

METODA SIŁ DLA UKŁADÓW LEPKOSPŘEŻYSTYCH

JAN KUBIK (GLIWICE)

Ogólność i wszechstronność zastosowań metody sił do rozwiązywania układów statycznie niewyznaczalnych stwarza potencjalną możliwość przeniesienia jej zalet na takie same układy lecz z materiału lepkospřeżystego. Rozszerzenie to, bynajmniej nie formalne, narzuciło konieczność zupełnie innego potraktowania równań kanonicznych metody sił. Wchodzący w poruszoną problematykę dodatkowy czynnik czasu spowodował, że układ równań algebraicznych, odpowiadający statycznie niewyznaczalnym zagadnieniom, znalazł odpowiednik w układzie równań różniczkowo-całkowych, wykazujących podobieństwo w budowie do równań poprzednich. Fakt ten jeszcze bardziej został wypuklony w czasie rozwiązywania po wykonaniu transformacji Laplace'a względem czasu.

W niektórych przypadkach uzyskujemy identyczność transformat zagadnienia lepkospřeżystego i analogicznego sprężystego quasi-statycznego. Oczywiście tylko te układy będą posiadały takie same stany naprężenia. Przykładem takiego obciążenia będzie obciążenie opisane funkcją $h(x, t) = g(x)f(t)$, gdzie $f(t)$ jest funkcją ciągłą.

U podstaw przeprowadzonych w pracy rozważań znajdują się ogólne wyniki uzyskane w pracach [7 i 8]. W pracach tych wykorzystuje się pojęcie materiału prostego m.in. przy konstruowaniu wzajemnych zależności zachodzących między ruchem i naprężeniem w dwóch różnych cząstkach ośrodka odkształcalnego. Jeżeli następnie założymy, że funkcjonal konstytutywny jest liniowy, to uzyskujemy, jako jego całkową aproksymację, zależności zachodzące między ruchem a naprężeniem w dwóch dowolnych cząstkach ośrodka, które odpowiadają liniowej lepkospřeżystości [8]. W ogólności zaś możemy uzyskać aproksymacje całkowite, odpowiadające nieliniowym zagadnieniom. Na podstawie znajomości zależności między ruchem i naprężeniem w dowolnych dwóch cząstkach ośrodka można zbudować równania metody sił. Równania takie przyjmują względnie prostą postać w liniowym układzie lepkospřeżystym. W tym przypadku efektywność i prostota podanego tutaj sposobu obliczania może znaleźć zastosowanie w praktyce inżynierskiej szczególnie tam, gdzie zastosowanie nowego tworzywa konstrukcyjnego wymaga uwzględnienia w obliczeniach pełzania konstrukcji.

1. Założenia

Niech

$$(1.1) \quad x = [x(X_1, X_2, X_3, t)]_{t=0}$$

będzie oznaczać położenie dowolnego punktu należącego do obszaru \mathcal{D} pokrywającego się z układem prętowym \mathcal{B} , ogólnie przestrzennym; X_1, X_2, X_3 niech oznaczają współrzędne w kartezjańskim układzie współrzędnych, a $t \in [0, \infty]$ czas, $x_i = x_i(X_{1i}, X_{2i}, X_{3i}, 0)$ położenie punktu i -tego należącego do obszaru \mathcal{D} .

Będziemy rozpatrywali układ nieściśliwych prętów, dla których pozostają prawdziwe założenia teorii małych odkształceń oraz ogólne liniowe zależności dla lepko-sprężystości [1, 3 i 9]:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \sigma(x, t) &= E \left(\varepsilon(x, t) - \int_0^t \Psi(t-\tau) \varepsilon(x, \tau) d\tau \right), \\ \varepsilon(x, t) &= \frac{1}{E} \left(\sigma(x, t) - \int_0^t \Phi(t-\tau) \sigma(x, \tau) d\tau \right), \quad \tau \in [0, t], \end{aligned}$$

gdzie $\sigma, \varepsilon, \Psi$ i Φ oznaczają odpowiednio naprężenie, odkształcenie, funkcję relaksacji i pełzania.

2. Równania zagadnienia

Będziemy rozpatrywali dwa identyczne układy statycznie niewyznaczalne \mathcal{B}' i \mathcal{B} , spełniające założenia podane w p. 1. Pierwszy będzie sprężysty, drugi zaś lepko-sprężysty.

Podobnie jak w zagadnieniach sprężystych wybierzemy układ podstawowy \mathcal{B}_0 . Oznaczamy dalej dużymi literami $\mathbf{X}_i(t) = \mathbf{X}_i(x_k, t)$ nadliczbowe nieznanne siły uogólnione, które przez analogię odpowiadają identycznym siłom (hiperstatycznym) w statycznym zagadnieniu sprężystym. Obie wielkości $\mathbf{X}_i(t)$, \mathbf{X}_i w układach \mathcal{B} i \mathcal{B}' różnią się tylko zmienną czasową. Właśnie tylko ta dodatkowa zmienna wpływa na odmienną postać wyprowadzonych w pracy równań metody sił. Układ równań metody sił dla N -krotnego statycznie niewyznaczalnego prętowego układu sprężystego ma znaną postać

$$(2.1) \quad \mathbf{X}_i \delta_{ij} + \mathbf{P}_r \delta_{rj} = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, N.$$

W układzie równań (2.1) \mathbf{X}_i oznacza poszukiwaną siłę hiperstatyczną, δ_{ij} jest przemieszczeniem w punkcie x_j wywołanym jednostkową siłą przyłożoną w punkcie x_i . W układzie równań (2.1) i dalszych została zastosowana konwencja sumacyjna Einsteina:

$$\mathbf{X}_i \delta_{ij} \equiv \mathbf{X}_1 \delta_{1j} + \mathbf{X}_2 \delta_{2j} + \dots + \mathbf{X}_N \delta_{Nj}; \quad r = 1, \dots, P.$$

Założymy teraz, że rozpatrujemy taki sam, jak poprzednio, układ lepko-sprężysty. Aby uzyskać analogiczny układ równań metody sił w ośrodku lepko-sprężystym do układu (2.1), wykorzystamy końcowe wyniki zawarte w pracy [18].

Wyniki te dotyczą wzajemnej zależności zachodzącej między ruchem a naprężeniem w dwóch różnych cząstkach ośrodka. Ich końcową postać przedstawiamy w postaci zależności między siłami uogólnionymi \mathbf{M}_i , \mathbf{S}_i a ruchem $\boldsymbol{\varphi}_i$, \mathbf{U}_i traktując te pierwsze jako siły wzajemnego oddziaływania na siebie dwóch części układu \mathcal{B} .

Możemy więc napisać

$$(2.2) \quad \mathbf{M}_j(t) = \boldsymbol{\varphi}_i(t) M_{ij}^\circ(t, t) - \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial \tau} \boldsymbol{\varphi}_i(\tau) M_{ij}^\circ(t, \tau) d\tau,$$

oraz

$$(2.3) \quad \mathbf{U}_j(t) = \mathbf{S}_i(t) U_{ij}^\circ(t, t) - \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{S}_i(\tau) U_{ij}^\circ(t, \tau) d\tau \quad (\text{nie sumować!}),$$

gdzie

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}_i(t) &= \boldsymbol{\varphi}(x_i, t), & M_{ij}(t, \tau) &= M_i(x_j, t, \tau), \\ \mathbf{S}_i(t) &= \mathbf{S}(x_i, t), & U_{ij}(t, \tau) &= U_i(x_j, t, \tau). \end{aligned}$$

Równania (2.2) i (2.3) możemy przedstawić również w postaci

$$(2.4) \quad \mathbf{M}_j(t) = \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial \tau} \boldsymbol{\varphi}_i(\tau) M_{ij}(t, \tau) d\tau \quad (\text{nie sumować!})$$

oraz

$$(2.5) \quad \mathbf{U}_j(t) = \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{S}_i(\tau) U_{ij}(t, \tau) d\tau \quad (\text{nie sumować!}),$$

gdzie

$$(2.6) \quad \begin{aligned} M_{ij}(t, \tau) &= M_{ij}^\circ(t, t) - M_{ij}^\circ(t, \tau), \\ U_{ij}(t, \tau) &= U_{ij}^\circ(t, t) - U_{ij}^\circ(t, \tau). \end{aligned}$$

Założymy teraz, że jądra $M_{ij}(t, \tau)$ i $U_{ij}(t, \tau)$ są postaci $M_{ij}(t, \tau) = M_{ij}(t - \tau)$, $U_{ij}(t, \tau) = U_{ij}(t - \tau)$; wówczas otrzymamy na drodze takiej samej jak w przypadku sprężystym (wykorzystując zależności (2.5)) układ równań metody sił dla układu lepkospężystego:

$$(2.7) \quad \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{X}_i(\tau) \delta_{ij}(t - \tau) d\tau + \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{q}_r(\tau, \tau_r) \delta_{jr}(\tau_r, t - \tau) d\tau = \mathbf{U}_j(t),$$

$$\tau \in (-\infty, t]$$

lub

$$(2.8) \quad \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{X}_i(\tau) \delta_{ij}(t - \tau) d\tau + \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{q}_r(\tau, \tau_r) \delta_{jr}(\tau_r, t - \tau) d\tau = \mathbf{U}_j(t), \quad \tau \in [0, t].$$

W równaniach (2.7) i (2.8) $\delta_{ij}(t - \tau)$ jest przemieszczeniem punktu x_j (zmiennym w czasie!), wywołanym stałą ze względu na czas siłą jednostkową, przyłożoną

w x_i , $\mathbf{l}_i = \mathbf{l}(x_i) H(t)$. Podobnie $\delta_{jr}(t, t-\tau)$ jest przemieszczeniem punktu x_j , wywołanym siłą jednostkową $\mathbf{l}_r = \mathbf{l}(x_r) H(t-\tau_r)$, gdzie τ_r jest chwilą przyłożenia obciążenia \mathbf{q}_r , $H(t)$ funkcją Heaviside'a, a $\mathbf{U}_j(t)$ przemieszczeniem punktu x_j .

W równaniach (2.8) założono, że proces narastania sił wewnętrznych będzie przebiegał w przedziale $\tau \in [0, t]$, przy nienaprężonym stanie dla $\tau=0$:

$$(2.9) \quad \mathbf{X}(x_i, 0) = 0, \quad \mathbf{q}_r(x, x_r, 0, \tau_r) = 0.$$

Analizując zależności (2.5), a szczególnie funkcję $\delta_{ij}(t)$ stwierdzamy, że można ją przedstawić w postaci [3 i 9]:

$$(2.10) \quad \delta_{ij}(t) = \delta_{ij}^{\circ}(x_j) R(t),$$

gdzie $\delta_{ij}^{\circ}(x_j)$ jest ugięciem statycznym, a $R(t)$ zależy od przyjętego modelu ośrodka i jest podana w pracy [3] na str. 68.

Podstawiając (2.9) do układu (2.8) uzyskujemy

$$(2.11) \quad \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{X}_i(\tau) R(t-\tau) d\tau \delta_{ij}^{\circ} + \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{q}_r(\tau, \tau_r) \delta_{jr}(t-\tau) d\tau = \mathbf{U}_j(t).$$

Wykorzystując zależności (2.9) możemy nadać również inną postać układowi (2.11):

$$(2.12) \quad \int_0^t \mathbf{X}_i(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} R(t-\tau) d\tau \delta_{ij}^{\circ} + \int_0^t \mathbf{q}_r(\tau, \tau_r) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta_{jr}(t-\tau) d\tau = \mathbf{U}_j(t).$$

Z układu równań (2.11) wynikają następujące przypadki szczególne.

A. Często $\delta_{jr}(x_j, t-\tau)$, $\mathbf{U}_j(t)$ będzie można przedstawić w postaci

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \delta_{jr}(t) &= \delta_{jr}^{\circ}(x_j, t) R(t), \\ \mathbf{U}_j(t) &= \mathbf{U}_j^{\circ}(x_j) R(t); \end{aligned}$$

wtedy z (2.11) uzyskujemy

$$(2.14) \quad \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{X}_i(\tau) R(t-\tau) d\tau \delta_{ij}^{\circ} + \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{q}_r(\tau, \tau_r) R(t-\tau) d\tau \delta_{jr}^{\circ} = \mathbf{U}_j^{\circ} R(t).$$

B. Dla quasi-sfatycznych obciążeń w układzie sprężystym należy przyjąć

$$(2.15) \quad \begin{aligned} \delta_{jr}(x_j, t-\tau, \tau_r) &= \delta_{jr}(x_j, t, t_r), \quad \tau_r \equiv t_r, \\ \delta_{ij}(t) &= \delta_{ij}^{\circ} H(t), \end{aligned}$$

gdzie $H(t)$ jest funkcją Heaviside'a.

Podstawiając (2.15) do (2.11) uzyskujemy

$$(2.16) \quad \begin{aligned} \mathbf{X}_i(t) \delta_{ij}^{\circ} + \delta_{jr}(t, t_r) \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{q}_r(\tau, \tau_r) d\tau &= \mathbf{U}_j^{\circ}, \\ \mathbf{X}_i(t) \delta_{ij}^{\circ} + \mathbf{q}_r(t, t_r) \delta_{jr}(t, t_r) &= \mathbf{U}_j^{\circ}. \end{aligned}$$

Zależności (2.15) i równania (2.16) będą spełnione m.in. dla obciążenia w postaci

$$(2.17) \quad \mathbf{q}_r(x_0, x_r, t) = \mathbf{q}_r(x_0 - vt) H(t - t_r),$$

w szczególności zaś

$$(2.18) \quad \mathbf{q}_r(x_0, x_r, t) = \mathbf{q}_0 \hat{\delta}(x_0 - vt),$$

co odpowiada obciążeniu siłą skupioną \mathbf{q}_0 przesuwaną się po układzie \mathcal{B} ze stałą prędkością v , symbol $\hat{\delta}$ oznacza funkcję Dirac'a.

C. Przypadek statyczny równań (2.11) otrzymujemy zakładając

$$(2.19) \quad \begin{aligned} \mathbf{q}_r(t) &= \mathbf{q}_r(x, x_r) H(t), \\ \delta_{ij}(t) &= \delta_{ij}^{\circ} H(t), \\ \delta_{jr}(t) &= \delta_{jr}^{\circ} H(t), \\ \mathbf{U}_j(t) &= \mathbf{U}_j H(t), \end{aligned}$$

co daje znane równania metody sił podobne do (2.1)

$$(2.20) \quad \mathbf{X}_i \delta_{ij}^{\circ} + \mathbf{q}_r \delta_{rj}^{\circ} = \mathbf{U}_j.$$

Uzyskujemy również z równań (2.14), dla

$$(2.21) \quad \begin{aligned} \mathbf{q}_r(x_0, x_r, t) &= \mathbf{q}_r(x_r) H(t - t_r) = \mathbf{q}_r H(t - t_r), \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q}_r(x, x_r, t) &= \mathbf{q}_r(x_r) \hat{\delta}(t - t_r), \end{aligned}$$

szczególnie prosty rezultat

$$(2.22) \quad \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{X}_i(\tau) R(t - \tau) d\tau \delta_{ij}^{\circ} + \mathbf{q}_r \delta_{rj}^{\circ} R(t - t_r) H(t - t_r) = \mathbf{U}_j(t).$$

3. Rozwiązanie układu równań

Układy równań (2.8), (2.11) i (2.12), będące liniowymi układami równań różniczkowo-całkowych typu Voltery o jądrach typu splotu, rozwiążemy stosując transformację Laplace'a [5]:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}[\mathbf{X}(t)] = \mathbf{X}(p) &= \int_0^{\infty} \mathbf{X}(t) e^{-pt} dt, \\ \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{X}(p)] = \mathbf{X}(t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{x-j\infty}^{x+j\infty} \mathbf{X}(p) e^{pt} dp. \end{aligned}$$

Oznaczając transformaty:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}\left[\int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{q}_r(\tau, \tau_r) \delta_{jr}(\tau_r, t - \tau) d\tau\right] &= \mathbf{N}_j(p), \\ \mathcal{L}[\mathbf{X}_i(t)] = \mathbf{X}_i(p), \quad \mathcal{L}[\delta_{jr}(t)] &= \delta_{jr}(p), \\ \mathcal{L}[\mathbf{q}_r(t)] = \mathbf{q}_r(p), \quad \mathcal{L}[R(t)] &= R(p), \end{aligned}$$

oraz wykorzystując twierdzenie o splocie, uzyskujemy po transformacji (3.1) z układu równań (2.8):

$$(3.3) \quad pX_i(p) \delta_{ij} R(p) + N_j(p) = U_j(p),$$

grupując zaś niewiadome uzyskujemy następujący układ algebraicznych równań niejednorodnych:

$$(3.4) \quad X_i(p) \delta_{ij} = (pR(p))^{-1} S_j(p), \quad S_j(p) \equiv U_j(p) - N_j(p).$$

Rozwiązanie otrzymamy w postaci

$$(3.5) \quad X_i(p) = (pR(p))^{-1} (\det \mathring{A})^{-1} \det \mathring{A}_i,$$

gdzie \mathring{A} i \mathring{A}_i oznaczają odpowiednio macierze

$$(3.6) \quad \mathring{A} = \begin{bmatrix} \delta_{11}^{\circ}, \dots, \delta_{1i}^{\circ}, \dots, \delta_{1N}^{\circ} \\ \vdots \\ \delta_{N1}^{\circ}, \dots, \delta_{Ni}^{\circ}, \dots, \delta_{NN}^{\circ} \end{bmatrix}, \quad \mathring{A}_i = \begin{bmatrix} \delta_{11}^{\circ}, \dots, \delta_{i-1}^{\circ}, S_1(p), \delta_{i+1}^{\circ}, \dots, \delta_{1N}^{\circ} \\ \vdots \\ \delta_{N1}^{\circ}, \dots, \delta_{N(i-1)}^{\circ}, S_N(p), \delta_{N(i+1)}^{\circ}, \dots, \delta_{NN}^{\circ} \end{bmatrix}.$$

Wynik końcowy (3.5) znajdziemy w postaci zamkniętej, jeżeli istnieje retransformata ułamka $\mathcal{L}^{-1}[(pR(p))^{-1}] = F(t)$

$$(3.7) \quad X_i(t) = (\det \mathring{A})^{-1} \int_0^t F(t-\tau) \mathcal{L}^{-1}[\det \mathring{A}_i] d\tau = \\ = (\det \mathring{A})^{-1} \int_0^t F(t-\tau) \sum_{j=1}^{j=N} s_{ji} S_j(\tau) d\tau.$$

4. Własności równań metody sił w układach lepkosprężystych

Wyprowadzone w części drugiej niniejszej pracy równania metody sił dla układów lepkosprężystych charakteryzują się kilkoma właściwościami bardzo ciekawymi z punktu widzenia zastosowań. Pierwszą z tych właściwości ujmuje twierdzenie 1 precyzujące warunki, których spełnienie zapewnia identyczność stanów naprężeń w układach lepkosprężystym i sprężystym. Ponadto analizowany jest przypadek podatnych podparć w układzie lepkosprężystym, który doprowadza do stanu naprężeń takiego samego jak w układzie sprężystym przy obciążeniach quasi-stacycznych. Inne właściwości związane są z przypadkiem periodycznych obciążeń. Okazuje się, że obciążenia tej postaci dla dostatecznie długiego przedziału czasu powodują stany naprężenia zbliżone do periodycznych.

4.1. Przypadek identycznych stanów naprężeń w układach sprężystym i lepkosprężystym. Analizując układ równań (3.3) oraz porównując transformaty układów (2.14) i (2.16)₂, w których przyjęto dodatkowe zależności

$$(4.1) \quad \mathbf{q}_r(t, t_r) = \mathring{\mathbf{q}}_r f(t, t_r), \\ \mathbf{q}_r(0, t_r) = 0, \\ f(t) \in \mathcal{C}_{[0, \infty)}^1, \quad \mathcal{L}[f(t, t_r)] = f(p)$$

można sformułować następujące

TWIERDZENIE 1. *Jeżeli $\mathbf{q}_r \in C^1_{[0, \infty)}$ oraz zostaną spełnione warunki (4.1), to stany naprężenia w układach sprężystym (s) i lepkospężystym ($l-s$) są identyczne ($\mathbf{q}_{r(s)} \equiv \mathbf{q}_{r(l-s)}$).*

Dowód zostanie przeprowadzony, jeżeli stwierdzimy

$$(4.2) \quad \mathbf{X}_i(t)_{(s)} = \mathbf{X}_i(t)_{(l-s)}.$$

Wykonajmy w tym celu na układach równań (2.14) i (2.16)₂ transformację Laplace'a:

$$(p\mathbf{X}_i(p) \delta_{ij} + p\mathbf{q}_r f(p) \delta_{r,j}) R(p) = \mathbf{U}_j R(p),$$

$$\mathbf{X}_i(p) \delta_{ij} + \mathbf{q}_r f(p) \delta_{r,j} = \frac{\mathbf{U}_j}{p}.$$

Po podzieleniu pierwszego z układów przez $pR(p)$ uzyskujemy identyczność transformat obu równań. Zatem ich retransformaty będą prowadziły do tych samych wyników (4.2). W pozostałych przypadkach stany naprężenia będą w układzie sprężystym i lepkospężystym różne.

Będziemy rozpatrywali teraz stany naprężenia wywołane tylko przemieszczeniami podpór w układach: sprężystym (s) i lepkospężystym ($l-s$). Wtedy pozostaje prawdziwe

TWIERDZENIE 2. *Jeżeli odpowiadające sobie przemieszczenia podpór w układach lepkospężystym $U_j(t)_{(l-s)}$ i sprężystym $U_j(t)_{(s)}$ spełniają związki*

$$(4.3) \quad U_j(t)_{(l-s)} = \int_0^t U_j(\tau)_{(s)} R(t-\tau) d\tau, \quad j=1, 2, \dots, N,$$

to stany naprężeń w obu układach są identyczne ($\mathbf{q}_{r(s)} \equiv \mathbf{q}_{r(l-s)}$).

Dowód wynika z postępowania podobnego do przeprowadzonego przy dowodzie twierdzenia 1. Rozpatrywane układy sprężyste i lepkospężyste różnią się tylko właściwościami materiału.

W konkluzji stwierdzamy, że przemieszczenia podpór w układach sprężystym i lepkospężystym nie zawsze wywołają różne stany naprężenia. Podobny wynik uzyskujemy dla wszelkich obciążeń ciągłych, określonych w przedziale $0 \leq t < \infty$, ($\mathbf{q} \in C^1_{[0, \infty)}$).

4.2. Obciążenia periodyczne. Będziemy rozpatrywali przypadek periodycznych przemieszczeń podpór $U_j(t+T) = U_j(t)$, w których T jest okresem funkcji U_j . Bez dowodu założymy, że w układzie sprężystym obciążenie quasi-statyczne, okresowe, wywołuje periodyczny (o takim samym okresie T) stan naprężenia. Podobnie periodycznym będzie stan naprężenia, wywołany periodycznymi przemieszczeniami podpór.

TWIERDZENIE 3. *Jeżeli przemieszczenia podpór $U_j(t)$ w układzie lepkospężystym są periodycznymi funkcjami o okresie T ,*

$$(4.4) \quad U_j(t+T) = U_j(t), \quad \mathbf{q}(t) \equiv 0 \quad \text{a} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 0,$$

to dla dostatecznie dużej wartości t_0 stan naprężeń będzie dowolnie bliski periodycznemu o okresie T .

Dowód. Weźmiemy pod uwagę wyrażenie (3.7)₂, określające wartość nieznaną funkcji $X_i(t)$:

$$(4.5) \quad X_i(t) = (\det \dot{A})^{-1} \int_0^t F(t-\tau) \sum_{j=1}^{j=N} s_{ji} S_j(\tau) d\tau.$$

We wzorze tym $\sum_{j=1}^{j=N} s_{ji} S_j(\tau)$ jest funkcją okresową, gdyż taką jest zawsze suma funkcji okresowych o tym samym okresie T pomnożona przez współczynniki liczbowe. Należy wobec tego wykazać, że dla periodycznej funkcji $\sum_{j=1}^{j=N} s_{ji} S_j(\tau)$, $X_i(\tau)$ też musi być periodyczne. Mamy

$$(4.6) \quad X_i(t+T) = \int_0^{t+T} F(t+T-\tau) \sum_{j=1}^{j=N} s_{ji} S_j(\tau) d\tau (\det \dot{A})^{-1}.$$

Zamieniając zmienne całkowanie $\tau = \tau' + T$ napiszemy

$$(4.7) \quad X_i(t+T) = \int_{-T}^t F(t-\tau) \sum_{j=1}^{j=N} s_{ji} S_j(\tau') d\tau' (\det \dot{A})^{-1}$$

oraz

$$(4.8) \quad X_i(t+T) - X_i(t) = \int_{-T}^0 F(t-\tau) \sum_{j=1}^{j=N} s_{ji} S_j(\tau') d\tau' (\det \dot{A})^{-1} \dot{A}.$$

Oznaczamy przez θ ($\theta < \infty$) największą wartość jaką mogą przyjąć funkcje $U_j(t)$, a przez Q maksimum funkcji $\sum_{j=1}^{j=N} s_{ji} S_j(t)$. Wykorzystując twierdzenie o wartości średniej otrzymamy

$$(4.9) \quad |X_i(t+T) - X_i(t)| \leq QTF(t - \lambda T), \quad \lambda \in (0, 1).$$

Biorąc pod uwagę, że $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 0$, dochodzimy do tezy.

TWIERDZENIE 4. Jeżeli w układach sprężystym i lepkosprężystym przemieszczenia podpór są periodyczną funkcją czasu t o okresie T , to dla znacznych wartości t stany naprężeń w obu układach są periodycznymi o tym samym okresie T .

Dowód wynika z twierdzenia 3 oraz założonej na wstępie periodyczności stanu naprężeń w układzie sprężystym. Oczywiście dla układów lepkosprężystych, w których obciążenie lub przemieszczenia podpór czynią zadość odpowiednim założeniom twierdzeń 1 i 2, stany naprężenia wywołane periodycznymi przyczynami są również periodyczne.

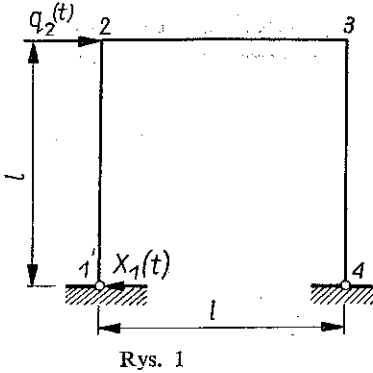
5. Zastosowania

Będziemy poszukiwali nieznaną wielkości nadliczbowej, występującej w układzie statycznie niewyznaczalnym, lepkosprężystym, rys. 1

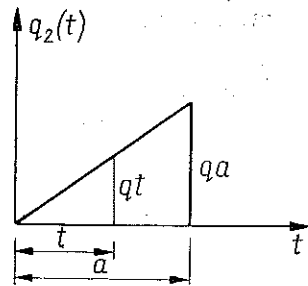
Przyjmujemy, że materiał ramy (rys. 1) spełnia równanie stanu postaci (por. [3], str. 22); model Maxwella

$$(5.1) \quad \sigma(t) = \int_0^t E \frac{\partial \varepsilon(\tau)}{\partial \tau} e^{-\frac{1}{\lambda}(t-\tau)} d\tau, \quad \lambda = \frac{\eta}{E},$$

gdzie η jest współczynnikiem lepkości, a E współczynnikiem sprężystości.



Rys. 1



Rys. 2

Obciążenie będzie realizowane według funkcji (rys. 2)

$$(5.2) \quad \begin{aligned} q_2(t) &= qt (H(t) - H(t-a)), \\ \frac{dq(t)}{dt} &= q (H(t) - H(t-a)) + qt (\delta(t) - \delta(t-a)), \end{aligned}$$

gdzie $q_2(t)$ jest zmiennym obciążeniem (rys. 2) ramy w narożu 2. Dla tej ramy jednokrotnie statycznie niewyznaczalnej równania (2.14) mają postać

$$(5.3) \quad \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} X_1(\tau) \delta_{11}(t-\tau) d\tau + \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} q_2(\tau) \delta_{12}(t-\tau) d\tau = 0.$$

Występujące w równaniu (5.3) nieznanne funkcje $\delta_{11}(t)$ i $\delta_{12}(t)$ wyznaczmy na podstawie [3] (str. 68). Dla obciążeń siłami jednostkowymi statycznymi uzyskujemy wprost

$$(5.4) \quad \delta_{11}(t) = \delta_{11}^{\circ} R(t), \quad \delta_{12}(t) = \delta_{12}^{\circ} R(t),$$

gdzie nad symbolami δ_{11}° , δ_{12}° oznacza ugięcie statyczne, a $R(t)$ jest funkcją z pracy ([3], str. 68).

Wykonując transformację na równaniu (5.3) z uwzględnieniem (5.4) i (5.2) po uporządkowaniu oraz dokonaniu retransformacji uzyskujemy

$$(5.5) \quad \begin{aligned} X_1(t) &= qa \frac{\delta_{12}^{\circ}}{\delta_{11}^{\circ}} \left[H(t-a) - \int_0^t \left(\frac{6\eta - Ea}{Ea} + t - \tau \right) e^{-\frac{E}{3\eta}\tau} d\tau \right], \\ X_1(t=a) &= qa \frac{\delta_{12}^{\circ}}{\delta_{11}^{\circ}} \left(1 - \frac{6\eta a}{E} - \frac{3\eta}{E} \right) \left(1 + \frac{3\eta}{E} e^{-\frac{E}{3\eta}a} \right). \end{aligned}$$

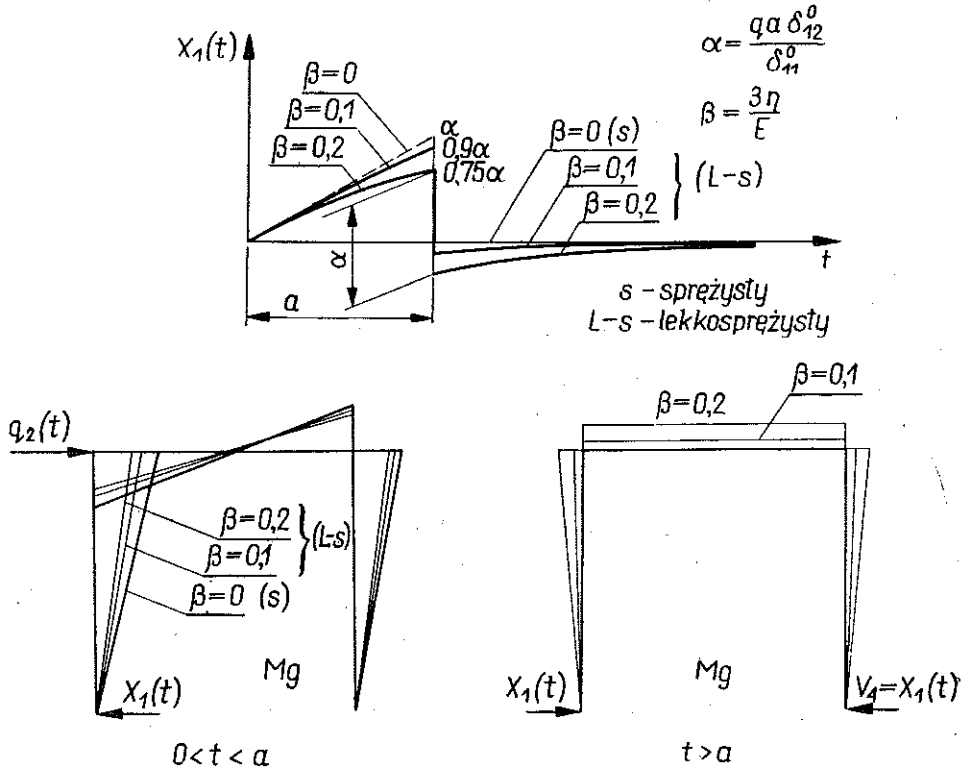
W analogicznym zagadnieniu sprężystym z obciążeniem quasi-statycznym (5.2) mamy

$$(5.6) \quad X_1(t) \delta_{11}^0 + q_2(t) \delta_{12}^0 = 0,$$

po rozwiązaniu zaś

$$(5.7) \quad X_1(t) = -\frac{\delta_{12}^0}{\delta_{11}^0} q_2(t) (H(t) - H(t-a)).$$

Jak widać z porównania (5.7) i (5.5) wyniki są różne, a uzyskane w ich konsekwencji wykresy momentów zginających dla różnych okresów czasu przedstawia rys. 3.



Rys. 3

Zupełnie inaczej będzie się zachowywał lepkosprężysty układ ramowy po zdjęciu obciążenia $t > a$. Pozostałe w nim w ciągu okresu $0 < t < a$ odkształcenia spowodują wystąpienie naprężeń przy braku obciążeń. Powstały w ten sposób stan rzeczywisty może mieć korzystny wpływ (w zależności od charakteru obciążeń) na późniejsze stany naprężenia tak w sensie ilościowym jak i jakościowym.

Literatura cytowana w tekście

1. D. R. BLAND, *The theory of Linear Viscoelasticity*, Pergamon Press, Oxford 1960.
2. R. FAURE, A. KAUFMAN, M. DENIS-PAPIN, *Mathématiques Nouvelles*, Paris 1964.
3. W. NOWACKI, *Teoria pełzania*, Arkady, Warszawa 1963.

4. W. NOWACKI, *Mechanika budowli*, PWN, Warszawa 1960.
5. J. OSIOWSKI, *Zarys rachunku operatorowego*, NT, Warszawa 1965.
6. R. SIKORSKI, *Funkcje rzeczywiste*, T. II, PWN, Warszawa 1959.
7. J. KUBIK, *Metoda sił i przemieszczeń—układy lepkospężyste*, Zesz. Nauk. Pol. Śl., Budown., 25 (1968).
8. J. KUBIK, *Statyka lepkospężystych układów prętowych*, Rozpr. doktorska, Gliwice 1970.
9. А. Р. Ржаницын, *Теория ползучести*, Москва 1968.

Резюме

МЕТОД СИЛ ДЛЯ ВЯЗКО-УПРУГИХ СИСТЕМ

В работе, дается уравнение метода сил для вязко-упругих систем и анализируются свойства приведенной системы уравнений.

В особенности, выделяется класс функции нагрузок, обеспечивающий идентичность напряженных состояний в упругой и аналогичной вязко-упругой системах (теоремы 1 и 2). Кроме того, дается анализ случая напряженных состояний, вызванных действием периодической нагрузки (теорема 3).

Summary

METHODS OF FORCES FOR VISCO-ELASTIC SYSTEMS

In the paper the equation is given of the method of forces for visco-elastic systems, and the properties of the given set of equations are analyzed.

In particular, a class of load functions has been separated ensuring the identity of the states of stress in the systems: elastic and analogous visco-elastic (Theorem 1 and 2). Furthermore, the case is analyzed of states of stresses caused by the action of a periodical load (Theorem 3).

POLITECHNIKA ŚLĄSKA
W GLIWICACH

Praca została złożona w Redakcji dnia 28 lutego 1970 r.