

PEŁZANIE PÓŁPŁASZCZYZNY PRZY MIESZANYCH WARUNKACH BRZEGOWYCH

ZBIGNIEW PIEKARSKI i GWIDON SZEFER (KRAKÓW)

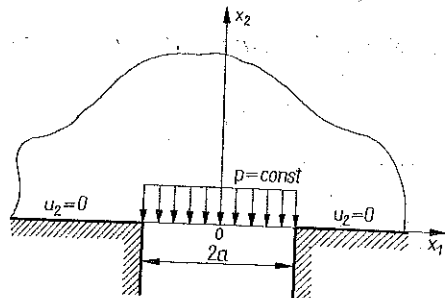
1. Wstęp

W pracy rozważymy płaski stan odkształcenia półpłaszczyzny z materiału podlegającego liniowej teorii starzenia ARUTUNIANA [1]. Przyjmijemy nieinwariantny w czasie model ciała opisanego związkami fizycznymi

$$(1.1) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E(t)} (\sigma_{ij} - \nu \delta_{ij} \sigma_{kk}) - (1+\nu) \int_{\tau_1}^t (\sigma_{ij} - \nu \delta_{ij} \sigma_{kk}) \dot{\delta}_{ij}(t, \tau) dt, \quad i, j=1, 2,$$

gdzie  $\varepsilon_{ij}$  oznacza elementy tensora odkształcenia,  $\sigma_{ij}$  — elementy tensora naprężenia,  $\delta_{ij}$  — deltę Krockera,  $\delta(t, \tau) = 1/E(\tau) + C(t, \tau)$  całkowite odkształcenie (jednostkowe),  $\nu = \text{const}$  współczynnik Poissona,  $E(t)$  moduł sprężystości oraz  $C(t, \tau)$  miarę pełzania.

W kartezjańskim układzie współrzędnych  $x_1, x_2$  rozpatrujemy półpłaszczyznę  $x_2 > 0$  o brzegu wolnym od naprężeń stycznych  $\sigma_{12}$ , obciążoną na części brzegu naprężeniem normalnym  $\sigma_{22} = p = \text{const}$ , na pozostałej zaś poddanej więzom geometrycznym  $u_2 = 0$  (rys. 1) ( $u_2$  oznacza przemieszczenie w kierunku osi  $x_2$ ). Tęgo typu problem brzegowy odpowiada zagadnieniu szczeliny Griffitha, której długość



Rys. 1

może zmieniać się w czasie, ponadto zaś problem ten może znaleźć zastosowanie w mechanice górotworu do wyznaczenia naprężeń w sąsiedztwie wyrobiska eksploatacyjnego. Podobne zagadnienie dla ciała lepkosprężystego, podlegającego zasadzie dziedziczności Boltzmanna, badał GRAHAM w pracy [2]. Dyskutowany w pracy

niniejszej przypadek jest przeniesieniem wymienionych zadań na grunt teorii pełzania z uwzględnieniem wieku materiału.

Do rozwiązania użyjemy funkcji naprężeń Airy'ego oraz cosinusową transformację całkową Fouriera. Mieszany problem brzegowy sprowadzimy do układu dwóch równań całkowych, z których jedno jest typu Volterry II rodzaju, a drugie Fredholma I rodzaju z jądrem logarytmicznym. Dla układu tego podamy efektywne, zamknięte rozwiązanie. Dla przeprowadzenia wszystkich operacji różniczkowania, całkowania, transformacji, zmiany kolejności całkowania itp. stosujemy konsekwentnie elementy teorii dystrybucji. Dzięki temu wiele pozbawionych sensu wyrażeń zyska określone znaczenie, pozwalając na potraktowanie całości wywodów z jednolitego stanowiska.

## 2. Sformułowanie i metoda rozwiązania problemu

Wychodząc z biharmonicznego równania dla funkcji naprężeń  $F(x_1, x_2)$  i stosując cosinusową transformację całkową względem zmiennej  $x_1$ , otrzymamy zwyczajne równanie dla transformaty:

$$(2.1) \quad \frac{d^4 \tilde{F}}{dx_2^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2 \tilde{F}}{dx_2^2} + \alpha^4 \tilde{F} = 0,$$

$$\tilde{F}(\alpha, x_2) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F(x_1, x_2) \cos \alpha x_1 dx_1.$$

Jego rozwiązanie przy warunku, aby naprężenia znikły dla  $|x_2| \rightarrow \infty$ , przyjmuje postać

$$(2.2) \quad \tilde{F}(\alpha, x_2) = (A + B\alpha x_2) e^{-\alpha x_2},$$

skąd po wykonaniu transformacji odwrotnej i wykorzystaniu znanych wzorów

$$\sigma_{11} = F_{,22}, \quad \sigma_{22} = F_{,11}, \quad \sigma_{12} = -F_{,12}$$

otrzymamy następujące wzory na naprężenia:

$$(2.3) \quad \sigma_{11} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty [(2 - \alpha x_2) B - A] \alpha^2 e^{-\alpha x_2} \cos \alpha x_1 d\alpha,$$

$$\sigma_{22} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty [A + B\alpha x_2] \alpha^2 e^{-\alpha x_2} \cos \alpha x_1 d\alpha,$$

$$\sigma_{12} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty [(1 - \alpha x_2) B - A] \alpha^2 e^{-\alpha x_2} \sin \alpha x_1 d\alpha.$$

Wykorzystując warunek brzegowy  $\sigma_{12}=0$  dla  $x_2=0$  otrzymamy  $A=B$ , skąd ostatecznie

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty A(1-\alpha x_2) \alpha^2 e^{-\alpha x_2} \cos \alpha x_1 d\alpha, \\
 \sigma_{22} &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty A(1+\alpha x_2) \alpha^2 e^{-\alpha x_2} \cos \alpha x_1 d\alpha, \\
 \sigma_{12} &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty A\alpha^3 x_2 e^{-\alpha x_2} \sin \alpha x_1 d\alpha.
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

Przemieszczenia wyznaczmy ze wzorów

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})
 \tag{2.5}$$

oraz z (1.1). Znajdziemy więc

$$\begin{aligned}
 u_{2,2} = \varepsilon_{22} &= \frac{1+\nu}{E(t)} [\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] - (1+\nu) \int_{\tau_1}^t [\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau, \\
 u_{1,1} = \varepsilon_{11} &= \frac{1+\nu}{E(t)} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] - (1+\nu) \int_{\tau_1}^t [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau.
 \end{aligned}$$

Podstawiając (2.4)<sub>1,2</sub> i wykonując proste całkowanie, otrzymamy

$$\begin{aligned}
 u_2(x_1, x_2, t) &= \frac{1+\nu}{E(t)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \alpha A [2(1-\nu) + \alpha x_2] e^{-\alpha x_2} \cos \alpha x_1 d\alpha - \\
 &\quad - (1+\nu) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\tau_1}^t \left\{ \int_0^\infty \alpha A [2(1-\nu) + \alpha x_2] e^{-\alpha x_2} \cos \alpha x_1 d\alpha \right\} \times \\
 &\quad \times \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau + f_2(x_1), \\
 u_1(x_1, x_2, t) &= -\frac{1+\nu}{E(t)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \alpha A (1-2\nu - \alpha x_2) e^{-\alpha x_2} \sin \alpha x_1 d\alpha + \\
 &\quad + (1+\nu) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\tau_1}^t \left\{ \int_0^\infty \alpha A (1-2\nu - \alpha x_2) e^{-\alpha x_2} \sin \alpha x_1 d\alpha \right\} \times \\
 &\quad \times \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau + f_1(x_2).
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

Warunek zgodności

$$\varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E(t)} \sigma_{12} - (1+\nu) \int_{\tau_1}^t \sigma_{12} \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau = \frac{1}{2} (u_{1,2} + u_{2,1})$$

prowadzi do identycznego, jak w teorii sprężystości, związku dla funkcji  $f_1(x_2)$  i  $f_2(x_1)$ :

$$\frac{df_1}{dx_2} + \frac{df_2}{dx_1} = 0.$$

Stąd

$$f_1(x_2, t) = C^* x_2 + B^*, \quad f_2(x_1, t) = -C^* x_1 + D^*.$$

Z symetrii zadania otrzymujemy  $C^* = B^* = 0$  i ostatecznie

$$(2.7) \quad f_1(x_2, t) = 0, \quad f_2(x_1, t) = D^*(t).$$

Wzory (2.4) oraz (2.6) przy uwzględnieniu (2.7) pozwalają rozważyć dowolny problem brzegowy dla półpłaszczyzny z brzegiem gładkim.

### 3. Problem brzegowy

Rozpatrzmy zagadnienie pełzania półpłaszczyzny przy następujących mieszanych warunkach brzegowych (rys. 1): dla  $x_2 = 0$

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \sigma_{22} = p = \text{const}, & \quad |x_1| < a; \\ u_2 = 0, & \quad |x_1| > a. \end{aligned}$$

Podstawiając (2.4)<sub>2</sub> i (2.6)<sub>1</sub> do (3.1) otrzymujemy

$$(3.2) \quad \begin{aligned} & -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \alpha^2 A \cos \alpha x_1 d\alpha = p, \quad |x_1| < a; \\ & \frac{2(1-\nu^2)}{E(t)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \alpha A \cos \alpha x_1 d\alpha - 2(1-\nu^2) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{x_1}^t \left[ \int_0^\infty \alpha A \cos \alpha x_1 d\alpha \right] \times \\ & \quad \times \delta^*(t, \tau) d\tau + D^*(t) = 0, \quad |x_1| > a. \end{aligned}$$

Równania (3.2) stanowią złożony przypadek dualnych równań całkowych z niewiadomą funkcją  $A(\alpha, t)$ . Można je łatwo sprowadzić do dwóch równań całkowych, z których jedno jest typu Volterry II rodzaju, a drugie — Fredholma I rodzaju z jądrem osobliwym. W tym celu oznaczamy

$$(3.3) \quad 2(1-\nu^2) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \alpha A \cos \alpha x_1 d\alpha = \omega(x_1, t);$$

wtedy drugie z równań (3.2) prowadzi do równania

$$\frac{\omega(x_1, t)}{E(t)} - \int_{x_1}^t \omega(x_1, \tau) \delta^*(t, \tau) d\tau + D^*(t) = 0, \quad |x_1| > a.$$

Oznaczając dalej nieznaną wartość przemieszczeń  $u_2(x_1, 0)$  na brzegu  $|x_1| < a$  przez  $v(x_1, t)$  i zakładając, że jest znana, możemy napisać

$$(3.4) \quad \frac{1}{E(t)} \omega(x_1, t) - \int_{\tau_1}^t \dot{\delta}(t, \tau) \omega(x_1, \tau) d\tau + D^*(t) = g(x_1, t), \quad x_1 \in [0, \infty),$$

gdzie

$$g(x_1, t) = \begin{cases} v(x_1, t), & \text{jeśli } |x_1| < a; \\ 0, & \text{jeśli } |x_1| > a. \end{cases}$$

Ten ostatni związek jest równaniem Volferry II rodzaju z nieznaną funkcją  $\omega(x_1, t)$ . Przepisując go w postaci

$$\omega(x_1, t) + \int_{\tau_1}^t [-E(t) \dot{\delta}(t, \tau)] \omega(x_1, \tau) d\tau = E(t) [g(x_1, t) - D^*(t)],$$

można wyznaczyć jego rozwiązanie:

$$(3.5) \quad \omega(x_1, t) = E(t) [g(x_1, t) - D^*(t)] - \int_{\tau_1}^t E(\tau) [g(x_1, \tau) - D^*(\tau)] R(t, \tau) d\tau,$$

w którym  $R(t, \tau)$  jest rezolwentną jądra  $[-E(t) \dot{\delta}(t, \tau)]$ . Traktując funkcję (3.5) jako znaną, możemy z (3.3) wyznaczyć  $A(\alpha, t)$ . Najwygodniej zrealizować to przez przedstawienie funkcji  $\omega(x_1, t)$  w postaci całki Fouriera. Na podstawie (3.5) znajdziemy:

$$\begin{aligned} \omega(x_1, t) = & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \tilde{\omega}(\alpha, t) \cos \alpha x_1 d\alpha = E(t) \left[ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \tilde{g}(\alpha, t) \cos \alpha x_1 d\alpha - \right. \\ & \left. - D^*(t) \int_0^\infty \delta(\alpha) \cos \alpha x_1 d\alpha \right] - \int_{\tau_1}^t E(\tau) \left[ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \tilde{g}(\alpha, \tau) \cos \alpha x_1 d\alpha - \right. \\ & \left. - D^*(\tau) \int_0^\infty \delta(\alpha) \cos \alpha x_1 d\alpha \right] R(t, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

We wzorze tym  $\tilde{g}(\alpha, t)$  i  $\tilde{\omega}$  stanowią transformaty Fouriera funkcji  $g(x_1, t)$  i  $\omega(x_1, t)$ , a zamiast współczynnika 1 przy funkcji  $D^*(t)$  wprowadzono reprezentację całkową, korzystając z własności dystrybucji delty Diraca. Podstawiając otrzymane wyniki do (3.3) otrzymamy

$$\begin{aligned} 2(1-v^2) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \alpha A \cos \alpha x_1 d\alpha = & \int_0^\infty \left\{ \left[ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \tilde{g} - D^*(t) \delta(\alpha) \right] E(t) - \right. \\ & \left. - \int_{\tau_1}^t \left[ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \tilde{g} - D^*(\tau) \delta(\alpha) \right] E(\tau) R(t, \tau) d\tau \right\} \cos \alpha x_1 d\alpha, \end{aligned}$$

skąd

$$2(1-\nu^2) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \alpha A = E(t) \left[ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \tilde{g} - D^*(t) \delta(\alpha) \right] - \\ - \int_{\tau_1}^t \left[ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \tilde{g} - D^*(\tau) \delta(\alpha) \right] E(\tau) R(t, \tau) d\tau.$$

W równaniu powyższym występuje transformata  $\tilde{g}$ , zawierająca nieznaną dotąd funkcję  $v(x_1, t)$ ; mamy bowiem

$$\tilde{g}(\alpha, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty g(x_1, t) \cos \alpha x_1 dx_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a v(x_1, t) \cos \alpha x_1 dx_1.$$

Ostatecznie więc otrzymujemy

$$(3.6) \quad 2(1-\nu^2) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \alpha A = E(t) \left[ \frac{2}{\pi} \int_0^a v(x_1, t) \cos \alpha x_1 dx_1 - D^*(t) \delta(\alpha) \right] - \\ - \int_{\tau_1}^t \left[ \frac{2}{\pi} \int_0^a v(x_1, \tau) \cos \alpha x_1 dx_1 - D^*(\tau) \delta(\alpha) \right] E(\tau) R(t, \tau) d\tau.$$

Tak wyznaczona funkcja  $A(\alpha, t)$  spełnia równanie (3.2)<sub>2</sub>. Nieznaną dotąd funkcję  $v(x_1, t)$  wyznaczmy z niewykorzystanego jeszcze warunku (3.2)<sub>1</sub>. Podstawiając (3.6) do (3.2)<sub>1</sub> otrzymamy

$$\int_0^\infty \alpha \left\{ E(t) \left[ \frac{2}{\pi} \int_0^a v(\xi, t) \cos \alpha \xi d\xi - D^*(t) \delta(\alpha) \right] - \int_{\tau_1}^t \left[ \frac{2}{\pi} \int_0^a v(\xi, \tau) \cos \alpha \xi d\xi - D^*(\tau) \delta(\alpha) \right] E(\tau) R(t, \tau) d\tau \right\} \cos \alpha \tau_1 d\alpha = -2(1-\nu^2)p, \quad 0 \leq x_1 < a.$$

Zmieniając kolejność całkowania znajdziemy

$$\frac{2}{\pi} \int_0^a v(\xi, t) E(t) \left( \int_0^\infty \alpha \cos \alpha \xi \cos \alpha x_1 d\alpha \right) d\xi - E(t) D^*(t) \int_0^\infty \alpha \delta(\alpha) \cos \alpha x_1 d\alpha - \\ - \int_{\tau_1}^t \left[ \frac{2}{\pi} \int_0^a v(\xi, \tau) \left( \int_0^\infty \alpha \cos \alpha \xi \cos \alpha x_1 d\alpha \right) d\xi \right] E(\tau) R(t, \tau) d\tau + \\ + \int_{\tau_1}^t E(\tau) R(t, \tau) D^*(\tau) d\tau \int_0^\infty \alpha \delta(\alpha) \cos \alpha x_1 d\alpha = -2(1-\nu^2)p.$$

Na podstawie własności dystrybucji delta druga i czwarta całka są równe zero, a oznaczając dla zwięzłości

$$(3.7) \quad \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \alpha \cos \alpha \xi \cos \alpha x_1 d\alpha = K(x_1, \xi)$$

dostajemy

$$E(t) \int_0^a K(x_1, \xi) v(\xi, t) d\xi - \int_{\tau_1}^t \left[ E(\tau) \int_0^a K(x_1, \xi) v(\xi, \tau) d\xi \right] R(t, \tau) d\tau = -2(1-v^2)p.$$

Wprowadzając następnie za pierwszą całką nową funkcję  $w(x_1, t)$ , otrzymamy ostatecznie szukany układ równań:

$$(3.8) \quad E(t) \int_0^a K(x_1, \xi) v(\xi, t) d\xi = w(x_1, t), \quad 0 \leq x_1 < a;$$

$$w(x_1, t) - \int_{\tau_1}^t R(t, \tau) w(x_1, \tau) d\tau = -2(1-v^2)p$$

równoważny układowi (3.2).

Jądro  $K(x_1, \xi)$  określone przez całkę (3.7) można wyznaczyć efektywnie w postaci zamkniętej. Biorąc mianowicie

$$K(x_1, \xi) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \alpha \cos \alpha x_1 \cos \alpha \xi d\alpha = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \alpha \left[ \frac{1}{2} \cos(x_1 + \xi) \alpha + \frac{1}{2} \cos(x_1 - \xi) \alpha \right] d\alpha = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \alpha \cos(x_1 + \xi) \alpha d\alpha + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \alpha \cos(x_1 - \xi) \alpha d\alpha,$$

otrzymujemy całki rozbieżne, mające jednak określony sens na gruncie dystrybucji.

Jak łatwo sprawdzić, całka  $\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \alpha \cos u\alpha d\alpha$  jest transformatą Fouriera dystrybucji  $-1/u^2$ , stąd więc

$$(3.9) \quad K(x_1, \xi) = -\frac{1}{2} \frac{1}{(x_1 + \xi)^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{(x_1 - \xi)^2}.$$

Układ (3.8) stanowi podstawę rozwiązania problemu brzegowego. Zaczniemy od wyznaczenia funkcji  $w(x_1, t)$  ze wzoru (3.8)<sub>2</sub>.

Dla funkcji  $p = p(x_1)$  niezależnej od  $t$ , otrzymujemy rozwiązanie natychmiast przez wykorzystanie prostych własności funkcji pełzania  $\delta(t, \tau)$  z (1.1). Zachodzi mianowicie tożsamość

$$\delta(t, \tau_1) = \frac{1}{E(t)} - \int_{\tau_1}^t \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau,$$

przedstawiająca odkształcenie liniowe włókna w jednoosiowym stanie naprężenia wywołane naprężeniem jednostkowym. Dla niezmiennego w czasie naprężenia o intensywności  $q(x_1)$  mamy

$$q(x_1) E(t) \delta(t, \tau_1) = q(x_1) - \int_{\tau_1}^t q(x_1) E(t) \dot{\delta}(t, \tau) d\tau.$$

Traktując powyższy wzór jako równanie całkowe dla funkcji  $q(x_1)$ , możemy napisać równanie

$$q(x_1) = [q(x_1) E(t) \delta(t, \tau_1)] - \int_{\tau_1}^t [q(x_1) E(\tau) \delta(t, \tau)] R(\tau, \tau_1) d\tau,$$

w którym  $R(\tau, \tau_1)$  jest rezolwentą jądra  $[-E(\tau) \delta(t, \tau)]$ . Otrzymane równanie jest identyczne z równaniem (3.8)<sub>2</sub>, skąd wynika, że

$$w(x_1, t) = q(x_1) E(t) \delta(t, \tau_1).$$

Po podstawieniu na miejsce  $q(x_1)$  prawej strony (3.8)<sub>2</sub> znajdziemy

$$(3.10) \quad w(x_1, t) = -2(1-v^2) p E(t) \delta(t, \tau_1),$$

co stanowi rozwiązanie równania.

Mając  $w(x_1, t)$ , możemy wyznaczyć funkcję  $v(\xi, t)$  z (3.8)<sub>1</sub>. Mamy równanie

$$E(t) \int_0^a K(x_1, \xi) v(\xi, t) d\xi = -2(1-v^2) p E(t) \delta(t, \tau_1)$$

oraz

$$\int_0^a v(\xi, t) \left[ \frac{1}{(x_1 - \xi)^2} + \frac{1}{(x_1 + \xi)^2} \right] d\xi = 4(1-v^2) p \delta(t, \tau_1).$$

Korzystając z symetrii zadania, spełniona jest równość  $v(-\xi, t) = v(\xi, t)$ . Na jej podstawie możemy napisać

$$\begin{aligned} \int_0^a v(\xi, t) \left[ \frac{1}{(x_1 - \xi)^2} + \frac{1}{(x_1 + \xi)^2} \right] d\xi &= \int_0^a \frac{v(\xi, t)}{(x_1 - \xi)^2} d\xi + \int_{-a}^0 \frac{v(\xi, t)}{(x_1 - \xi)^2} d\xi = \\ &= \int_{-a}^a \frac{v(\xi, t)}{(x_1 - \xi)^2} d\xi, \end{aligned}$$

skąd

$$\int_{-a}^a \frac{v(\xi, t)}{(x_1 - \xi)^2} d\xi = 4(1-v^2) p \delta(t, \tau_1), \quad |x_1| < a.$$

Łatwo dostrzec, że poszukiwana funkcja jest postaci

$$(3.11) \quad v(\xi, t) = V(\xi) \delta(t, \tau_1);$$

na to potrzeba, aby  $V(\xi)$  spełniało równanie

$$\int_{-a}^a V(\xi) \frac{1}{(x_1 - \xi)^2} d\xi = 4(1-v^2) p.$$

Całkując dwukrotnie względem  $x_1$  otrzymamy równanie

$$(3.12) \quad \int_{-a}^a V(\xi) \ln|x_1 - \xi| d\xi = -2(1-v^2) p x_1^2 + l x_1 + m,$$



w którym  $l$  i  $m$  są stałymi dowolnymi. Równanie (3.12) identyczne z tym, jakie otrzymuje się w problemie stempla wciskanego w półpłaszczyznę sprężystą, ma rozwiązanie podane przez CARLEMANA:

$$V(\xi) = \frac{A}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} + \frac{1}{\pi^2 \sqrt{a^2 - \xi^2}} \int_{-a}^a \frac{q'(w) \sqrt{a^2 - w^2}}{w - \xi} dw,$$

gdzie dla zwięzłości oznaczono

$$q(x_1) = -2(1 - \nu^2) p x_1^2 + l x_1 + m.$$

Symbol  $A$  oznacza dowolną stałą.

Wykonując proste całkowanie dostaniemy

$$(3.13) \quad V(\xi) = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - \xi^2}} \left[ -k\xi^2 - \left( \frac{ak}{2} + l \right) \xi + H \right],$$

gdzie  $k = 4/\pi (1 - \nu^2) p$ , a  $H$  oznacza stałą, zależną od  $A$  i  $l$ .

Ponieważ przemieszczenie  $v(x_1, t)$  powinno być ograniczone, a dla  $\xi = \pm a$  mianownik nieograniczenie wzrasta, przeto funkcja w nawiasie ganiastym musi być równa zeru. Mamy więc

$$-ka^2 - \left( \frac{ak}{2} + l \right) a + H = 0,$$

$$-ka^2 + \left( \frac{ak}{2} + l \right) a + H = 0.$$

Stąd

$$H = ka^2, \quad l = -\frac{ak}{2}.$$

Po podstawieniu otrzymanych wartości do (3.13) otrzymamy

$$V(\xi) = \frac{k}{\pi} \sqrt{a^2 - \xi^2}$$

i ostatecznie z (3.11)

$$(3.14) \quad v(x_1, t) = \frac{4(1 - \nu^2) p}{\pi^2} \sqrt{a^2 - x_1^2} \delta(t, \tau_1).$$

Uzyskany rezultat jest dosyć interesujący. Wynika z niego, że przemieszczenie pionowe na brzegu w ośrodku lekko-sprężystym o równaniach konstytutywnych typu (1.1) ma taki sam charakter, jak w przypadku sprężystym, jedynie wartości te pomnożyć należy przez funkcję pełzania  $\delta(t, \tau)$ . Należy przy tym zwrócić uwagę jeszcze na dwie istotne okoliczności.

Po pierwsze, z rozważań poprzedzających rezultat (3.10) wynika jasno, iż rozwiązanie równania Volterry (3.8)<sub>2</sub>, proporcjonalnie do  $E(t) \delta(t, \tau)$ , otrzymamy nie tylko dla  $p = \text{const}$ , ale i dla  $p = p(x_1)$ . Wynika stąd, że podobny do (3.14) rezultat odnosi się do przypadku ogólniejszego. Możemy więc napisać

$$(3.15) \quad v(x_1, t) = v^*(x_1) \delta(t, \tau),$$

gdzie  $v^*(x_1)$  jest rozwiązaniem przypadku czysto sprężystego dla  $p=p(x_1)$ .

Po drugie, łatwo zauważyć całkując (3.8)<sub>1</sub> a następnie (3.12), że wykonane operacje w niczym nie ulegną zmianie przy przyjęciu  $a=a(t)$ . Ustalając bowiem w każdej chwili  $t$  szerokość przedziału  $a$  dochodzimy do identycznego równania całkowego (3.8)<sub>1</sub> oraz identycznego rozwiązania (3.13). Wzór (3.14) prawdziwy jest wobec tego i w zmiennym w czasie przedziale  $a(t)$ :

$$(3.16) \quad v(x_1, t) = -\frac{4(1-v^2)p}{\pi^2} \sqrt{a^2(t) - x_1^2} \delta(t, \tau_1).$$

Wreszcie warto zauważyć, że jak dotąd nie czyniliśmy żadnych założeń co do postaci funkcji  $\delta(t, \tau)$ . Otrzymane wyniki poprawne są wobec tego dla stosunkowo szerokiej klasy ciał lepkosprężystych, opisywanych liniowymi związkami całkowymi (model Kelwina-Voigta, Boltzmana, Arutuniana itp.).

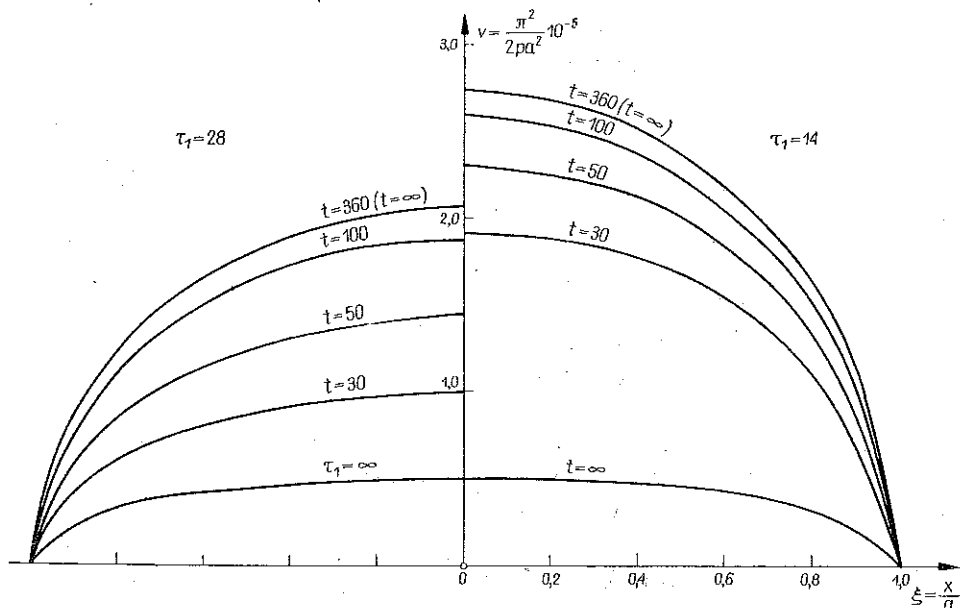
Dla materiału typu Masłowa-Arutuniana, opisanego funkcją

$$(3.17) \quad \begin{aligned} \delta(t, \tau) &= \frac{1}{E(\tau)} + \varphi(\tau) [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}], \\ E(\tau) &= E_0(1 - \beta e^{-\alpha\tau}), \\ \varphi(\tau) &= C_0 + \frac{A_1}{\tau}, \end{aligned}$$

opracowano przykład liczbowy, przyjmując (dane jak dla betonu):

$$E_0 = 2 \cdot 10^5, \quad \beta = 1, \quad \alpha = 0,03, \quad C_0 = 0,90 \cdot 10^{-5}, \quad A_1 = 4,82 \cdot 10^{-5}, \quad \gamma = 0,026.$$

Wykresy przemieszczeń dla dwóch wartości wieku materiału  $\tau = 14$  i  $\tau = 28$  dni oraz



Rys. 2

dla różnych chwil czasu  $t$  podano na rys. 2. Znajomość przemieszczenia  $v(x_1, t)$  pozwala wyznaczyć z (3.6) wielkość  $2(1-\nu^2) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \alpha A$ , potrzebną do obliczenia naprężeń i przemieszczeń w dowolnym punkcie półpłaszczyzny.

Mamy wtedy

$$\begin{aligned} 2(1-\nu^2) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \alpha A &= \\ &= E(t) \left[ \frac{2}{\pi} \frac{4(1-\nu^2)p}{\pi^2} \delta(t, \tau) \int_0^a \sqrt{a^2-x_1^2} \cos \alpha x_1 dx_1 - D^*(t) \delta(\alpha) \right] - \\ &- \int_{\tau_1}^t \left[ \frac{2}{\pi} \frac{4(1-\nu^2)p}{\pi^2} \delta(t, \tau) \int_0^a \sqrt{a^2-x_1^2} \cos \alpha x_1 dx_1 - D^*(\tau) \delta(\alpha) \right] E(\tau) R(t, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Występującą tu całkę

$$J = \int_0^a \sqrt{a^2-x_1^2} \cos \alpha x_1 dx_1 = a^2 \int_0^1 \sqrt{1-z^2} \cos \alpha az dz$$

obliczymy przez podstawienie  $z = \cos \varphi$ , otrzymując [3]

$$J = a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi \cos(\alpha a \cos \varphi) d\varphi = a^2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{\alpha a}{2}\right)^{-1} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) J_1(\alpha a) = \frac{\pi}{2} a \frac{J_1(\alpha a)}{\alpha}.$$

Tutaj  $J_1(\alpha a)$  jest funkcją Bessela I rodzaju, pierwszego rzędu. Stąd mamy

$$\begin{aligned} (3.18) \quad 2(1-\nu^2) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \alpha A &= E(t) \left[ \frac{4(1-\nu^2)pa}{\pi^2} \delta(t, \tau) \frac{J_1(\alpha a)}{\alpha} - D^*(t) \delta(\alpha) \right] - \\ &- \int_{\tau_1}^t \left[ \frac{4(1-\nu^2)pa}{\pi^2} \delta(t, \tau) \frac{J_1(\alpha a)}{\alpha} - D^*(\tau) \delta(\alpha) \right] E(\tau) R(t, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

We wzorze powyższym występuje niewyznaczone dotąd sztywny przemieszczenie  $D^*(t)$  oraz rezolwenta  $R(t, \tau)$  równania (3.5), do znalezienia której obecnie przystąpimy.

#### 4. Rezolwenta równania (3.5)

Rezolwenta równania całkowego (3.5) spełniać musi związek

$$R(t, \tau) + \int_{\tau_1}^t \left[ -E(t) \frac{\partial}{\partial \theta} \delta(t, \theta) \right] R(\theta, \tau) d\theta = E(t) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau),$$

k który przepiszemy w formie

$$(4.1) \quad \frac{1}{E(t)} R(t, \tau) - \int_{\tau_1}^t \frac{\partial}{\partial \theta} \delta(t, \theta) R(\theta, \tau) d\theta = -\frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau).$$

W dalszym ciągu ograniczymy się do jądra  $\delta(t, \tau)$  postaci [1]

$$(4.2) \quad \delta(t, \tau) = \frac{1}{E(t)} + C(t, \tau) = \frac{1}{E(t)} + \varphi(\tau) [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}].$$

Prawdziwy jest wzór

$$\dot{\delta}(t, \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{E(\theta)} + \varphi(\theta) (1 - e^{-\gamma(t-\theta)}) \right] = \left[ -\frac{\dot{E}(\theta)}{E(\theta)} + \dot{\varphi}(\theta) \right] - [\dot{\varphi}(\theta) + \gamma \varphi(\theta)] e^{-\gamma(t-\theta)}.$$

Oznaczając

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{E(\theta)} + \varphi(\theta) \right] &= \varphi_1(\theta), \\ [\dot{\varphi}(\theta) + \gamma \varphi(\theta)] e^{\gamma \theta} &= \varphi_2(\theta), \\ e^{-\gamma t} &= \psi(t), \end{aligned}$$

znajdziemy

$$(4.4) \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \delta(t; \theta) = \varphi_1(\theta) - \varphi_2(\theta) \psi(t).$$

Jądro równania (4.1) jest więc zwyrodniałe, co pozwoli na sprowadzenie równania całkowego do równoważnego równania różniczkowego. W tym celu podstawiamy (4.4) do (4.1):

$$\frac{1}{E(t)} R(t, \tau) - \int_{\tau}^t \varphi_1(\theta) R(\theta, \tau) d\theta + \psi(t) \int_{\tau}^t \varphi_2(\theta) R(\theta, \tau) d\theta = \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau).$$

Różniczkując powyższą funkcję dwukrotnie względem zmiennej  $t$  i, wykonując proste przekształcenia dostaniemy w końcu równanie różniczkowe drugiego rzędu:

$$(4.5) \quad \ddot{R}(t, \tau) + \left\{ \gamma [1 + \varphi(t) E(t)] - \frac{\dot{E}(t)}{E(t)} \right\} \dot{R}(t, \tau) = 0,$$

które po podstawieniu

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \dot{R}(t, \tau) &= Z(t, \tau), \\ \gamma [1 + \varphi(t) E(t)] - \frac{\dot{E}(t)}{E(t)} &= G(t) \end{aligned}$$

przyjmuje postać

$$(4.7) \quad \dot{Z}(t, \tau) + G(t) Z(t, \tau) = 0.$$

Jego rozwiązaniem jest funkcja

$$Z(t, \tau) = Z(\tau, \tau) \exp \left[ - \int_{\tau}^t G(\theta) d\theta \right];$$

stąd

$$(4.8) \quad R(t, \tau) = \int_{\tau}^t Z(t, \tau) dt + R(\tau, \tau) = \dot{R}(\tau, \tau) \int_{\tau}^t e^{-\int_{\tau}^{\tau'} G(\theta) d\theta} dt' + R(\tau, \tau).$$

Z równania (4.1) mamy

$$R(\tau, \tau) = - \left[ E(t) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) \right]_{t=\tau},$$

$$\dot{R}(\tau, \tau) = \left[ \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[ E(t) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) \right] \right\} \right]_{t=\tau} - R^2(\tau, \tau).$$

Wykorzystując wzory (4.2) i (4.3) dostaniemy po przekształceniach

$$(4.9) \quad R(\tau, \tau) = \frac{\dot{E}(\tau)}{E(\tau)} + \gamma \varphi(\tau) E(\tau),$$

$$\dot{R}(\tau, \tau) = \dot{E}(\tau) \left[ \frac{\dot{E}(\tau)}{E^2(\tau)} + \gamma \varphi(\tau) \right] - \gamma E(\tau) [\dot{\varphi}(\tau) + \gamma \varphi(\tau)] - \left[ \frac{\dot{E}(\tau)}{E(\tau)} + \gamma \varphi(\tau) E(\tau) \right]^2.$$

Z kolei w funkcji podcałkowej (4.8) uwzględniamy (4.6)<sub>2</sub> otrzymując

$$e^{-\int_{\tau}^{\tau'} G(\theta) d\theta} = \exp \left[ -\gamma \int_{\tau}^{\tau'} (1 + \varphi(\theta) E(\theta)) d\theta + \int_{\tau}^{\tau'} \frac{\dot{E}(\theta)}{E(\theta)} d\theta \right] =$$

$$= e^{-\eta(\tau, \tau')} e^{\int_{\tau}^{\tau'} \frac{dE}{E}} = e^{-\eta(\tau, \tau')} e^{\ln \frac{E(\tau')}{E(\tau)}} = e^{-\eta(\tau, \tau')} \frac{E(\tau')}{E(\tau)}.$$

Dla zwięzłości wprowadzono następujące oznaczenia:

$$(4.10) \quad \eta(\tau, \tau') = \gamma \int_{\tau}^{\tau'} [1 + \varphi(\theta) E(\theta)] d\theta.$$

Mamy więc

$$R(t, \tau) = \dot{R}(\tau, \tau) \int_{\tau}^t e^{-\eta(\tau, \tau')} \frac{E(\tau')}{E(\tau)} d\tau' + R(\tau, \tau),$$

a po uwzględnieniu wartości (4.9) i wykonaniu elementarnych operacji znajdziemy ostatecznie

$$(4.11) \quad R(t, \tau) = -\gamma \left\{ [\dot{\varphi}(\tau) + \gamma \varphi(\tau)] + \varphi(\tau) \left[ \frac{\dot{E}(\tau)}{E(\tau)} + \gamma \varphi(\tau) E(\tau) \right] \right\} \int_{\tau}^t E(\tau') e^{-\eta(\tau, \tau')} d\tau' + \left[ \frac{\dot{E}(\tau)}{E(\tau)} + \gamma \varphi(\tau) E(\tau) \right].$$

## 5. Wyznaczenie naprężeń i przemieszczeń

Obliczoną rezolwentę  $R(t, \tau)$  podstawiamy do wzoru (3.18) i przystępujemy do wyznaczenia naprężeń. Bierzemy więc pod uwagę wzory (2.4) i otrzy-

mujemy

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(x_1, x_2, t) = & -2(1-\nu^2) \left\{ \int_0^\infty E(t) \left[ \frac{4(1-\nu^2)pa}{\pi^2} \delta(t, \tau) \frac{J_1(\alpha a)}{\alpha} - D^*(t) \delta(\alpha) \right] \times \right. \\ & \times \alpha (1-\alpha x_2) e^{-\alpha x_2} \cos \alpha x_1 d\alpha - \int_0^t \left[ \int_\tau^t \left[ \frac{4(1-\nu^2)pa}{\pi^2} \delta(\tau_1, \tau) \frac{J_1(\alpha a)}{\alpha} - D^*(\tau) \delta(\alpha) \right] \times \right. \\ & \left. \left. \times E(\tau) R(t, \tau) d\tau \right] \alpha (1-\alpha x_2) e^{-\alpha x_2} \cos \alpha x_1 d\alpha \right\}. \end{aligned}$$

Po zmianie kolejności całkowania i uwzględnieniu wykorzystanych już poprzednio własności dystrybucji  $\delta$  odpadną wyrazy zawierające funkcję  $D^*(t)$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(x_1, x_2, t) = & \left[ -\frac{8(1-\nu^2)^2 pa}{\pi^2} E(t) \delta(t, \tau) \int_0^\infty J_1(\alpha a) (1-\alpha x_2) e^{-\alpha x_2} \cos \alpha x_1 d\alpha \right] - \\ & - \int_{\tau_1}^t \left[ -\frac{8(1-\nu^2)^2 pa}{\pi^2} E(\tau) \delta(\tau_1, \tau) \int_0^\infty J_1(\alpha a) (1-\alpha x_2) e^{-\alpha x_2} \cos \alpha x_1 d\alpha \right] R(t, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Przeprowadzenia analogicznych obliczeń prowadzi do podobnych wzorów dla pozostałych naprężeń. Zestawimy je wszystkie:

$$(5.1) \quad \sigma_{ij}(x_1, x_2, t) = S_{ij}(x_1, x_2, t) - \int_{\tau_1}^t S_{ij}(x_1, x_2, \tau) R(t, \tau) d\tau, \quad i, j=1, 2,$$

wprowadzając następujące oznaczenia

$$\begin{aligned} S_{11}(x_1, x_2, t) = & -\frac{8(1-\nu^2)^2 pa}{\pi^2} E(t) \delta(t, \tau_1) \int_0^\infty J_1(\alpha a) (1-\alpha x_2) e^{-\alpha x_2} \cos \alpha x_1 d\alpha, \\ (5.2) \quad S_{22}(x_1, x_2, t) = & -\frac{8(1-\nu^2)^2 pa}{\pi^2} E(t) \delta(t, \tau_1) \int_0^\infty J_1(\alpha a) (1+\alpha x_2) e^{-\alpha x_2} \cos \alpha x_1 d\alpha, \\ S_{12}(x_1, x_2, t) = & -\frac{8(1-\nu^2) pa}{\pi^2} E(t) \delta(t, \tau_1) \int_0^\infty J_1(\alpha a) \alpha x_2 e^{-\alpha x_2} \sin \alpha x_1 d\alpha. \end{aligned}$$

Przemieszczenia wyznaczmy ze wzorów (2.6) i (2.7) przy wykorzystaniu (3.18) i (4.11):

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, t) = & -\frac{1+\nu}{E(t)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \alpha A (1-2\nu-\alpha x_2) e^{-\alpha x_2} \sin \alpha x_1 d\alpha + \\ & + (1+\nu) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\tau_1}^t \left[ \int_0^\infty \alpha A (1-2\nu-\alpha x_2) e^{-\alpha x_2} \sin \alpha x_1 d\alpha \right] \delta(t, \tau) d\tau = \end{aligned}$$

$$= -\frac{1+\nu}{E(t)} \left\{ \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} \alpha A (1-2\nu-\alpha x_2) e^{-\alpha x_2} \sin \alpha x_1 d\alpha + \right. \\ \left. + \int_{\tau_1}^t \left[ \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} \alpha A (1-2\nu-\alpha x_2) e^{-\alpha x_2} \sin \alpha x_1 d\alpha \right] [-E(t) \dot{\delta}(t, \tau)] d\tau \right.$$

W pierwszej kolejności na podstawie wzoru (3.18) obliczymy całkę niewłaściwą:

$$I_1 = \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} \alpha A (1-2\nu-\alpha x_2) e^{-\alpha x_2} \sin \alpha x_1 d\alpha = \int_0^\infty \left\{ \left[ \frac{2pa}{\pi^2} \delta(t, \tau) E(t) \frac{J_1(\alpha a)}{\alpha} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{E(t) D^*(t)}{2(1-\nu^2)} \delta(\alpha) \right] - \int_{\tau_1}^t \left[ \frac{2pa}{\pi^2} \delta(\tau_1, \tau) E(\tau) \frac{J_1(\alpha a)}{\alpha} - \frac{E(\tau) D^*(\tau)}{2(1-\nu^2)} \delta(\alpha) \right] \times \right. \\ \left. \times R(t, \tau) d\tau \right\} (1-2\nu-\alpha x_2) e^{-\alpha x_2} \sin \alpha x_1 d\alpha.$$

Ze względu na występowanie pod całką iloczynu  $\delta(\alpha) \sin \alpha x_1$  drugie składniki w nawiasach graniastych odpadną i dostaniemy

$$I_1 = \int_0^\infty \left\{ \frac{2pa}{\pi^2} \delta(t, \tau) E(t) \frac{J_1(\alpha a)}{\alpha} - \int_{\tau_1}^t \left[ \frac{2pa}{\pi^2} \delta(\tau_1, \tau) E(\tau) \frac{J_1(\alpha a)}{\alpha} \right] R(t, \tau) d\tau \right\} \times \\ \times (1-2\nu-\alpha x_2) e^{-\alpha x_2} \sin \alpha x_1 d\alpha.$$

Oznaczając dalej

$$(5.3) \quad \frac{2pa}{\pi^2} E(t) \delta(t, \tau) \int_0^\infty J_1(\alpha a) (1-2\nu-\alpha x_2) e^{-\alpha x_2} \frac{\sin \alpha x_1}{\alpha} d\alpha = U_1(x_1, x_2, t)$$

otrzymamy

$$I_1 = U_1(x_1, x_2, t) - \int_{\tau_1}^t U_1(x_1, x_2, \tau) R(t, \tau) d\tau.$$

Na przemieszczenia  $u_1$  otrzymujemy więc wzór

$$u_1(x_1, x_2, t) = -\frac{1+\nu}{E(t)} \left( I_1 + \int_{\tau_1}^t I_1 [-E(t) \dot{\delta}(t, \tau)] d\tau \right) = -\frac{1+\nu}{E(t)} \left\{ U_1(x_1, x_2, t) - \right. \\ \left. - \int_{\tau_1}^t U_1(x_1, x_2, \tau) R(t, \tau) d\tau + \int_{\tau_1}^t U_1(x_1, x_2, \tau) [-E(t) \dot{\delta}(t, \tau)] d\tau - \right. \\ \left. - \int_{\tau_1}^t \left[ \int_{\tau_1}^{\tau} U_1(x_1, x_2, \theta) R(\tau, \theta) d\theta \right] [-E(t) \dot{\delta}(t, \tau)] d\tau \right\}.$$

Stosując do ostatniego składnika przekształcenie Dirichleta oraz wykorzystując własności rezolwenty  $R(t, \tau)$  [z (4.1)], otrzymamy w końcu

$$(5.4) \quad u_1(x_1, x_2, t) = -\frac{1+\nu}{E(t)} U_1(x_1, x_2, t).$$

Dla przemieszczenia pionowego  $u_2$  mamy wzór

$$\begin{aligned} u_2(x_1, x_2, t) &= \frac{1+\nu}{E(t)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \alpha A [2(1-\nu) + \alpha x_2] e^{-\alpha x_2} \cos \alpha x_1 d\alpha - \\ &- (1+\nu) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\tau_1}^t \left\{ \int_0^\infty \alpha A [2(1-\nu) + \alpha x_2] e^{-\alpha x_2} \cos \alpha x_1 d\alpha \right\} \dot{\delta}(t, \tau) d\tau + D^*(t) = \\ &= \frac{1+\nu}{E(t)} \left\{ \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} \alpha A [2(1-\nu) + \alpha x_2] e^{-\alpha x_2} \cos \alpha x_1 d\alpha + \right. \\ &\left. + \int_{\tau_1}^t \left[ \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} \alpha A [2(1-\nu) + \alpha x_2] e^{-\alpha x_2} \cos \alpha x_1 d\alpha \right] [-E(t) \dot{\delta}(t, \tau)] d\tau \right\} + D^*(t). \end{aligned}$$

Obliczając całkę

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} \alpha A [2(1-\nu) + \alpha x_2] e^{-\alpha x_2} \cos \alpha x_1 d\alpha = \\ &= \int_0^\infty \left\{ \left[ \frac{2pa}{\pi^2} \delta(t, \tau) E(t) \frac{J_1(\alpha a)}{\alpha} - \frac{E(t) D^*(t)}{2(1-\nu^2)} \delta(\alpha) \right] - \right. \\ &- \left. \int_{\tau_1}^t \left[ \frac{2pa}{\pi^2} \delta(t, \tau) E(\tau) \frac{J_1(\alpha a)}{\alpha} - \frac{E(\tau) D^*(\tau)}{2(1-\nu^2)} \delta(\alpha) \right] R(t, \tau) d\tau \right\} [2(1-\nu) + \\ &+ \alpha x_2] e^{-\alpha x_2} \cos \alpha x_1 d\alpha \end{aligned}$$

i wprowadzając oznaczenie

$$(5.5) \quad \frac{2pa}{\pi^2} E(t) \delta(t, \tau) \int_0^\infty J_1(\alpha a) [2(1-\nu) + \alpha x_2] e^{-\alpha x_2} \frac{\cos \alpha x_1}{\alpha} d\alpha = U_2(x_1, x_2, t)$$

znajdziemy

$$\begin{aligned} I_2 &= U_2(x_1, x_2, t) - \frac{E(t) D^*(t)}{2(1-\nu^2)} \int_0^\infty \delta(\alpha) [2(1-\nu) + \alpha x_2] e^{-\alpha x_2} \cos \alpha x_1 d\alpha - \\ &- \int_{\tau_1}^t U_2(x_1, x_2, \tau) R(t, \tau) d\tau + \int_{\tau_1}^t \frac{E(\tau) D^*(\tau)}{2(1-\nu^2)} \left( \int_0^\infty \delta(\alpha) [2(1-\nu) + \alpha x_2] e^{-\alpha x_2} \times \right. \\ &\times \left. \cos \alpha x_1 d\alpha \right) R(t, \tau) d\tau = U_2(x_1, x_2, t) - \int_{\tau_1}^t U_2(x_1, x_2, \tau) R(t, \tau) d\tau - \\ &- \frac{E(t) D^*(t)}{1+\nu} + \int_{\tau_1}^t \frac{E(\tau) D^*(\tau)}{1+\nu} R(t, \tau) d\tau. \end{aligned}$$



Mamy więc

$$\begin{aligned}
 u_2(x_1, x_2, t) &= \frac{1+\nu}{E(t)} \left\{ I_2 + \int_{\tau_1}^t I_2 [-E(\tau) R(t, \tau)] d\tau \right\} + D^*(t) = \\
 &= \frac{1+\nu}{E(t)} \left\{ U_2(x_1, x_2, t) - \int_{\tau_1}^t U_2(x_1, x_2, \tau) R(t, \tau) d\tau - \frac{E(t)}{1+\nu} D^*(t) + \right. \\
 &\quad + \int_{\tau_1}^t \frac{E(\tau) D^*(\tau)}{1+\nu} R(t, \tau) d\tau + \int_{\tau_1}^t U_2(x_1, x_2, \tau) [-E(t) \dot{\delta}(t, \tau)] d\tau - \\
 &\quad - \int_{\tau_1}^t \left[ \int_{\tau_1}^{\tau} U_2(x_1, x_2, \theta) R(\tau, \theta) d\theta \right] [-E(t) \dot{\delta}(t, \tau)] d\tau - \int_{\tau_1}^t \frac{E(\tau) D^*(\tau)}{1+\nu} \times \\
 &\quad \times [-E(t) \dot{\delta}(t, \tau)] d\tau + \left. \int_{\tau_1}^t \left[ \int_{\tau_1}^{\tau} \frac{E(\theta) D^*(\theta)}{1+\nu} R(\tau, \theta) \right] [-E(t) \dot{\delta}(t, \tau)] d\tau \right\} + D^*(t).
 \end{aligned}$$

Po prostych przekształceniach uwzględniających własności rezolwenty  $R(t, \tau)$  znikają wyrażenia zawierające  $D^*(t)$ :

$$(5.6) \quad u_2(x_1, x_2, t) = \frac{1+\nu}{E(t)} U_2(x_1, x_2, t).$$

Ostatecznie zestawienie wzorów dla przemieszczeń ma postać

$$\begin{aligned}
 u_1 &= -\frac{2(1+\nu)}{\pi^2} pa \delta(t, \tau) \int_0^{\infty} J_1(\alpha a) (1-2\nu-\alpha x_2) e^{-\alpha x_2} \frac{\sin \alpha x_1}{\alpha} d\alpha, \\
 u_2 &= \frac{2(1+\nu)}{\pi^2} pa \delta(t, \tau) \int_0^{\infty} J_1(\alpha a) [2(1-\nu)+\alpha x_2] e^{-\alpha x_2} \frac{\cos \alpha x_1}{\alpha} d\alpha.
 \end{aligned}
 \tag{5.7}$$

Wzory (5.1) i (5.7) stanowią pełne rozwiązanie postawionego problemu.

## 6. Zakończenie

Rozpatrzone w pracy zagadnienie rzuca nieco światła na stan naprężenia i odkształcenia ośrodka lepko-sprężystego ze starzeniem w okolicy otworu. W tym zakresie zwłaszcza rezultat (3.14) i ogólniejsze (3.15) i (3.16) wydają się zasługiwać na uwagę. Może on znaleźć zastosowanie w teorii szczelin jak i mechanice górotworu. Przyjęty model pełzania jest dostatecznie ogólny i zawiera dosyć szeroką klasę materiałów, dla których rozwiązania (3.14), (5.1) i (5.7) można więc otrzymać natychmiast.

Nieinwariantność modelu względem chwili przyłożenia obciążenia sprawia, iż nie można było stosować analogii Alfrey'a; mimo to uzyskane wyniki dowodzą pewnej analogii do rozwiązań sprężystych.

## Literatura cytowana w tekście

1. Н. Х. Арутюнян, *Некоторые вопросы теории ползучести*, Москва—Ленинград 1952.
2. G. A. C. GRAHAM, *Two extending crack problems in linear visco-elasticity theory*, North Carolina State University, Raleigh 1966.
3. Я. С. Градштейн и Я. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Москва 1962.

## Резюме

## ПОЛЗУЧЕСТЬ ПОЛУПЛОСКОСТИ ПРИ СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ

В работе обсуждается задача, касающаяся полуплоскости из вязко-упругого материала, подчиняющегося линейной теории старения Арутюняна, при смешанных краевых условиях, соответствующих трещине Гриффита. Путем применения интегрального преобразования Фурье и элементов теории обобщенных функций задача сводится к системе интегральных уравнений, для которых дается замкнутое решение. В особенности определяются перемещения в части отверстия, получая интересный результат, выражающий ползучесть той части края в виде произведения упругого решения и функции ползучести.

## Summary

## THE CREEPING OF A HALF-PLANE AT MIXED BOUNDARY CONDITIONS

Considered here is the problem of a half-plane made of visco-elastic material subjected to the Arutunian theory of ageing, at mixed boundary conditions corresponding to Griffith's crack. By means of the Fourier integral transformation and elements of the theory of distribution, the problem has been reduced to a set of integral equations for which the exact closed solution is given. In particular, the displacements are determined in a portion of the slit, yielding an interesting result that expresses the creeping of this part of the boundary as the product of elastic displacement and the creep function.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 30 lipca 1969 r.