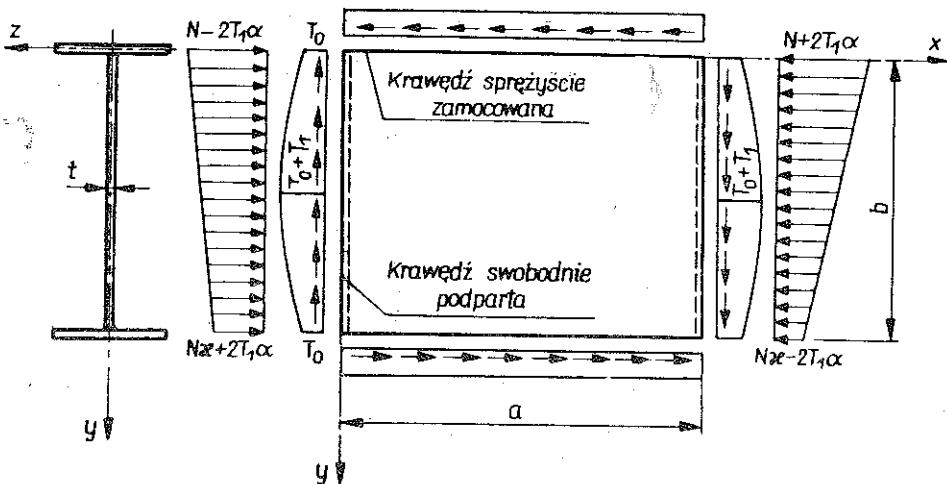


METODY ITERACYJNE ROZWIĄZANIA PEWNEGO RÓWNANIA
CHARAKTERYSTYCZNEGO

LESZEK WIŚNIEWSKI (WROCLAW)

1. Wstęp

Zagadnienie stateczności dźwigara powierzchniowego w ogólnym przypadku jest opisane równaniem różniczkowym jednorodnym czwartego rzędu o zmiennych współczynnikach. Rozwiązania takiego równania nie można wyrazić przez funkcję elementarną o postaci zamkniętej, lecz należy znaleźć użyteczne rozwiązanie przybliżone drogą przejścia z układu ciągłego do układu dyskretnego. Przejście z jednego układu do drugiego można zrealizować różnymi metodami, m.in. metodą różnic skończonych [4, 5, 6, 7 i 12], ortogonalizacyjną [1 i 3], wariacyjną [10 i 11] lub metodą opierającą się na zastosowaniu funkcji Greena [7 i 9].



Rys. 1. Schemat statyczny środnika współpracującego z pasami

Niniejsza praca dotyczy zagadnienia stateczności w obszarze sprężystym cienkiej izotropowej płyty swobodnie podpartej i sprężystie zamocowanej wzdłuż przeciwnych krawędzi dla złożonego stanu obciążenia. W praktyce inżynierskiej płyta taka jest schematem statycznym środnika metalowego pręta pełnościennego z uwzględnieniem współpracy środnika i pasów [13] (rys. 1.).

W pracy przyjęto następujące oznaczenia:

a rozstaw stężeń środnika pręta,

b szerokość środnika pręta,

$D = Et^3/12(1 - \nu^2)$,

E współczynnik sprężystości podłużnej,

N obciążenie normalne (ściskające),

$N_z = N + T_0$,

p_{mn} współczynniki szeregu,

$P(m, n, i, j), Q(m, n, i, j)$ macierze kwadratowe, blokowe,

t grubość środnika pręta,

T_0 obciążenie styczne (dodatnie),

T_1 przyrost obciążenia stycznego w środku szerokości środnika,

I macierz jednostkowa,

$\alpha = a/b$,

γ współczynnik do obliczania wartości obciążenia krytycznego,

δ znak wariacji,

$$\bar{\Delta}\bar{\Delta} = \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2\alpha^2 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \alpha^4 \frac{\partial^4}{\partial \eta^4},$$

$\eta = y/b$,

κ współczynnik charakteryzujący liniowy rozkład obciążenia normalnego,

$\lambda = 1/\gamma$,

$\mu = \gamma$ lub $1/\gamma$,

ν współczynnik Poissona,

$\xi = x/a$.

2. Równanie charakterystyczne zagadnienia

Równanie różniczkowe cienkiej izotropowej płyty, obciążonej jak na rys. 1, jest następujące:

$$(2.1) \quad \Delta \Delta w - \frac{1}{D} \left[N(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2T(y) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] = 0,$$

gdzie

$$(2.2) \quad N(x, y) = N \left[1 - \frac{y(1-\kappa)}{b} \right] - 2T_1^{\alpha} \left(1 - 2\frac{x}{a} \right) \left(1 - 2\frac{y}{b} \right)$$

oraz

$$(2.3) \quad T(y) = T_0 + 4T_1 \frac{y}{b} \left(1 - \frac{y}{b} \right).$$

Oznaczając

$$(2.4) \quad \gamma = \frac{N_z b^2}{\pi^2 D},$$

równaniu (2.1), sprowadzonemu do zmiennych bezwymiarowych ξ, η , nadamy postać

$$(2.5) \quad \bar{\Delta}\bar{\Delta} w - \gamma \alpha^2 \pi^2 \left[\frac{N(\xi, \eta)}{N_z} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + 2\alpha \frac{T(\eta)}{N_z} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right] = 0.$$

W omawianych metodach warunkiem utraty stateczności będzie istnienie niezerowego rozwiązania pewnych układów algebraicznych równań jednorodnych, co prowadzi do warunku znikania wyznacznika głównego. Otrzymane w ten sposób równanie charakterystyczne określa poszukiwane obciążenie krytyczne.

Zadanie sprowadza się do rozwiązania następującego uogólnionego zagadnienia wartości własnych: znaleźć najmniejszą dodatnią wartość γ_{\min} parametru γ , dla której

$$(2.6) \quad \det [P - \gamma Q] = 0.$$

Jako podstawę wyboru metody umożliwiającej przejście z układu ciągłego w układ dyskretny przyjęto tzw. dobre uwarunkowanie zagadnienia, gdzie małe zmiany w danych parametrach nie powodują znacznych odkształceń poszukiwanej wartości własnej. Opierając się na przeprowadzonych badaniach wybrano najkorzystniejszy sposób polegający na ortogonalizacji lewej strony równania (2.5) z każdą kolejną funkcją rozwiązania przybliżonego. Sposób ten z jednej strony spełniał podstawowy warunek wyboru metody, z drugiej zaś strony gwarantował minimum pracy rachunkowej nawet w porównaniu z równoważną z punktu widzenia mechaniki metodą wariacyjną.

	<i>i</i>	1			2			3			<i>i</i>					
<i>m</i>	<i>n</i>	1	2	3	...	<i>j</i>	1	2	3	...	<i>j</i>	1	2	3	...	<i>j</i>
1	1															
	2															
	3															
	<i>n</i>															
2	1															
	2															
	3															
	<i>n</i>															
3	1															
	2															
	3															
	<i>n</i>															
<i>m</i>	1															
	2															
	3															
	<i>n</i>															

Rys. 2. Struktura indeksowa macierzy $P(m, n, i, j)$, $Q(m, n, i, j)$

Zakładając rozwiązanie przybliżone w postaci

$$(2.7) \quad w(\xi, \eta) = \sum_m \sum_n p_{mn} F_{mn}(\xi, \eta), \quad m, n = 1, 2, 3, \dots$$

znajdziemy układ algebraicznych równań jednorodnych w postaci

$$(2.8) \quad \sum_m \sum_n p_{mn} [P(m, n, i, j) - \gamma Q(m, n, i, j)] = 0,$$

gdzie

$$(2.9) \quad P(m, n, i, j) = \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial^4 F_{mn}}{\partial \xi^4} + 2\alpha^2 \frac{\partial^4 F_{mn}}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \alpha^4 \frac{\partial^4 F_{mn}}{\partial \eta^4} \right] F_{ij} d\xi d\eta,$$

$$(2.10) \quad Q(m, n, i, j) = \alpha^2 \pi^2 \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{N(\xi, \eta)}{N_z^2} \frac{\partial^2 F_{mn}}{\partial \xi^2} + 2\alpha \frac{T(\eta)}{N_z} \frac{\partial^2 F_{mn}}{\partial \xi \partial \eta} \right] F_{ij} d\xi d\eta,$$

$$F_{ij}(\xi, \eta) = \delta w(\xi, \eta), \quad i, j = 1, 2, 3, \dots$$

Warunki brzegowe, funkcje $F_{mn}(\xi, \eta)$, $F_{ij}(\xi, \eta)$ oraz macierze $P(m, n, i, j)$ i $Q(m, n, i, j)$ są sprecyzowane w pracy [13]. Strukturę indeksową tych macierzy pokazano na rys. 2.

3. Metody iteracyjne rozwiązania

Gdy w równaniu (2.6) macierz Q jest jednostkowa, to przyjmuje ona następującą postać:

$$(3.1) \quad \det [P - \gamma I] = 0.$$

Rozwiązywanie równania (3.1) nazywa się zwyczajnym albo prostym zagadnieniem wartości własnych macierzy P , natomiast poszukiwanie pierwiastków (2.6) – uogólnionym zagadnieniem wartości własnych.

Jeżeli macierz Q jest nieosobliwa, tzn. że $\det Q \neq 0$, wówczas

$$P - \gamma Q = PQ^{-1}Q - \gamma Q = (PQ^{-1} - \gamma I)Q.$$

Otrzymuje się zatem zwyczajne zagadnienie

$$(3.2) \quad \det [PQ^{-1} - \gamma I] = 0,$$

równoważne zadaniu (2.6). Podobnie, jeśli $\det P \neq 0$, (2.6) przejdzie w równanie

$$(3.3) \quad \det [P^{-1}Q - \lambda I] = 0.$$

Poszukiwanie jednej lub kilku wartości własnych, np. największej (najmniejszej) co do wartości bezwzględnej, najmniejszej dodatniej itp. — przeprowadza się metodami iteracyjnymi.

W przypadku zagadnienia (2.6) można stosować metodę opisaną w pracy [8] pod warunkiem, że znane jest przybliżone rozwiązanie γ_0 . Wprowadzając dowolnie wektor u_0 (np. mający wszystkie składowe równe jedności), wektor v_1 określamy jako rozwiązanie równania

$$(3.4) \quad (P - \gamma_0 Q) v_1 = \frac{Qu_0}{(u_0)_{p_0}},$$

gdzie p_0 oznacza wskaźnik składowej wektora u_0 o największym module. Następnie wyznacza się u_1 przez rozwiązanie układu

$$(3.5) \quad (P - \gamma_0 Q) u_1 = -Qv_1.$$

Poprawioną wartość rozwiązania γ_1 daje wzór

$$(3.6) \quad \gamma_1 = \gamma_0 - \frac{(v_1)_{p_1}}{(u_1)_{p_1}}.$$

Wektory v_2, u_2 i wartość γ_2 uzyskuje się ze związków powstających z równań (3.4), (3.5) i (3.6) przez zamianę $u_0, u_1, v_1, \gamma_0, \gamma_1, p_0, p_1$ na $u_1, u_2, v_2, \gamma_1, \gamma_2, p_1, p_2$ odpowiednio. Ogólnie mamy

$$(3.7) \quad (P - \gamma_{i-1}Q)v_i = \frac{Qu_{i-1}}{(u_{i-1})_{p_{i-1}}}, \quad (P - \gamma_{i-1}Q)u_i = -Qv_i, \quad \gamma_i = \gamma_{i-1} - \frac{(v_i)_{p_i}}{(u_i)_{p_i}}.$$

Łatwo można udowodnić, że powyższa metoda jest rzędu trzeciego, tzn. że Δ_j jest proporcjonalne do Δ_{j-1}^3 , gdzie Δ_j jest miarą błędu i -tego przybliżenia. Praktyka potwierdza wysoką efektywność tej metody. Jednak odradza się stosowania jej, gdy brak dobrych przybliżeń wartości własnych.

W przypadku zagadnień (3.2) lub (3.3) stosuje się metodę potęgową [2] znajdowania najmniejszej (największej) co do modułu wartości własnej μ macierzy kwadratowej R , gdzie R oznacza PQ^{-1} lub $P^{-1}Q$. Zaczynając od dowolnego wektora u_0 , konstruuje się ciąg

$$Ru_0, R^2 u_0, R^3 u_0, \dots, R^k u_0, \dots$$

Niech ψ_k będzie jakąkolwiek składową wektora $u_k = R^k u_0$. Jeśli μ jest rzeczywistym pierwiastkiem pojedynczym, to przy dostatecznie dużym k

$$(3.8) \quad \mu = \frac{\psi_{k+1}}{\psi_k}.$$

W przypadku naruszenia zbieżności ciągu $\{\psi_{k+1}/\psi_k\}$ lub zbieżności wolnej ustawia się następujące równanie kwadratowe:

$$(3.9) \quad \mu^2 + r\mu + s = 0,$$

gdzie

$$r \approx - \frac{\psi_{k-1} \psi_{k+2} - \psi_k \psi_{k+1}}{\psi_{k-1} \psi_{k+1} - \psi_k^2},$$

$$s \approx \frac{\psi_k \psi_{k+2} - \psi_{k+1}^2}{\psi_{k-1} \psi_{k+1} - \psi_k^2}.$$

Gdy dwie największe co do modułu wartości własne są rzeczywiste lub tworzą pojedynczą parę zespoloną, ich przybliżone wartości otrzymuje się drogą rozwiązania (3.9). Opisanie wyżej postępowanie wygodnie jest stosować zwłaszcza w przypadku rzeczywistych wartości własnych, różniących się jedynie znakiem oraz wartości własnych o bliskich modułach. Otrzymane tą drogą przybliżone wartości można poprawić korzystając z (3.7).

Ze wzoru (2.4) wynika, że poszukiwaną wartość obciążenia krytycznego płyty można otrzymać mnożąc pewien współczynnik γ przez obciążenie eulerowskie;

sens zagadnienia sprowadza się zatem do znalezienia najmniejszego dodatniego pierwiastka równania (2.6), któremu odpowiada największa dodatnia wartość własna macierzy R , spełniająca równanie

$$(3.10) \quad \det [R - \lambda I] = 0.$$

Zadanie znalezienia λ_{\max} rozwiązano posługując się opisaną metodą potęgową mającą tę cenną zaletę, że żadne informacje o λ_{\max} nie są potrzebne przy jej stosowaniu.

W trakcie rozwiązywania okazało się, że zachodzi jeden z następujących przypadków:

- λ_{\max} jest pojedynczym największym co do modułu pierwiastkiem równania (3.10),
- dwie największe co do wartości bezwzględnej wartości własne równe są λ_{\max} i $-\lambda_{\max}$,
- dwie największe co do modułu wartości własne są bliskie sobie, jedną z nich jest właśnie λ_{\max} .

4. Budowa macierzy P , Q i R

Macierze P oraz Q są kwadratowe i mają budowę blokową. Określają je wzory

$$(4.1) \quad [P] = \begin{bmatrix} P(1,1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P(2,2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P(3,3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P(4,4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P(5,5) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

oraz

$$(4.2) \quad [Q] = \begin{bmatrix} Q(1,1) & Q(1,2) & 0 & Q(1,4) & 0 \\ Q(2,1) & Q(2,2) & Q(2,3) & 0 & Q(2,5) \\ 0 & Q(3,2) & Q(3,3) & Q(3,4) & 0 \\ Q(4,1) & 0 & Q(4,3) & Q(4,4) & Q(4,5) \\ 0 & Q(5,2) & 0 & Q(5,4) & Q(5,5) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

W powyższych wzorach $P(m, i)$, $Q(m, i)$ są macierzami kwadratowymi stopnia n -tego, a 0 oznacza macierz zerową tego stopnia.

Łatwo sprawdzić, że macierz odwrotna P^{-1} jest również macierzą quasi-diagonalną o budowie

$$(4.3) \quad [P]^{-1} = \begin{bmatrix} P(1,1)^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P(2,2)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P(3,3)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P(4,4)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P(5,5)^{-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix},$$

natomiast macierz $R = P^{-1}Q$ ma budowę identyczną z budową macierzy Q , przy czym

$$R(m, i) = \begin{cases} P(m, i)^{-1} \cdot Q(m, i), & \text{gdy } m+i \text{ jest nieparzyste lub } m=i, \\ 0 & \text{dla pozostałych } m, i. \end{cases}$$

W szczególnym przypadku czystego zginania tarczowego macierze Q i R będą określone wzorami

$$(4.4) \quad [Q] = \begin{bmatrix} Q(1, 1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q(2, 2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q(3, 3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q(4, 4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q(5, 5) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

oraz

$$(4.5) \quad [R] = \begin{bmatrix} P(1, 1)^{-1}Q(1, 1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P(2, 2)^{-1}Q(2, 2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P(3, 3)^{-1}Q(3, 3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P(4, 4)^{-1}Q(4, 4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P(5, 5)^{-1}Q(5, 5) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix},$$

a równanie (3.10) przyjmie postać

$$(4.6) \quad \prod_m \det [R(m) - \lambda I] = 0,$$

gdzie $R(m) = P(m)^{-1}Q(m)$, $m = 1, 2, 3, \dots$

Dobór rzędu wyznacznika głównego układu równań (2.8) warunkuje dokładność wyników. Przeprowadzone próby wykazały, że w przypadku złożonego obciążenia płyty (obciążenie normalne oraz ścinające) wystarczy przyjąć jako warunek utraty stateczności wyznacznik 25 rzędu (każda z symetrycznych i antysymetrycznych postaci utraty stateczności w kierunkach osi ξ oraz η będzie wówczas aproksymowana odpowiednio trzema i dwoma krzywymi). Zastosowanie bloków macierzy stopnia 6 (macierze P i Q mają w takim przypadku sześć wierszy i kolumn blokowych) daje wyniki różniące się od poprzednich nie więcej niż o 5%.

Wszystkie próby, badania i obliczenia wartości własnych wykonano za pomocą elektronicznej maszyny matematycznej Elliott 803. Wyniki obliczeń podano w pracy [13].

Literatura cytowana w tekście

1. И. Г. Бубнов, *Отзыв на работу Тимошенко об устойчивости упругих систем*, Сб. Инст. инж. пут. сообщ., 1913.
2. Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева, *Вычислительные методы линейной алгебры*, Москва 1963.
3. В. Г. Галеркин, *Разложения в ряды для некоторых случаев равновесия плит и балок*, Вестник Инженеров, пр. 19, 1915.

4. A. HAWRANEK, O. STEINHARDT, *Theorie und Berechnung der Stahlbrücken*, Springer Verlag, Göttingen-Heidelberg-Berlin, 1958.
5. H. MARCUS, *Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten*, Springer Verlag, Berlin 1924.
6. N. J. NIELSEN, *Bestemmelse af Spændiger i Plader ved anvendelse af Differensigninger*, København 1920.
7. W. NOWACKI, *Mechanika budowli*, PWN, Warszawa 1966.
8. M. OSBORNE, *The Computer Journal*, The British Computer Society, 7, London 1964.
9. A. PUCHER, *Über die Singularitätsmethode in elastischen Platten*, Ing.-Archiv, 14 (1943).
10. L. RAYLEIGH, *Theory of Sound*, 1, London 1940.
11. W. RITZ, *Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathem. Physik*, Journ. für reine und angewandte Mathematik, 135 (1908).
12. W. WIERZBICKI, *Zadania z teorii naprężeń, wybożenia i drgań*, PWN, Warszawa 1953.
13. L. WIŚNIEWSKI, *Miejscowa utrata stateczności środnika metalowego pręta bisymetrycznego dla złożonego stanu obciążenia*, Prace Naukowe Instytutu Budownictwa Politechniki Wrocławskiej, Monografie, z. 1, PWN, Wrocław 1969.

Резюме

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ
РЕШЕНИЯ НЕКОТОРОГО ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В работе представлены методы решения характеристического уравнения, определяющего критическую нагрузку стенки полностенного стержня в сложном напряженном состоянии.

Рассмотрено два итерационных метода определения коэффициента γ для расчета величины критической нагрузки стенки:

a) метод Осборна решения задачи $\det [P - \gamma Q] = 0$,

б) степенный метод эквивалентной задачи $\det [PQ^{-1} - \gamma I] = 0$ или $\det [P^{-1}Q - \lambda I] = 0$.

Summary

ITERATION METHODS FOR SOLUTION OF A CERTAIN CHARACTERISTIC EQUATION

In this paper are presented some methods solving the characteristic equation determining the critical loading of the solid wall rod webb at a complex state of stress.

Two iteration methods of finding the coefficient γ for calculating the value of the critical loading of the web are discussed:

a) Osborne's method of solving the problem $\det [P - \gamma Q] = 0$,

b) an involution method in the equivalent problem $\det [PQ^{-1} - \gamma I] = 0$, or $\det [P^{-1}Q - \lambda I] = 0$.

POLITECHNIKA WROCLAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 13 kwietnia 1970 r.