$$

Dla tego przypadku niejednorodności równanie linii największego spadku określa funkcja

$$(2.8) \quad z = \pm \int \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{\bar{k}^2 - D}} dr + C,$$

gdzie C i D są stałymi całkowania.

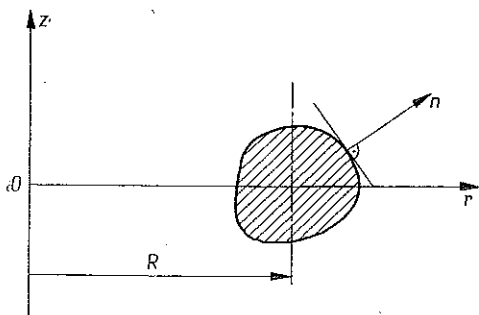
Znając równanie linii największego spadku funkcji naprężeń Φ w postaci całki ogólnej, możemy przy znanych warunkach brzegowych określić funkcję naprężeń Φ , a następnie rozkład naprężeń i nośność graniczną (tzn. siłę tnącą T lub związany z nią moment M , $\bar{M} = \bar{T}R$).

3. Warunki brzegowe

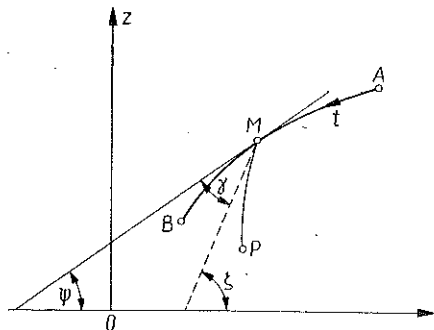
W niniejszym rozdziale zajmiemy się warunkami brzegowymi, niezbędnymi do określenia całek szczególnych linii największego spadku, oraz funkcji naprężeń Φ . Warunki brzegowe dotyczyć będą powierzchni bocznej pręta; na denkach pręta zakładamy taki rozkład naprężeń, jaki wynika z rozwiązania problemu.

Dla pręta o nieobciążonej powierzchni bocznej (rys. 2) warunki brzegowe przedstawić można w formie $p_{nr} = p_{n0} = p_{nz} = 0$. Z równości $p_{n0} = 0$, z zależności (2.3) oraz prostych zależności geometrycznych wynika, że dla nieobciążonej powierzchni bocznej pręta funkcja naprężeń $\Phi = \text{const}$. W przypadku przekrojów jednospójnych

przyjmuje się na ogół dla prostoty $\Phi=0$, a dla przekrojów wielospójnych $\Phi=0$ na konturnie zewnętrznej oraz $\Phi=\text{const} \neq 0$ (które nie jest już dowolne) na konturnie wewnętrznej.



Rys. 2



Rys. 3

Jakkolwiek mamy do czynienia z reguły z nieobciążoną powierzchnią boczną pręta, zanalizujemy przypadek ogólny, gdy funkcja naprężeń Φ jest dana i zmienia się na pewnym odcinku AB konturu pręta (rys. 3). Taki przypadek będzie występował, gdy rozpatrywać będziemy ciała skokowo niejednorodne.

Niechaj na odcinku AB konturu przekroju dana jest funkcja naprężeń $\Phi = \Phi(t)$, przy czym t jest parametrem konturu. Z analizy wektorowej wynika, że

$$(3.1) \quad \frac{d\Phi}{dt} = |\text{grad } \Phi| \cos \gamma = \bar{k}(r, z) \cos \gamma,$$

gdzie kąt γ jest kątem zawartym pomiędzy kierunkiem stycznym do konturu a kierunkiem, wzdłuż którego funkcja Φ ma największy spadek (kierunek styczny do danej linii największego spadku). Z powyższego równania łatwo można określić kąt pomiędzy linią największego spadku, a styczną do konturu w danym punkcie M :

$$(3.2) \quad \cos \gamma = \left[\frac{\frac{d\Phi}{dt}}{|\text{grad } \Phi|} \right]_M$$

Jeżeli dany jest kształt konturu przekroju, np. w formie parametrycznej $r=r_1(t)$, $z=z_1(t)$, to współczynnik kierunkowy linii największego spadku w danym punkcie M konturu można określić wzorem

$$(3.3) \quad z'_M = \text{tg } \beta_M = \left[\frac{\frac{d\Phi}{dt} \frac{dz_1}{dt} + \frac{dr_1}{dt} \sqrt{\bar{k}^2(r, z) - \left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2}}{\frac{d\Phi}{dt} \frac{dr_1}{dt} - \frac{dz_1}{dt} \sqrt{\bar{k}^2(r, z) - \left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2}} \right]_M$$

Warunki brzegowe dla linii największego spadku dla przypadku ogólnego będzie można, wobec powyższej zależności, napisać w postaci:

$$(3.4) \quad \text{dla } t=t_M: \quad r=r_M, \quad z=z_M, \quad z'=z'_M.$$

Dla powierzchni bocznej nieobciążonej, tzn. gdy $\Phi = \text{const}$ na konturze, warunki powyższe ulegną uproszczeniu:

$$(3.5) \quad \text{dla } t = t_M: \quad r = r_M, \quad z = z_M,$$

$$z' = z'_M = - \left[\begin{array}{c} \frac{dr_1}{dt} \\ \frac{dz_1}{dt} \end{array} \right]_M,$$

co jest warunkiem prostopadłości linii największego spadku do nieobciążonego konturu przekroju pręta zakrzywionego.

Powyżej sprecyzowane warunki brzegowe pozwalają określić dwie stałe całkowania linii największego spadku funkcji naprężeń Φ .

4. Określenie funkcji naprężeń

Dzięki analogii matematycznej, jaka zachodzi pomiędzy rozważanym problemem a problemem plastycznego skręcania prętów pryzmatycznych, plastycznie niejednorodnych, określenie funkcji naprężeń Φ jest takie samo jak w tamtym problemie (praca M. GALOSA [4]). Będziemy mianowicie podobnie jak w pracy [4] korzystać z krzywoliniowego układu współrzędnych s, l . Jedna rodzina krzywych współrzędnych $l = \text{const}$ przedstawia linie największego spadku, natomiast druga rodzina krzywych $s = \text{const}$ — dowolne krzywe, przecinające pod pewnymi kątami (niekoniecznie prostymi) linie największego spadku. Rodzinę krzywych $s = \text{const}$ dobieramy indywidualnie dla każdego zadania w ten sposób, aby rozwiązanie można przeprowadzić w najprostszym sposobie. Wprowadzony tak układ współrzędnych musi jednoznacznie opisywać daną część przekroju pręta.

Jeżeli znane będą linie największego spadku funkcji Φ w postaci

$$(4.1) \quad r = r(s, l), \quad z = z(s, l),$$

to z równania (2.5) można określić wartości funkcji Φ w poszczególnych punktach P linii największego spadku. W tym celu należy przekształcić równanie (2.5) do równania

$$(4.2) \quad \left| \frac{d\Phi}{dm} \right| = \tilde{k}(r, z),$$

gdzie dm jest elementarną długością linii największego spadku, którą można określić znanym wzorem

$$(4.3) \quad dm = \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2} ds,$$

(linia największego spadku to linia $l = \text{const}$).

Korzystając z zależności (4.1), możemy funkcję zastępczej niejednorodności materiału przedstawić w formie $\tilde{k}(s, l)$ (zamiast $\tilde{k}(r, z)$). Gdy dana jest wartość

funkcji Φ w punkcie M (z warunków brzegowych lub ciągłości), to interesującą nas wartość funkcji Φ w punkcie P , leżącym na tej samej linii największego spadku, można określić całkując wyrażenie (4.2) (rys. 3):

$$(4.4) \quad \Phi(P) = \Phi(M) + \int_M^P \tilde{k}(s, l) dm.$$

Wzór ten w przypadku, gdy punkt M leży na nieobciążonym konturze zewnętrznym (gdzie przyjmujemy $\Phi(M) = 0$), upraszcza się do postaci

$$(4.5) \quad \Phi(P) = \int_M^P \tilde{k}(s, l) dm.$$

Dla materiału jednorodnego $\tilde{k} = k_0 r^2$ można określić, wykonując całkowania (2.8) i (4.5),

$$(4.6) \quad \Phi(P) = k_0 \left\{ \frac{b^3}{3\sqrt{2}} [F(\varepsilon_1, p) - F(\varepsilon_2, p)] + \frac{r}{3} \sqrt{r^4 - D} - \frac{r_M}{3} \sqrt{r_M^4 - D} \right\},$$

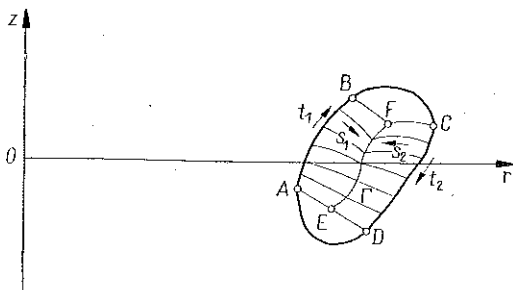
gdzie $b = \sqrt[4]{D}$ jest stałą wynikłą z warunków brzegowych w punkcie M ,

$$p = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \varepsilon = \arccos \frac{b}{r}.$$

5. Inne nieciągłości naprężeń

Przy plastycznym skręcaniu niejednorodnych prętów zakrzywionych, podobnie jak w przypadku plastycznego skręcania niejednorodnych prętów pryzmatycznych, możemy mieć do czynienia z dwoma rodzajami linii nieciągłości naprężeń:

- linie nieciągłości wynikłe z charakteru równania różniczkowego (2.4),
- linie nieciągłości wynikłe ze skokowej niejednorodności materiału (skok wartości funkcji niejednorodności $\tilde{k}(r, z)$ lub jej pochodnych).



Rys. 4

Jeżeli w pewnym obszarze przekroju pręta występować będzie linia nieciągłości typu a), to można ją określić po znalezieniu linii największego spadku i wartości funkcji naprężeń Φ w podobszarach po obu stronach linii nieciągłości.

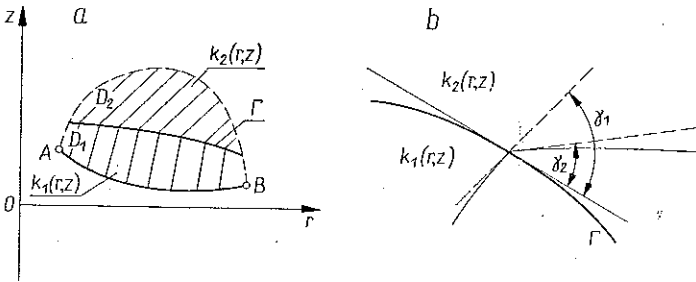
Założmy, że mamy do czynienia z obszarem jednorodnym, jak na rys. 4, przy czym w całym rozpatrywanym obszarze funkcja niejednorodności jest klasy C^1 . Wykorzystując rozważania rozdziałów poprzednich możemy określić linie największego spadku oraz wartości funkcji naprężeń w obu rozważanych podobszarach (w podobszarze $ABFE$ linię największego spadku oznaczymy jako $r_1 = r_1(s_1, l_1)$, $z_1 = z_1(s_1, l_1)$, natomiast funkcję naprężeń jako $\Phi_1 = \Phi_1(s_1, l_1)$; w podobszarze $CDEF$ odpowiednio $r_2 = r_2(s_2, l_2)$, $z_2 = z_2(s_2, l_2)$ i $\Phi_2 = \Phi_2(s_2, l_2)$. Z analogii pomiędzy rozpatrywanym problemem a problemem plastycznego skręcania niejednorodnych prętów pryzmatycznych wynika, że linie nieciągłości naprężeń można określić, rozwiązując następujący układ równań:

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \Phi_1(s_1, l_1) &= \Phi_2(s_2, l_2), \\ r_1(s_1, l_1) &= r_2(s_2, l_2), \\ z_1(s_1, l_1) &= z_2(s_2, l_2). \end{aligned}$$

Po rozwiązaniu powyższego układu równań linię nieciągłości EF można określić równaniem parametrycznym, przy czym parametrem może być jedna ze współrzędnych s_1, s_2, l_1, l_2 ; np.:

$$(5.2) \quad r_n = r_n(l_1), \quad z_n = z_n(l_1),$$

a na tej podstawie można określić interesujące nas inne wielkości na linii nieciągłości, np. Φ_n .



Rys. 5

Jeżeli mamy do czynienia z liniami nieciągłości naprężeń typu b), wynikłymi z nieciągłości zastępczej funkcji niejednorodności lub jej pochodnych (rys. 5a), to zadanie w najprostszym przypadku będzie się sprowadzało do określenia zmiany współczynnika kierunkowego linii największego spadku na danej linii nieciągłości naprężeń. Gdy na linii nieciągłości Γ zachodzi

$$(5.3) \quad \tilde{k}_1(r, z) = \tilde{k}_2(r, z), \quad \frac{\partial \tilde{k}_1}{\partial r} \neq \frac{\partial \tilde{k}_2}{\partial r}, \quad \frac{\partial \tilde{k}_1}{\partial z} \neq \frac{\partial \tilde{k}_2}{\partial z},$$

to z analogii matematycznej, zachodzącej pomiędzy rozważanym problemem a problemem plastycznego skręcania niejednorodnych prętów pryzmatycznych, wynika, że w rozpatrywanym punkcie M linii nieciągłości Γ zachodzi (rys. 5b)

$$(5.4) \quad z'_1 = z'_2, \quad \text{tzn. } \gamma_1 = \gamma_2.$$

W przypadku, gdy na linii Γ mamy

$$(5.5) \quad \tilde{k}_1 \neq \tilde{k}_2,$$

to zmianę kierunku linii największego spadku w punkcie M rozważanej linii nieciągłości można określić wzorem

$$(5.6) \quad \cos \gamma_2 = \frac{\tilde{k}_1(r, z)}{\tilde{k}_2(r, z)} \cos \gamma_1.$$

Zależność ta pozwala przy znajomości linii największego spadku w podobzarze I określić stałe całkowania dla linii największego spadku, przechodzącej przez punkt M i podobzar II. Bardziej skomplikowane przypadki, dzięki wspomnianej analogii matematycznej, można oprzeć na pracach J. RYCHLEWSKIEGO [11 i 12], które dotyczą plastycznego skręcania pryzmatycznych prętów o skokowej niejednorodności.

6. Określenie nośności granicznej

Po określeniu linii nieciągłości, linii największego spadku oraz funkcji naprężeń Φ w całym rozważanym obszarze przekroju pręta można przejść do określenia nośności granicznej pręta (tzn. albo momentu \bar{M} albo związanej z nim siły \bar{T}).

Elementarnym momentem $d\bar{M}$, pochodzącym od naprężeń działających na elementarną powierzchnię dF , będzie

$$(6.1) \quad d\bar{M} = [\tau_{\theta z}(r-R) - \tau_{\theta r} z] dF,$$

przy czym R jest odległością środka ciężkości przekroju od osi z .

Jeżeli zamiast składowych stanu naprężenia $\tau_{\theta z}$ i $\tau_{\theta r}$ we wzorze (6.1) podstawimy związki (2.3), to po odpowiednich przekształceniach otrzymamy wzór na nośność graniczną przekroju:

$$(6.2) \quad \bar{M} = 2R \int_F \int \frac{\Phi}{r^3} dF.$$

Ponieważ jednak funkcja naprężeń Φ jest określona na liniach największego spadku jako $\Phi = \Phi(s, l)$, a linie największego spadku w postaci $r = r(s, l)$, $z = z(s, l)$, więc całkowanie wygodnie jest prowadzić w układzie współrzędnych s, l . W tym celu określamy

$$(6.3) \quad dF = |J| ds dl = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial r}{\partial s} & \frac{\partial r}{\partial l} \\ \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial l} \end{array} \right| ds dl.$$

Jeżeli podstawimy powyższe wyrażenie do (6.2), to otrzymamy wzór ostateczny, określający nośność graniczną niejednorodnego pręta zakrzywionego:

$$(6.4) \quad \bar{M} = 2R \int_F \int \frac{\Phi(s, l)}{r^3(s, l)} \left| \left(\frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial l} - \frac{\partial r}{\partial l} \frac{\partial z}{\partial s} \right) \right| ds dl.$$

Wzór powyższy pozwala na stosunkowo łatwe obliczenie nośności granicznej pręta.

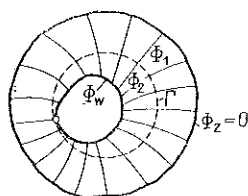
Jeżeli ze wzoru (6.4) określony zostanie moment graniczny \bar{M} , to siłę \bar{T} znaleźć można z prostej zależności

$$(6.5) \quad \bar{T} = \frac{\bar{M}}{R}$$

Problem plastycznego skręcania prętów o przekrojach wielospójnych jest przypadkiem szczególnym plastycznego skręcania prętów o skokowej niejednorodności; otwory w pręcie odpowiadają wkładkom wykonanym z materiału o granicy plastyczności $k=0$. Wobec powyższego stwierdzenia nośność graniczną pręta wielospójnego określić można także na podstawie zależności (6.4).

Niżej podana zostanie praktyczna metoda obliczania nośności granicznej prętów o przekrojach wielospójnych na przykładzie pręta o przekroju dwuspójnym (rys. 6). Jak poprzednio już stwierdzono, na konturach nieobciążonych przekroju pręta funkcja naprężeń jest stała $\Phi = \text{const}$. Dla konturu zewnętrznego przyjmujemy dowolnie $\Phi = \Phi_z = 0$, dla konturu wewnętrznego przekroju natomiast $\Phi = \Phi_w \neq 0$. Wychodząc od konturu zewnętrznego budujemy funkcję naprężeń Φ_1 wzdłuż linii największego spadku jak dla przekrojów jednospójnych. Funkcja ta, będąca faktycznie funkcją naprężeń tylko w obszarze ograniczonym od wewnątrz linią nieciągłości Γ , przyjmuje na ogół na konturze wewnętrznej wartości $\Phi_{1w} \neq \text{const}$. Opierając się na analogii Sadowsky'ego, dotyczącej plastycznego skręcania prętów przyrównanych o przekrojach wielospójnych, przyjmujemy, że na konturze wewnętrznej

$$\Phi_w = \Phi_{1 \min} = \text{const}$$



Rys. 6.

Otrzymujemy w ten sposób warunek brzegowy dla określenia funkcji naprężeń $\Phi = \Phi_2$ w obszarze ograniczonym od zewnątrz linią nieciągłości Γ . Linię nieciągłości określić można jako rzut linii przecięcia się dwu powierzchni Φ_1 i Φ_2 na płaszczyznę przekroju pręta. Nośność graniczna takiego pręta dwuspójnego wynosi

$$(6.6) \quad \bar{M} = 2R \int_F \int \frac{\Phi(s, l)}{r^3(s, l)} \left| \left(\frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial l} - \frac{\partial r}{\partial l} \frac{\partial z}{\partial s} \right) \right| ds dl + 2R \int_{F_0} \int \frac{\Phi_{1 \min}}{r^3} dF_0,$$

gdzie $\Phi = \Phi_1$ w obszarze I i $\Phi = \Phi_2$ w obszarze II, F oznacza obszar przekroju bez otworu oraz F_0 obszar otworu pręta.

7. Deformacja przekroju

Przy rozwiązywaniu problemu sprężystego skręcania prętów zakrzywionych korzysta się z metody półdwrotnej; zakłada się mianowicie, że przemieszczenia u , v , w w kierunkach r , θ , z są odpowiednio równe:

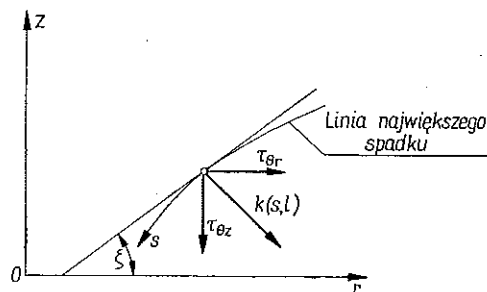
$$(7.1) \quad u=0, \quad v=v(r, z), \quad w=H\theta,$$

gdzie $v(r, z)$ jest funkcją niewiadomą, a $H = \text{const}$ oznacza skok krzywej, śrubowej,

utworzonej przez odkształconą oś pręta, odpowiadający kątowemu środkowemu 1 radian. Wobec takiego przyjęcia różne od zera składowe stanu odkształceń wynoszą odpowiednio

$$(7.2) \quad \gamma_{\theta r} = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right), \quad \gamma_{\theta z} = \frac{H}{r} + r \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \right), \quad \gamma_{rz} = 0.$$

Jest rzeczą oczywistą, że przyjęcie, iż tylko składowe $\tau_{\theta r}$ i $\tau_{\theta z}$ stanu naprężeń są różne od zera, prowadzi do tych samych wniosków.



Rys. 7

Rozpatrzmy obecnie zakres plastyczny skręcania prętów zakrzywionych. Na liniach największego spadku funkcji Φ (rys. 7) spełnione są zależności

$$(7.3) \quad \tau_{\theta r} = k(s, l) \sin \beta, \quad \tau_{\theta z} = -k(s, l) \cos \beta, \quad dz = dr \operatorname{tg} \beta.$$

Ponieważ w rozważaniach przyjęto, że pręty wykonane są z materiałów idealnie sprężysto-plastycznych, więc z prawa zmiany postaci Prandtla-Reussa oraz z warunku ciągłości pomiędzy strefą sprężystą i plastyczną wynika, że dla zakresu plastycznego zachodzi zależność

$$(7.4) \quad \frac{\tau_{\theta r}}{\tau_{\theta z}} = \frac{\gamma_{\theta r}}{\gamma_{\theta z}} = \frac{\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right)}{\frac{H}{r^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \right)}.$$

Po uwzględnieniu związków (7.3) oraz po wykonaniu przekształceń otrzymujemy

$$(7.5) \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \right) dz + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) dr = -\frac{H}{r^2} dz.$$

Związek ten jest spełniony oczywiście na linii największego spadku funkcji naprężeń Φ .

Ponieważ wyrażenie po prawej stronie wzoru (7.5) jest różniczką zupełną funkcji (v/r) wzdłuż linii największego spadku, więc

$$(7.6) \quad d \left(\frac{v}{r} \right) = -\frac{H}{r^2} dz.$$

Po scałkowaniu powyższej zależności wzdłuż linii największego spadku otrzymać można

$$(7.7) \quad \left(\frac{v}{r}\right)_P - \left(\frac{v}{r}\right)_R = -H \int_R^P \frac{dz}{r^2}.$$

Ponieważ przy całkowitym uplastycznieniu pręta wartość współczynnika H rośnie do nieskończoności, więc także i wartość funkcji (v/r) będzie rosła nieograniczenie.

Okazuje się jednak, że wyrażenie $(v/r)/H$ posiada wartość skończoną:

$$(7.8) \quad \frac{\left(\frac{v}{r}\right)_P - \left(\frac{v}{r}\right)_R}{H} = - \int_R^P \frac{dz}{r^2}.$$

Z powyższego wzoru można określić wartość funkcji $(v/r)/H$ dowolnego punktu P , jeżeli znana jest wartość tej funkcji w dowolnym innym punkcie R , leżącym na tej samej linii nieciągłości.

Rozpatrzmy obecnie problem sprężysto-plastycznego skręcania prętów zakrzywionych. Dla strefy sprężystej spełnione są związki

$$(7.9) \quad \frac{\tau_{\theta r}}{G} = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r}\right), \quad \frac{\tau_{\theta z}}{G} = \frac{H}{r} + r \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r}\right).$$

Jeżeli linia rozgraniczająca strefę sprężystą i plastyczną oznaczona zostanie przez Γ , a element długości tej linii przez $d\kappa$, to wzdłuż linii Γ mamy

$$(7.10) \quad \frac{d\left(\frac{v}{r}\right)}{d\kappa} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r}\right) \frac{dr}{d\kappa} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r}\right) \frac{dz}{d\kappa}.$$

Gdy do powyższej zależności podstawione zostaną funkcje (7.9), to po przekształceniach otrzymamy następującą zależność spełnioną na linii granicznej Γ :

$$(7.11) \quad \frac{1}{H} d\left(\frac{v}{r}\right) = \frac{1}{GrH} (\tau_{\theta r} dr + \tau_{\theta z} dz) - \frac{1}{r^2} dz.$$

W przypadku gdy wartość siły T rośnie do wartości granicznej \bar{T} , to obszar sprężysty maleje do zera, linie międzystrefowe przechodzą w linie nieciągłości naprężeń, wartość $1/GrH$ maleje do zera i ostatecznie wartość funkcji $(v/r)/H$ w punkcie R , leżącym na linii nieciągłości naprężeń można określić wzorem

$$(7.12) \quad \frac{\left(\frac{v}{r}\right)_R - \left(\frac{v}{r}\right)_{R_0}}{H} = - \int_{R_0}^R \frac{dz}{r^2},$$

gdy dana jest wartość funkcji $(v/r)/H$ jakiegokolwiek innego punktu R_0 , leżącego na tej samej linii nieciągłości.

Wzory (7.8) i (7.12) pozwalają na określenie deformacji całego przekroju pręta przy znajomości deformacji jednego punktu przekroju, np. R_0 (rys. 8). Należy zaznaczyć, że wartość funkcji deformacji $(v/r)/H$ można przyjąć dowolnie, w dowolnym punkcie przekroju; deformacja przekroju $(v/r)/H$ będzie przy takim dowolnym przyjęciu różna od rzeczywistej tylko o pewne sztywne przemieszczenie powierzchni $(v/r)/H$ w układzie współrzędnych r, z , $(v/r)/H$.

8. Przykłady

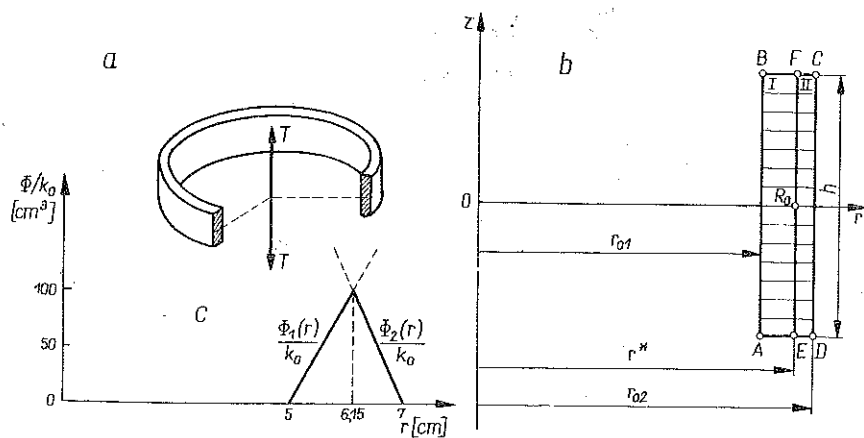
Przykład 1. Rozpatrzono pręt zakrzywiony o przekroju wąskiego prostokąta, którego boki dłuższe są równoległe do osi symetrii pręta (rys. 9a, b). Przyjęto, że pręt wykonany jest z materiału jednorodnego (tzn. $k(r, z) = k_0$).

Równanie linii największego spadku dla materiału jednorodnego można przedstawić w postaci (2.8):

$$z = \pm \int \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{r^4 - D}} dr + C,$$

gdzie D i C są stałymi, które określa się z warunków brzegowych:

$$D = \frac{r_M^4 z_M'^2}{1 + z_M'^2}, \quad C = z_M.$$



Rys. 9

Po scałkowaniu równania (2.8) otrzymuje się wzór ogólny, określający linie największego spadku funkcji Φ dla materiału jednorodnego:

$$(8.1) \quad z = z_M + b \frac{\sqrt{2}}{2} [F(\varepsilon_1, p) - F(\varepsilon_2, p)],$$

gdzie

$$(8.2) \quad \varepsilon_1 = \arccos \frac{b}{r}, \quad \varepsilon_2 = \arccos \frac{b}{r_M}, \quad p = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad b = \sqrt[4]{D}.$$

Wartość funkcji naprężeń Φ dla przypadku materiału jednorodnego została określona wzorem (4.5):

$$\Phi(P) = k_0 \left\{ \frac{b^3}{3\sqrt{2}} [F(\varepsilon_1, p) - F(\varepsilon_2, p)] + \frac{r}{3} \sqrt{r^4 - D} - \frac{r_M}{3} \sqrt{r_M^4 - D} \right\}.$$

Dla przekroju przedstawionego na rys. 9b będziemy w dalszych obliczeniach przyjmować, że w okolicy boków krótkich pręta wartość funkcji naprężeń Φ wynika tylko z warunków brzegowych dotyczących boków dłuższych. Takie przyjęcie przy dużym stosunku $h/(r_{02} - r_{01})$ powoduje znaczne uproszczenie obliczeń nie pociągając za sobą zbyt dużego błędu.

Na dwu dłuższych bokach AB i CD warunki brzegowe potrzebne dla określenia linii największego spadku można napisać:

$$\text{dla } r = r_{01}: \quad z'_M = 0,$$

$$\text{dla } r = r_{02}: \quad z'_M = 0,$$

skąd wynika, że stałe D_1 i D_2 są równe zeru, a $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \arccos 0^\circ = \pi/2$. Wobec powyższego, równania linii największego spadku będą odpowiednio

$$z_1 = z_{1M} = \text{const}, \quad z_2 = z_{2M} = \text{const},$$

tzn. linie największego spadku są liniami prostymi, równoległymi do osi r (rys. 9 b). Funkcję naprężeń Φ można natomiast przedstawić wzorami

$$\text{dla obszaru } ABFE: \quad \Phi_1 = \frac{1}{3} k_0 (r^3 - r_{01}^3),$$

$$\text{dla obszaru } CDEF: \quad \Phi_2 = \frac{1}{3} k_0 (r_{02}^3 - r^3).$$

Wykresy funkcji Φ_1 i Φ_2 przedstawiono na rys. 9c dla $r_{01} = 5$ [cm] i $r_{02} = 7$ [cm].

Linie nieciągłości EF określimy wykorzystując w tym celu wzory (5.1), które dla rozwiązywanego przykładu sprowadzają się do postaci

$$(8.3) \quad \Phi_1(r, r_{01}) = \Phi_2(r, r_{02}).$$

Z równania powyższego równanie linii nieciągłości znajdziemy

$$r^* = \sqrt[3]{\frac{r_{01}^3 + r_{02}^3}{2}}.$$

Nośność graniczną \bar{M} określimy jako sumę $\bar{M} = \bar{M}_1 + \bar{M}_2$, przy czym

$$\begin{aligned}\bar{M}_1 &= 2R \int_{ABFE} \int \frac{\Phi_1}{r^3} dF = 2Rh \int_{r_{01}}^{r^*} \frac{k_0}{3} \left(1 - \frac{r_{01}^3}{r^3} \right) dr = \\ &= \frac{2}{3} k_0 Rh \left(r^* - r_{01} + \frac{r_{01}^3}{2r^{*2}} - \frac{r_{01}}{2} \right), \\ \bar{M}_2 &= \frac{2}{3} k_0 Rh \left(r^* - r_{02} + \frac{r_{02}^3}{2r^{*2}} - \frac{r_{02}}{2} \right).\end{aligned}$$

Ostateczny wzór na nośność graniczną będzie miał formę

$$(8.4) \quad \bar{M} = \frac{2}{3} k_0 Rh \left[3r^* - \frac{3}{2} (r_{01} + r_{02}) \right].$$

Jeżeli uwzględnimy, że

$$R = \frac{r_{01} + r_{02}}{2}, \quad r_{01} = R - \frac{g}{2}, \quad r_{02} = R + \frac{g}{2},$$

to promień rozgraniczający strefy wynosi:

$$r^* = \sqrt[3]{R^3 + 3R \frac{g^2}{4}},$$

a nośność graniczna

$$\bar{M} = 2k_0 Rh \left(\sqrt[3]{R^3 + 3R \frac{g^2}{4}} - R \right)^2$$

lub

$$\bar{T} = 2k_0 h \left(\sqrt[3]{R^3 + 3R \frac{g^2}{4}} - R \right).$$

W przypadku gdy $R \rightarrow \infty$ (pręt zakrzywiony zbliża się do pręta prostego), wartość $\bar{M} \rightarrow k_0 hg^2/4$, a $\bar{T} \rightarrow 0$, co jest zgodne z rzeczywistością i można uważać za wynik sprawdzający wyprowadzone wzory.

Deformacja przekroju. Określenie deformacji przekroju można rozbić na dwa etapy:

- określenie deformacji linii nieciągłości,
- określenie deformacji pozostałych punktów przekroju.

Deformację linii nieciągłości EF określimy zgodnie ze wzorem (7.11), przy czym dla prostoty przyjmiemy, że wartość deformacji w punkcie R_0 (rys. 9b) jest równa zeru. Ponieważ dla rozpatrywanego przykładu linia nieciągłości jest dana za pomocą równania

$$r = r^* = \text{const},$$

to deformację linii nieciągłości naprężeń obliczymy następująco:

$$\frac{\left(\frac{\psi}{r}\right)_R}{H} = - \int_{R_0}^R \frac{dz}{r^{*2}} = - \frac{z}{r^{*2}}.$$

Deformacje $(\psi/r)/H$ poszczególnych punktów P linii największego spadku można określić, wykorzystując wzór (7.8):

$$\frac{\left(\frac{\psi}{r}\right)_P}{H} = \frac{\left(\frac{\psi}{r}\right)_R}{H} - \int_R^P \frac{dz}{r^2}.$$

Ponieważ linie największego spadku są liniami $z = \text{const}$, przeto w całym obszarze pręta spełniony jest związek

$$\frac{\left(\frac{\psi}{r}\right)_P}{H} = \frac{\left(\frac{\psi}{r}\right)_R}{H} = - \frac{z}{r^{*2}}.$$

Przykład 2. Drugim rozpatrywanym przykładem jest także pręt o przekroju w kształcie wąskiego prostokąta, jednakże jego dłuższe boki są równoległe do osi r (rys. 10). Pręt wykonany jest także z materiału jednorodnego.

Ponieważ rozpatrywany przekrój jest symetryczny tak ze względu na kształt, jak i na funkcję jednorodności, wobec tego oś symetrii EF będzie zarazem linią nieciągłości naprężeń. Przy dalszych rozważaniach, podobnie jak w przykładzie poprzednim, pominiemy wpływ krótszych boków na postać funkcji naprężeń, co jest uzasadnione przy dość dużym stosunku $2h/B$.

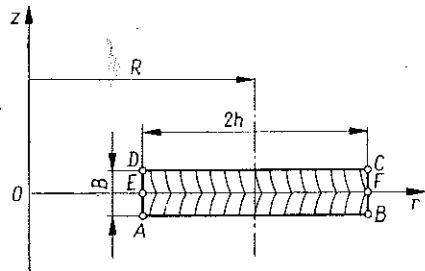
Do znalezienia momentu granicznego posłużono się w tym przykładzie metodą małego parametru, ponieważ ścisłe rozwiązanie wydaje się niemożliwe. Jako mały parametr przyjęto stosunek $\alpha = h/R$.

Wprowadzono dalej nową zmienną ξ , taką że

$$\xi = \frac{r-R}{h} = \frac{1}{\alpha} \left(\alpha \frac{r}{h} - 1 \right).$$

Jeżeli do równania różniczkowego linii największego spadku wprowadzimy nową zmienną ξ , to po scałkowaniu tego równania otrzymamy

$$\xi = \xi_M + \left(\frac{z}{h}\right)^2 \alpha - \xi_M \left(\frac{z}{h}\right)^2 \alpha^2 + \dots,$$



Rys. 10

po uwzględnieniu warunków brzegowych

$$\text{dla } \xi = \xi_M: \quad z_M = 0, \quad z'_M = \infty.$$

Funkcja naprężeń Φ określona zostanie ze wzoru (4.2)

$$\left| \frac{d\Phi}{dm} \right| = \tilde{k}(r, z) = k_0 r^2$$

oraz po uwzględnieniu, że

$$dm = \frac{dz}{\sin \beta} = \frac{\left(\frac{dz}{dr} \right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2}},$$

gdzie β oznacza kąt zawarty między linią największego spadku a osią r .

Po przekształceniach, wykonaniu całkowania oraz uwzględnieniu, że dla $z=0$: $\Phi=0$, otrzymamy

$$\Phi = k_0 R^2 \left[z + 2z\xi_M + \left(\frac{4}{3} \frac{z^3}{h^2} + \xi_M^2 z \right) \alpha^2 + 0(\alpha^4) + \dots \right].$$

Wartość momentu granicznego \bar{M} , określona zostanie ze wzoru (6.2)

$$\bar{M} = 4R \int \int_{ABFE} \frac{\Phi}{r^3} dF.$$

Po wykonaniu całkowania otrzymujemy

$$\bar{M} = 4k_0 h \left[\frac{B^2}{4} + \left(-\frac{10}{48} \frac{B^4}{h^2} + \frac{B^2}{12} \right) \alpha^2 + 0(\alpha^4) + \dots \right].$$

W przypadku $\alpha=0$ (odpowiada to skręcaniu pręta pryzmatycznego) nośność graniczna $\bar{M} = k_0 h B^2$, co jest zgodne z nośnością obliczoną dla pręta pryzmatycznego o przekroju w postaci wąskiego prostokąta.

Rozpatrzono przykłady 1 i 2 pozwalają określić nośność graniczną prętów o przekrojach cienkościennych, bardziej złożonych, np. przedstawionych na rys. 11.

Przykład 3. Obecnie rozpatrzmy przypadek szczególny niejednorodności, mianowicie niejednorodności typu k_0/r^2 . Ponieważ niejednorodność zastępcza $\tilde{k}(r, z) = k_0$, więc równanie różniczkowe linii największego spadku funkcji naprężeń Φ upraszcza się do postaci

$$z'' = 0.$$

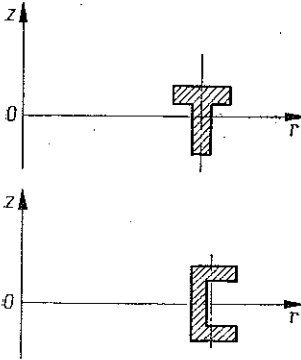
Po dwukrotnym scałkowaniu równanie linii największego spadku będzie miało postać

$$z = ar + b,$$

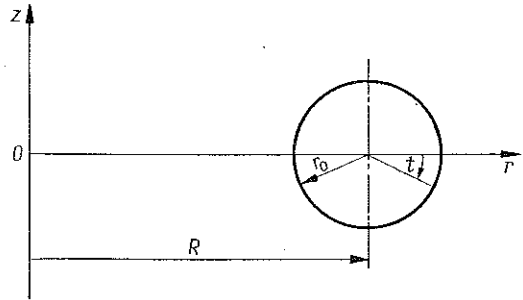
z czego wynika, że dla danej niejednorodności linie największego spadku są liniami prostymi.

W dalszym ciągu zajmujemy się prętem zakrzywionym o krzywiznie $1/R$ i o przekroju kołowym, którego promień jest równy r_0 (rys. 12). Równanie konturu tego pręta można przedstawić w postaci

$$r_k = R + r_0 \cos t, \quad z_k = -r_0 \sin t.$$



Rys. 11



Rys. 12

Warunki brzegowe, z których określone zostaną linie największego spadku, można zgodnie z (3.5) przedstawić w postaci następującej:

$$\begin{aligned} \text{dla } t = t_M: \quad r &= R + r_0 \cos t_M, \\ z &= -r_0 \sin t_M, \\ z' &= z'_M = -\operatorname{tg} t_M. \end{aligned}$$

Wobec powyższego równania linii największego spadku można przedstawić wzorem

$$z = (R - r) \operatorname{tg} t_M,$$

gdzie t_M jest parametrem konturu.

W dalszym ciągu posługiwać się będziemy nowymi współrzędnymi s, l , zgodnymi z zasadą przedstawioną w p. 4. Przyjmując $l = t$, czynimy zadość warunkom tego punktu, ponieważ równanie $t = \text{const}$ określa daną linię największego spadku funkcji Φ . Drugą współrzędną s będzie odległość danego punktu przekroju od konturu. Zgodnie z tym odpowiednie wzory transformacyjne będą następujące:

$$r = R + (r_0 - s) \cos l, \quad z = -(r_0 - s) \sin l.$$

Funkcję naprężeń Φ określimy z zależności (4.2):

$$\left| \frac{d\Phi}{dm} \right| = \tilde{k}(r, z) = \tilde{k}_0,$$

przy czym w naszym przypadku $dm = ds$.

Jeżeli wykonamy całkowanie powyższej zależności, to po uwzględnieniu warunku brzegowego: dla $s = 0 \rightarrow \Phi = 0$, otrzymamy $\Phi = k_0 s$.

Nośność graniczną przekroju określimy, wykorzystując zależność (6.4):

$$\bar{M} = 2R \int_F \int \frac{\Phi(s, l)}{r^3(s, l)} |J| ds dl.$$

Dla rozpatrywanego przykładu $|J| = (r_0 - s)$, natomiast pole powierzchni F jest ograniczone

$$0 \leq l \leq 2\pi, \quad 0 \leq s \leq r_0,$$

wobec czego

$$\bar{M} = 2R \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \frac{k_0 s (r_0 - s)}{[R + (r_0 - s) \cos l]^3} ds dl.$$

Po wykonaniu całkowania względem zmiennej l otrzymujemy

$$\bar{M} = 2\pi R k_0 \int_0^{r_0} \frac{[2R^2 + (r_0 - s)^2] s (r_0 - s)}{[R^2 - (r_0 - s)^2]^{5/2}} ds.$$

Chociaż wartość \bar{M} można byłoby określić w sposób ścisły, to dla prostoty znajdziemy nośność graniczną w postaci szeregu małego parametru, przyjmując jako małą wartość $\alpha = r_0/R$. Jeżeli wprowadzimy nową zmienną ξ taką, że

$$\xi = \frac{r_0 - s}{R},$$

to

$$\bar{M} = 2\pi R k_0 \int_0^{\alpha} \left(2\xi\alpha - 2\xi^2 + 6\xi^3\alpha - 6\xi^4 + \frac{45}{4}\xi^5\alpha - \frac{45}{4}\xi^6 + \dots \right) d\xi,$$

a po wykonaniu całkowania otrzymujemy

$$\bar{M} = 2\pi k_0 R \left(\frac{1}{3}\alpha^3 + \frac{3}{10}\alpha^5 + \frac{45}{168}\alpha^7 + \dots \right).$$

Jakkolwiek przedstawione w tym punkcie przykłady były bardzo proste (specjalnie dobrano kształty przekrojów prętów i funkcje niejednorodności), to jednak podane w niniejszej pracy metody są ogólne i pozwalają efektywnie określić nośność graniczną prętów zakrzywionych o dowolnej niejednorodności poprzecznej oraz o dowolnych kształtach. Jeżeli kształt przekroju lub funkcja niejednorodności będą bardziej skomplikowane, to jedynie zwiększy to trudności obliczeniowe przy rozwiązywaniu zadania.

Literatura cytowana w tekście

1. W. FREIBERGER, *Elastic-plastic torsion of circular ring sectors*, Quart. Appl. Math., **14** (1956), 259 - 265.
2. W. FREIBERGER, W. PRAGER, *Plastic twisting of thick-walled circular ring sectors*, J. Appl. Mech., **23** (1965), 461 - 463.
3. W. FREIBERGER, *Torsion*, Chapter 48 of «Handbook of Engineering Mechanics», Edited by W. FLÜGGE, Mc Graw-Hill, New York 1962.
4. M. GALOS, *Obliczanie nośności granicznej skręcanych prętów o dowolnej niejednorodności poprzecznej*, Rozpr. Inżyn., **2**, **16** (1968), 233 - 260.
5. M. GALOS, M. ŻYCZKOWSKI, *Analityczna metoda obliczania nośności granicznej prętów skręcanych*, Rozpr. Inżyn., **2**, **12** (1964), 267 - 296, Streszcz. ang. Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. tech., **12** (1964), 69 - 78.

6. O. GÖHNER, *Ingenieur-Archiv*, **1** (1930), 619.
7. O. GÖHNER, *Schubspannungsverteilung im Querschnitt eines gedrillten Ringstabs mit Anwendung auf Schraubfedern*, *Ingenieur-Archiv*, **2** (1931), 1.
8. O. GÖHNER, *Spannungsverteilung in einem an den Endquerschnitten belasteten Ringstabsektor*, *Ingenieur-Archiv*, **2** (1931), 381.
9. M. PILGRAM, *Artill*, Monatshefte, 1913.
10. V. ROEVER, *V.D.J.*, **57** (1913).
11. J. RYCHLEWSKI, *Plastic torsion of non-homogeneous bars analyzed in curvilinear coordinates*, *Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. tech.*, **7**, **12** (1964), 469–474.
12. J. RYCHLEWSKI, *Plastyczność ciał o skokowej niejednorodności*, *Mech. Teoret. Stos.*, **1**, **4** (1966), 45–126.
13. В. В. СОКОЛОВСКИЙ, *Об одной задаче упруго-пластического кручения*, *Прикл. мат. мех.*, **2**, **6** (1942), 241–246.
14. В. В. СОКОЛОВСКИЙ, *Дилатантное течение жидкости в торообразных трубах*, *Инж. Журн.*, **1**, **5** (1965), 73–82.
15. В. В. СОКОЛОВСКИЙ, *Теория пластичности*, Высшая Школа, 1969.
16. A. M. WAHL, *Mechanical Springs*, Mc Graw-Hill Book Company, Inc. New York-Toronto-London 1963.
17. A. J. WANG, W. PRAGER, *Plastic twisting of a circular ring sector*, *J. Mech. Phys. Solids*, **3** (1955), 169–175.

Резюме

ПЛАСТИЧЕСКОЕ КРУЧЕНИЕ ЗАКРИВЛЕННЫХ В ФОРМЕ КРУГА СТЕРЖНЕЙ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПОПЕРЕЧНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

В работе обсуждается вопрос пластического кручения закрученных в форме круга стержней, изготовленных из материала, обладающего поперечной неоднородностью. С этой целью использовано, существующую математическую аналогию, имеющую место между этой задачей и вопросом пластического кручения призматических стержней с произвольной поперечной неоднородностью.

Для решения применяется функция Φ , что дает возможность привести методы, служащие для эффективного расчета несущей способности закручиваемых стержней. Работа иллюстрируется примерами.

Summary

THE PLASTIC TWISTING OF CIRCULARLY CURVED RODS WITH ARBITRARY TRANSVERSE NONHOMOGENEITY

Consideration is given in this paper to the problem of the plastic twisting of circularly curved rods, made of material having an arbitrary transverse inhomogeneity. To that end, use is made of the established mathematical analogy which occurs between that problem and the problem of plastic twisting of prismatic rods with arbitrary transverse inhomogeneity.

For the solution, the stress function Φ is used, which enables presentation of the methods serving for the effective calculation of the limiting load of the twisted rods.

The paper is illustrated with examples.

KATEDRA MASZYNOZNAWSTWA
WSP W KRAKOWIE

KATEDRA MECHANIKI TECHNICZNEJ
POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 17 kwietnia 1970 r.