

UOGÓLNIENIE PROBLEMU GWOZDIEWA
NOŚNOŚCI GRANICZNEJ RUR CIENKOŚCIENNYCH
NA PRZYPADK DZIAŁANIA CIŚNIENIA WEWNĘTRZNEGO

JACEK SKRZYPEK I MICHAŁ ŻYCZKOWSKI (KRAKÓW)

1. Problem Gwozdiewa

Podczas analizy bardziej złożonych zagadnień teorii plastyczności rozwiązanie pełnego układu szesnastu równań staje się uciążliwe, a niekiedy wręcz niemożliwe. Bardzo przydatne okazują się wówczas rozwiązania przybliżone, zapewniające spełnienie tylko niektórych z nich, prowadząc bądź to do dolnej oceny nośności granicznej (w przypadku rozwiązań statycznie dopuszczalnych), bądź też do oszacowania górnego (przy rozwiązaniach kinematycznie dopuszczalnych).

A. A. GWOZDIEW [4] badał nośność graniczną rur cienkościennych w dość ogólnym następującym stanie obciążenia: siła osiowa N , dwie siły poprzeczne T_x i T_y , dwa momenty zginające M_{gx} i M_{gy} oraz moment skręcający M_z . Zastosował on podejście, dla którego M. ŻYCZKOWSKI [8] proponuje nazwę «statycznie częściowo dopuszczalne», charakteryzujące się spełnieniem jeszcze mniejszej liczby równań niż rozwiązanie statycznie dopuszczalne, a więc warunków plastyczności oraz warunków brzegowych, jednak bez warunków równowagi wewnętrznej. Taka metoda nie gwarantuje uzyskania dolnego oszacowania nośności granicznej; wręcz przeciwnie, otrzymujemy tu z reguły oszacowanie górne, jednakże prowadzi do rozwiązań prostszych przy dokładności często wystarczającej. W omawianym zadaniu A. GWOZDIEW posłużył się metodą wariacyjną formułując problem w następującej postaci: poszukujemy maksymalnej wartości jednego z obciążeń

$$(1.1) \quad p_i = \int_0^{2\pi} f_i[\sigma_{kl}(\varphi)] d\varphi$$

przy izoperymetrycznych warunkach na pozostałe obciążenia

$$(1.2) \quad p_j = \int_0^{2\pi} f_j[\sigma_{kl}(\varphi)] d\varphi = l_j, \quad j \neq i$$

oraz przy dodatkowym warunku (warunek plastyczności) w postaci równania algebraicznego dla naprężeń σ_{kl} :

$$(1.3) \quad G[\sigma_{kl}(\varphi)] = 0.$$

Tak sformułowane zagadnienie rozwiązano metodą mnożników Lagrange'a (przy jednoczesnej parametryzacji warunku (1.3)), dokonując ekstremalizacji funkcjonału

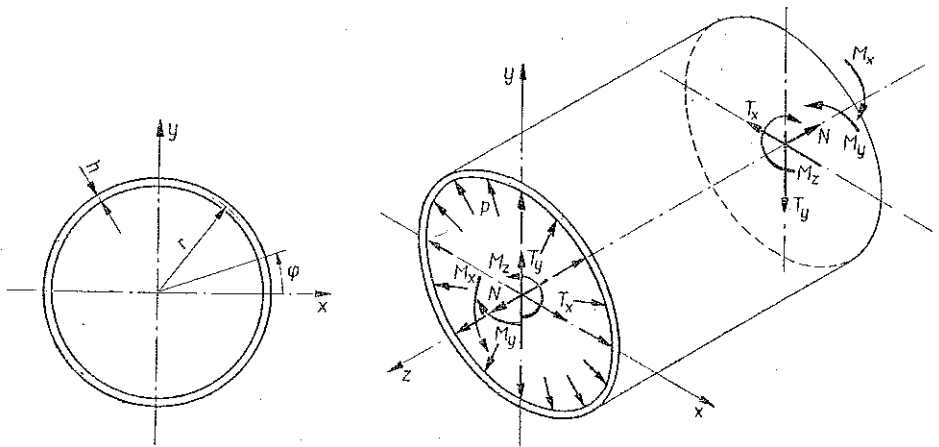
$$(1.4) \quad F[\sigma_{kl}(\varphi)] = \int_0^{2\pi} \left\{ \lambda_i f_i[\sigma_{kl}(\varphi)] + \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j[\sigma_{kl}(\varphi)] \right\} d\varphi, \quad j \neq i.$$

Mnożnik λ_i , w zasadzie niepotrzebny (równy jedności), dodano tu dla uzyskania symetrii zapisu. Rozwiązanie podano w postaci ogólnych wzorów całkowych, których stosowanie zilustrowano przykładami numerycznymi.

Otrzymane w [4] rozwiązanie, choć bardzo ogólne, nie uwzględnia jednak najważniejszego bodajże (w przypadku rurociągów) obciążenia, mianowicie ciśnienia wewnętrznego. Celem obecnej pracy jest uogólnienie problemu Gwozdiewa przez wprowadzenie, oprócz wymienionych powyżej, dodatkowego obciążenia — ciśnienia.

2. Sformułowanie zagadnienia

Będziemy brać pod uwagę nośność graniczną rury cienkościennej w siedmiokrotnie złożonym stanie obciążenia ($p; N, T_x, T_y, M_{gx}, M_{gy}, M_z$) (rys. 1). Przy założeniu braku obwodowego zginania w uplastycznionej strefie rury stan naprężenia



Rys. 1

wyznaczają trzy składowe σ_z , σ_φ i $\tau_{z\varphi}$ ⁽¹⁾. Muszą one spełniać warunek plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego

$$(2.1) \quad \sigma_z^2 - \sigma_z \sigma_\varphi + \sigma_\varphi^2 + 3\tau_{z\varphi}^2 = \sigma_0^2,$$

gdzie σ_0 oznacza granicę plastyczności oraz dodatkowo

$$(2.2) \quad \sigma_\varphi = \frac{r}{h} p = \text{const},$$

⁽¹⁾ Wpływ obwodowego zginania rury w ścianie na nośność graniczną rury cienkościennej badali M. Mrowiec i M. Życzkowski [5] i [6].

gdzie r oznacza średni promień, h grubość ścianki rury. Nie jest na ogół spełniony warunek równowagi wewnętrznej

$$(2.3) \quad \frac{\partial \tau_{z\varphi}}{\partial \varphi} = 0,$$

wymagany w każdym razie przy braku sił poprzecznych w rurze.

Pozostałe obciążenia można obecnie napisać w postaci

$$(2.4) \quad \begin{aligned} N &= \int_0^{2\pi} \sigma_z h r d\varphi, & M_{gx} &= \int_0^{2\pi} \sigma_z h r^2 \sin \varphi d\varphi, & M_{gy} &= \int_0^{2\pi} \sigma_z h r^2 \cos \varphi d\varphi, \\ M_s = M_z &= \int_0^{2\pi} \tau_{z\varphi} h r^2 d\varphi, & T_x &= \int_0^{2\pi} \tau_{z\varphi} h r \sin \varphi d\varphi, & T_y &= \int_0^{2\pi} \tau_{z\varphi} h r \cos \varphi d\varphi. \end{aligned}$$

W dalszych rozważaniach wygodniej będzie posłużyć się zapisem bezwymiarowym, mianowicie

$$(2.5) \quad \begin{aligned} n &= \frac{N}{\sigma_0 h 2\pi r}, & m_x &= \frac{M_{gx}}{4\sigma_0 h r^2}, & m_y &= \frac{M_{gy}}{4\sigma_0 h r^2}, \\ m_z &= \frac{\sqrt{3} M_z}{\sigma_0 h 2\pi r}, & q_x &= \frac{\sqrt{3} T_x}{4\sigma_0 h r}, & q_y &= \frac{\sqrt{3} T_y}{4\sigma_0 h r} \end{aligned}$$

oraz

$$(2.6) \quad q = \frac{r}{h\sigma_0} p.$$

Wprowadzimy jeszcze dogodną parametryzację warunku plastyczności

$$(2.7) \quad 3\tau_{z\varphi}^2 = \sigma_0^2 \sin^2 \psi, \quad \sigma_z^2 - \sigma_z \sigma_\varphi + \sigma_\varphi^2 = \sigma_0^2 \cos^2 \psi,$$

zapewniającą tożsamościowe spełnienie warunku (2.1). Parametryzacja ta uogólnia parametryzację Gwozdiewa, którą można otrzymać przyjmując $\sigma_\varphi = 0$. Można teraz wyrazić składowe stanu naprężenia jako funkcję nowej zmiennej $\psi(\varphi)$:

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \tau_{z\varphi} &= \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \sin \psi, \\ \sigma_\varphi &= \text{const}, \end{aligned}$$

$$\sigma_z = \sigma_{z1} = \frac{1}{2} [\sigma_\varphi - \sqrt{4\sigma_0^2 \cos^2 \psi - 3\sigma_\varphi^2}] \quad \text{dla} \quad \varphi_1^* < \varphi < \varphi_2^*$$

lub

$$\sigma_z = \sigma_{z2} = \frac{1}{2} [\sigma_\varphi + \sqrt{4\sigma_0^2 \cos^2 \psi - 3\sigma_\varphi^2}] \quad \text{dla} \quad \varphi_1^* < \varphi < 2\pi + \varphi_1^*$$

przy czym σ_z obliczono jako pierwiastki równania kwadratowego (2.7)₂. Występujące tutaj kąty graniczne φ_1^* i φ_2^* rozgraniczają na przekroju poprzecznym dwie

strefy uzasadniające wybór znaku plus lub minus podczas całkowania naprężenia σ_z (rys. 2). Znajdowanie kątów granicznych zostanie szerzej omówione w p. 3.

Wprowadzając (2.8) do wzorów (2.4) i uwzględniając (2.5) można obecnie wszystkie obciążenia przedstawić jako funkcję $\psi(\varphi)$ oraz stałego naprężenia $\sigma_\varphi = \text{const}$:

$$\begin{aligned}
 n &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{\varphi_1^*}^{\varphi_2^*} \left[\frac{\sigma_\varphi}{2\sigma_0} - \sqrt{\cos^2 \psi - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\varphi^2}{\sigma_0^2}} \right] d\varphi + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\varphi_2^*}^{2\pi + \varphi_1^*} \left[\frac{\sigma_\varphi}{2\sigma_0} + \sqrt{\cos^2 \psi - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\varphi^2}{\sigma_0^2}} \right] d\varphi \right\}, \\
 m_x &= \frac{1}{4} \left\{ \int_{\varphi_1^*}^{\varphi_2^*} \left[\frac{\sigma_\varphi}{2\sigma_0} - \sqrt{\cos^2 \psi - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\varphi^2}{\sigma_0^2}} \right] \sin \varphi d\varphi + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\varphi_2^*}^{2\pi + \varphi_1^*} \left[\frac{\sigma_\varphi}{2\sigma_0} + \sqrt{\cos^2 \psi - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\varphi^2}{\sigma_0^2}} \right] \sin \varphi d\varphi \right\}, \\
 (2.9) \quad m_y &= \frac{1}{4} \left\{ \int_{\varphi_1^*}^{\varphi_2^*} \left[\frac{\sigma_\varphi}{2\sigma_0} - \sqrt{\cos^2 \psi - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\varphi^2}{\sigma_0^2}} \right] \cos \varphi d\varphi + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\varphi_2^*}^{2\pi + \varphi_1^*} \left[\frac{\sigma_\varphi}{2\sigma_0} + \sqrt{\cos^2 \psi - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\varphi^2}{\sigma_0^2}} \right] \cos \varphi d\varphi \right\}, \\
 m_z &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \psi d\varphi, \\
 t_x &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin \psi \sin \varphi d\varphi, \\
 t_y &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin \psi \cos \varphi d\varphi.
 \end{aligned}$$

Dzięki temu zamiast poszukiwać obciążeń z warunku ekstremum funkcjonu $F(\sigma_{kl})$ (1.4) względem naprężeń σ_x i $\tau_{x\varphi}$ (trzecie naprężenie σ_φ zgodnie z (2.4) jest stałe) będziemy korzystać z warunku maksimum nowego funkcjonu

$$(2.10) \quad \tilde{F}[\psi(\varphi)] = \int_0^{2\pi} \left\{ \lambda_i f_i[\varphi, \psi(\varphi)] + \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j[\varphi, \psi(\varphi)] \right\} d\varphi, \quad j \neq i,$$

ze względu na funkcję $\psi(\varphi)$, który przy uwzględnieniu (2.4) – (2.6) przyjmuje prostą postać

$$(2.11) \quad \tilde{F}[\psi(\varphi)] = \lambda_1 2\pi n + \lambda_2 2\pi m_z + \lambda_3 4m_y + \lambda_4 4t_x + \lambda_5 4m_x + \lambda_6 4t_y.$$

Po zastąpieniu obciążeń przez wielkości (2.9) i uporządkowaniu otrzymujemy

$$(2.12) \quad \tilde{F}[\psi(\varphi)] = \int_{\varphi_1^*}^{\varphi_2^*} g_1[\varphi, \psi(\varphi)] d\varphi + \int_{\varphi_2^*}^{2\pi + \varphi_1^*} g_2[\varphi, \psi(\varphi)] d\varphi,$$

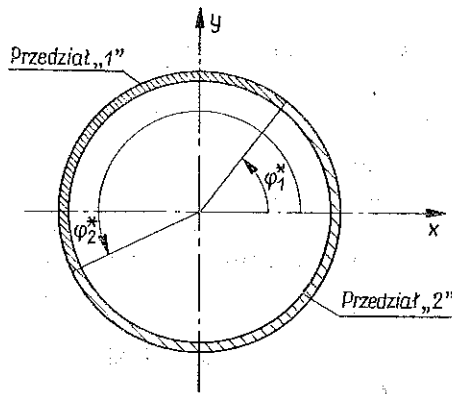
gdzie

$$(2.13) \quad g_1 = (\lambda_1 + \lambda_3 \cos \varphi + \lambda_5 \sin \varphi) \left(\frac{\sigma_\varphi}{2\sigma_0} - \sqrt{\cos^2 \psi - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\varphi^2}{\sigma_0^2}} \right) +$$

$$+ (\lambda_2 + \lambda_4 \sin \varphi + \lambda_6 \cos \varphi) \sigma_0 \sin \psi,$$

$$g_2 = (\lambda_1 + \lambda_3 \cos \varphi + \lambda_5 \sin \varphi) \left(\frac{\sigma_\varphi}{2\sigma_0} + \sqrt{\cos^2 \psi - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\varphi^2}{\sigma_0^2}} \right) +$$

$$+ (\lambda_2 + \lambda_4 \sin \varphi + \lambda_6 \cos \varphi) \sigma_0 \sin \psi.$$



Rys. 2

3. Rozwiązanie ogólne

Zajmijmy się obecnie wyznaczeniem przybliżonej wartości obciążeń wyczerpujących nośność graniczną. W tym celu należy znaleźć takie funkcje $\psi_1(\varphi)$ i $\psi_2(\varphi)$ (odpowiednio w przedziałach $(\varphi_1^*, \varphi_2^*)$ oraz $(\varphi_2^*, 2\pi + \varphi_1^*)$) oraz kąty graniczne φ_1^* i φ_2^* , przy których funkcjonal (2.12) osiąga maksimum. Prowadzi to najpierw do dwóch równań Eulera w poszczególnych przedziałach, które wobec braku pochodnych ψ' w wyrażeniach podcałkowych mają postać:

$$(3.1) \quad \frac{\partial g_1}{\partial \psi_1} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial g_2}{\partial \psi_2} = 0.$$

Kąty graniczne wyznaczmy natomiast z warunku ciągłości⁽²⁾

$$(3.2) \quad g_1 = g_2, \quad \text{dla} \quad \varphi = \varphi_1^* \quad \text{i} \quad \varphi = \varphi_2^*.$$

⁽²⁾ Do równania (3.2) można również dojść traktując (2.11) formalnie jako funkcjonal z ruchomymi końcami i stosując dodatkowe warunki ekstremalizacji ze względu na φ_1^* i φ_2^* .

Powyższe trzy warunki po wykorzystaniu (2.12) i wykonaniu niezbędnych działań prowadzą do następujących równań:

$$(3.3) \quad (\lambda_1 + \lambda_3 \cos \varphi + \lambda_5 \sin \varphi) \sin \psi_1 + (\lambda_2 + \lambda_4 \sin \varphi + \lambda_6 \cos \varphi) \sqrt{\cos^2 \psi_1 - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\varphi^2}{\sigma_0^2}} = 0,$$

$$(\lambda_1 + \lambda_3 \cos \varphi + \lambda_5 \sin \varphi) \sin \psi_2 - (\lambda_2 + \lambda_4 \sin \varphi + \lambda_6 \cos \varphi) \sqrt{\cos^2 \psi_2 - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\varphi^2}{\sigma_0^2}} = 0$$

oraz

$$(3.4) \quad \lambda_1 + \lambda_3 \cos \varphi^* + \lambda_5 \sin \varphi^* = 0.$$

Rozwiązując równania (3.3) ze względu na funkcje ψ_1 i ψ_2 otrzymujemy odpowiednio w przedziałach $(\varphi_1^*, \varphi_2^*)$ oraz $(\varphi_2^*, 2\pi + \varphi_1^*)$

$$(3.5) \quad \sin \psi_1 = - \frac{\kappa (\lambda_2 + \lambda_4 \sin \varphi + \lambda_6 \cos \varphi) \sqrt{1 - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\varphi^2}{\sigma_0^2}}}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3 \cos \varphi + \lambda_5 \sin \varphi)^2 + (\lambda_2 + \lambda_4 \sin \varphi + \lambda_6 \cos \varphi)^2}},$$

$$\sin \psi_2 = + \frac{\kappa (\lambda_2 + \lambda_4 \sin \varphi + \lambda_6 \cos \varphi) \sqrt{1 - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\varphi^2}{\sigma_0^2}}}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3 \cos \varphi + \lambda_5 \sin \varphi)^2 + (\lambda_2 + \lambda_4 \sin \varphi + \lambda_6 \cos \varphi)^2}},$$

gdzie dla skrócenia zapisu wprowadzono oznaczenie

$$(3.6) \quad \kappa = \text{sign}(\lambda_1 + \lambda_3 \cos \varphi + \lambda_5 \sin \varphi).$$

Ponieważ jednak zgodnie z przyjętymi definicjami przedziałów 1 i 2 w przedziale $(\varphi_1^*, \varphi_2^*)$

$$(3.7) \quad \kappa = \kappa_1 = \text{sign}(\lambda_1 + \lambda_3 \cos \varphi + \lambda_5 \sin \varphi) = -1,$$

natomiast w przedziale $(\varphi_2^*, 2\pi + \varphi_1^*)$

$$(3.8) \quad \kappa = \kappa_2 = \text{sign}(\lambda_1 + \lambda_3 \cos \varphi + \lambda_5 \sin \varphi) = 1,$$

zatem ostatecznie

$$(3.9) \quad \sin \psi_1 = \sin \psi_2 = \frac{(\lambda_2 + \lambda_4 \sin \varphi + \lambda_6 \cos \varphi) \sqrt{1 - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\varphi^2}{\sigma_0^2}}}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3 \cos \varphi + \lambda_5 \sin \varphi)^2 + (\lambda_2 + \lambda_4 \sin \varphi + \lambda_6 \cos \varphi)^2}}.$$

Kąty graniczne φ_1^* i φ_2^* określa równanie (3.4), mianowicie

$$(3.10) \quad \cos \varphi_1^* = \frac{-\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_5 \sqrt{\lambda_3^2 - \lambda_1^2 + \lambda_5^2}}{\lambda_3^2 + \lambda_5^2},$$

$$\cos \varphi_2^* = \frac{-\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_5 \sqrt{\lambda_3^2 - \lambda_1^2 + \lambda_5^2}}{\lambda_3^2 + \lambda_5^2}.$$

W końcowych wzorach na obciążenia zanika jednak problem kąta granicznego. Aby to wykazać, zauważmy, że zgodnie z (3.5) mamy

$$(3.11) \quad \cos^2 \psi_1 = \cos^2 \psi_2 = \frac{(\lambda_1 + \lambda_3 \cos \varphi + \lambda_5 \sin \varphi)^2 + \frac{3}{4} \frac{\sigma_\varphi^2}{\sigma_0^2} (\lambda_2 + \lambda_4 \sin \varphi + \lambda_6 \cos \varphi)^2}{(\lambda_1 + \lambda_3 \cos \varphi + \lambda_5 \sin \varphi)^2 + (\lambda_2 + \lambda_4 \sin \varphi + \lambda_6 \cos \varphi)^2}$$

Obliczając następnie w przedziałach 1 i 2 wartość wyrażenia

$$\sqrt{\cos^2 \psi - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\varphi^2}{\sigma_0^2}}$$

otrzymujemy w przedziale $(\varphi_1^*, \varphi_2^*)$

$$(3.12) \quad \sqrt{\cos^2 \psi_1 - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\varphi^2}{\sigma_0^2}} = \frac{\kappa_1 (\lambda_1 + \lambda_3 \cos \varphi + \lambda_5 \sin \varphi) \sqrt{1 - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\varphi^2}{\sigma_0^2}}}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3 \cos \varphi + \lambda_5 \sin \varphi)^2 + (\lambda_2 + \lambda_4 \sin \varphi + \lambda_6 \cos \varphi)^2}}$$

oraz w przedziale $(\varphi_2^*, 2\pi + \varphi_1^*)$

$$(3.13) \quad \sqrt{\cos^2 \psi_2 - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\varphi^2}{\sigma_0^2}} = \frac{\kappa_2 (\lambda_1 + \lambda_3 \cos \varphi + \lambda_5 \sin \varphi) \sqrt{1 - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\varphi^2}{\sigma_0^2}}}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3 \cos \varphi + \lambda_5 \sin \varphi)^2 + (\lambda_2 + \lambda_4 \sin \varphi + \lambda_6 \cos \varphi)^2}}$$

Wynika stąd po uwzględnieniu (3.7)–(3.8) dla obu przedziałów odpowiednio

$$(3.14) \quad \sqrt{\cos^2 \psi_1 - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\varphi^2}{\sigma_0^2}} = -\sqrt{\cos^2 \psi_2 - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\varphi^2}{\sigma_0^2}} = -\frac{(\lambda_1 + \lambda_3 \cos \varphi + \lambda_5 \sin \varphi) \sqrt{1 - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\varphi^2}{\sigma_0^2}}}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3 \cos \varphi + \lambda_5 \sin \varphi)^2 + (\lambda_2 + \lambda_4 \sin \varphi + \lambda_6 \cos \varphi)^2}}$$

co oznacza, że funkcje podcałkowe (2.9) mają w przedziałach 1 i 2 tę samą postać. Ostatecznie więc po wykorzystaniu periodyczności tych funkcji otrzymujemy następujące wzory na bezwymiarowe obciążenia wyczerpujące nośność graniczną

$$(3.15) \quad n = \frac{\sigma_\varphi}{2\sigma_0} + \frac{1}{2\pi} \sqrt{1 - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\varphi^2}{\sigma_0^2}} \times \int_0^{2\pi} \frac{(\lambda_1 + \lambda_3 \cos \varphi + \lambda_5 \sin \varphi) d\varphi}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3 \cos \varphi + \lambda_5 \sin \varphi)^2 + (\lambda_2 + \lambda_4 \sin \varphi + \lambda_6 \cos \varphi)^2}}$$

$$m_x = \frac{1}{4} \sqrt{1 - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\varphi^2}{\sigma_0^2}} \times \int_0^{2\pi} \frac{(\lambda_1 + \lambda_3 \cos \varphi + \lambda_5 \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3 \cos \varphi + \lambda_5 \sin \varphi)^2 + (\lambda_2 + \lambda_4 \sin \varphi + \lambda_6 \cos \varphi)^2}}$$

$$\begin{aligned}
 m_y &= \frac{1}{4} \sqrt{1 - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\varphi^2}{\sigma_0^2}} \times \\
 &\quad \times \int_0^{2\pi} \frac{(\lambda_1 + \lambda_3 \cos \varphi + \lambda_5 \sin \varphi) \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3 \cos \varphi + \lambda_5 \sin \varphi)^2 + (\lambda_2 + \lambda_4 \sin \varphi + \lambda_6 \cos \varphi)^2}}, \\
 m_z &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{1 - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\varphi^2}{\sigma_0^2}} \times \\
 &\quad \times \int_0^{2\pi} \frac{(\lambda_2 + \lambda_4 \sin \varphi + \lambda_6 \cos \varphi) d\varphi}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3 \cos \varphi + \lambda_5 \sin \varphi)^2 + (\lambda_2 + \lambda_4 \sin \varphi + \lambda_6 \cos \varphi)^2}}, \\
 t_x &= \frac{1}{4} \sqrt{1 - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\varphi^2}{\sigma_0^2}} \times \\
 &\quad \times \int_0^{2\pi} \frac{(\lambda_2 + \lambda_4 \sin \varphi + \lambda_6 \cos \varphi) \sin \varphi d\varphi}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3 \cos \varphi + \lambda_5 \sin \varphi)^2 + (\lambda_2 + \lambda_4 \sin \varphi + \lambda_6 \cos \varphi)^2}}, \\
 t_y &= \frac{1}{4} \sqrt{1 - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\varphi^2}{\sigma_0^2}} \times \\
 &\quad \times \int_0^{2\pi} \frac{(\lambda_2 + \lambda_4 \sin \varphi + \lambda_6 \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3 \cos \varphi + \lambda_5 \sin \varphi)^2 + (\lambda_2 + \lambda_4 \sin \varphi + \lambda_6 \cos \varphi)^2}}
 \end{aligned}
 \tag{3.15}$$

[c.d.]

oraz dodatkowo

$$q = \frac{\sigma_\varphi}{\sigma_0} \tag{3.16}$$

Całki występujące we wzorach (3.15) są całkami eliptycznymi typu

$$J = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{R(\sin \varphi, \cos \varphi) d\varphi}{\sqrt{a_0 + a_1 \cos \varphi + a_2 \sin \varphi + a_3 \cos^2 \varphi + a_4 \sin \varphi \cos \varphi + a_5 \sin^2 \varphi}}, \tag{3.17}$$

gdzie R jest funkcją wymierną. Droga podstawienia

$$t = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \tag{3.18}$$

można je zawsze sprowadzić do postaci algebraicznej [2]

$$J = 2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{R\left[\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right] dt}{\sqrt{b_0 t^4 + b_1 t^3 + b_2 t^2 + b_3 t + b_4}}, \tag{3.19}$$

przy czym

$$\begin{aligned}
 b_0 &= a_0 - a_1 + a_3, & b_1 &= 2(a_2 - a_4), & b_2 &= 2(a_0 - a_3 + 2a_5), \\
 b_3 &= 2(a_2 + a_4), & b_4 &= a_0 + a_1 + a_3, & t_1 &= \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}, & t_2 &= \operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2}.
 \end{aligned}
 \tag{3.20}$$

Dalsza redukcja całek (3.19) do kombinacji normalnych całek eliptycznych pierwszego, drugiego i trzeciego rodzaju nastęca w ogólnym przypadku wiele trudności ze względu na nierozkładalne wyrażenie w mianowniku funkcji wymiernej R . W szczególnych przypadkach można zazwyczaj znaleźć podstawienie prostsze od (3.18).

4. Przykład

Obecnie podamy przykład zastosowania wyprowadzonych w p. 3 wzorów (3.15) – (3.16) do nieco węższej klasy obciążeń, w której występuje ciśnienie wewnętrzne q , siła osiowa n , moment zginający m_y , oraz siła poprzeczna t_x .

Przyjmując mianowicie

$$(4.1) \quad \lambda_2 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0$$

otrzymujemy we wzorach (3.15) (w mianownikach funkcji podcałkowych) wyrażenie $[(\lambda_1 + \lambda_3 \cos \varphi)^2 + \lambda_4^2 \sin^2 \varphi]^{1/2}$ symetryczne względem $\varphi=0$ oraz $\varphi=\pi$. Dla tych obciążeń więc, dla których licznik funkcji podcałkowej jest odpowiednio antysymetryczny względem $\varphi=0$ i $\varphi=\pi$ otrzymujemy w wyniku całkowania zero. Zatem trzy spośród obciążeń znikają, mianowicie

$$(4.2) \quad \begin{aligned} m_x &= \frac{1}{4} \sqrt{1 - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\varphi^2}{\sigma_0^2}} \int_0^{2\pi} \frac{(\lambda_1 + \lambda_3 \cos \varphi) \sin \varphi d\varphi}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3 \cos \varphi)^2 + \lambda_4^2 \sin^2 \varphi}} = 0, \\ m_z &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{1 - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\varphi^2}{\sigma_0^2}} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda_4 \sin \varphi d\varphi}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3 \cos \varphi)^2 + \lambda_4^2 \sin^2 \varphi}} = 0, \\ t_y &= \frac{1}{4} \sqrt{1 - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\varphi^2}{\sigma_0^2}} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda_4 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3 \cos \varphi)^2 + \lambda_4^2 \sin^2 \varphi}} = 0. \end{aligned}$$

Pozostałe trzy obciążenia po wprowadzeniu nowych oznaczeń

$$(4.3) \quad A_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_3}, \quad A_4 = \frac{\lambda_4}{\lambda_3}$$

przyjmują obecnie postać

$$(4.4) \quad \begin{aligned} n &= \frac{\sigma_\varphi}{2\sigma_0} + \frac{1}{\pi} \sqrt{1 - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\varphi^2}{\sigma_0^2}} \int_0^\pi \frac{(A_1 + \cos \varphi) d\varphi}{\sqrt{(A_1 + \cos \varphi)^2 + A_4^2 \sin^2 \varphi}}, \\ m_y &= \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\varphi^2}{\sigma_0^2}} \int_0^\pi \frac{(A_1 + \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{(A_1 + \cos \varphi)^2 + A_4^2 \sin^2 \varphi}}, \\ t_x &= \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\varphi^2}{\sigma_0^2}} \int_0^\pi \frac{A_4 \sin^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{(A_1 + \cos \varphi)^2 + A_4^2 \sin^2 \varphi}}. \end{aligned}$$

Stosując następnie podstawienie

$$(4.5) \quad \vartheta = 2 \operatorname{arcc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\alpha_1 (1 - \cos \varphi)}{\alpha_2 (1 + \cos \varphi)}},$$

gdzie

$$(4.6) \quad \alpha_1^2 = \left(-1 - \frac{1}{1 - A_4^2} \right)^2 + \frac{A_1^2 + A_4^2}{1 - A_4^2} - \frac{A_1^2}{(1 - A_4^2)^2},$$

$$\alpha_2^2 = \left(1 - \frac{1}{1 - A_4^2} \right)^2 + \frac{A_1^2 + A_4^2}{1 - A_4^2} - \frac{A_1^2}{(1 - A_4^2)^2}$$

i wykorzystując odpowiednie wzory redukcyjne [2 i 3] można wszystkie całki z (4.4) wyrazić w postaci kombinacji liniowej normalnych, pełnych całek eliptycznych \mathbb{K} , \mathbb{E} i \mathbb{H} otrzymując ostatecznie ⁽³⁾

$$(4.7) \quad n = \frac{\sigma_\varphi}{2\sigma_0} \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1 - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\varphi^2}{\sigma_0^2}}{1 - A_1^2}} \left[(b - A_1) \mathbb{K}(k) + \frac{b^2(a-b)}{b^2-1} \mathbb{H}\left(\frac{1}{b^2-1}, k\right) \right],$$

$$m_y = \sqrt{\frac{1 - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\varphi^2}{\sigma_0^2}}{1 - A_1^2}} \left\{ \left[b(b - A_1) + \frac{b^2(a-b)^2}{1 - b^2} \right] \mathbb{K}(k) + \right.$$

$$\left. + \frac{b^2(a-b)^2}{(b^2-1)(k'^2 + k^2 b^2)} \mathbb{E}(k) + \frac{b^2(a-b)}{b^2-1} \left[2b - A_1 + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{b^2(a-b)(1 - 2k^2 + 2b^2 k^2)}{(b^2-1)(k'^2 + k^2 b^2)} \right] \mathbb{H}\left(\frac{1}{b^2-1}, k\right) \right\},$$

$$t_x = A_4 \sqrt{\frac{1 - \frac{3}{4} \frac{\sigma_\varphi^2}{\sigma_0^2}}{1 - A_1^2}} \left\{ \left[(b^2 - 1) + \frac{b^2(a-b)^2}{b^2-1} \right] \mathbb{K}(k) - \right.$$

$$\left. - \frac{b^2(a-b)^2}{(b^2-1)(k'^2 + k^2 b^2)} \mathbb{E}(k) - \frac{b^3(a-b)}{b^2-1} \left[2 + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{b(a-b)(1 - 2k^2 + k^2 b^2)}{(b^2-a)(k'^2 + k^2 b^2)} \right] \mathbb{H}\left(\frac{1}{b^2-1}, k\right) \right\},$$

gdzie

$$(4.8) \quad a = -\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}, \quad b = -\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2},$$

$$k^2 = \frac{1 - A_1^2 - A_4^2}{1 - A_1^2}, \quad k'^2 = 1 - k^2.$$

⁽³⁾ Szczegółowe rozważania zawiera praca [7].

Bezwymiarowe ciśnienie wewnętrzne określone jest wprost wzorem (3.19). Równania (4.7) oraz (4.8) opisują w formie parametrycznej powierzchnię graniczną w czterowymiarowej przestrzeni obciążeń (q, n, m_y, t_x) . Można z nich łatwo wyeliminować siłę osiową przyjmując mianowicie w pierwszym ze wzorów (4.7) $n=0$; wówczas

$$(4.9) \quad q=2 \left[(b-A_1) \mathbb{K}(k) + \frac{b^2(a-b)}{b^2-1} \Pi \left(\frac{1}{b^2-1}, k \right) \right] \left\{ \frac{\pi^2}{4} (1-A_1^2) + \right. \\ \left. + 3 \left[(b-A_1) \mathbb{K}(k) + \frac{b^2(a-b)}{b^2-1} \Pi \left(\frac{1}{b^2-1}, k \right) \right]^2 \right\}^{-1/2}.$$

Dwa pozostałe obciążenia (m_y, t_x) , otrzymujemy wstawiając do wzorów (4.7), zamiast σ_φ/σ_0 wyrażenie (4.9):

$$(4.10) \quad m_y = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{\pi^2}{4} (1-A_1^2) + 3 \left[(b-A_1) \mathbb{K}(k) + \frac{b^2(a-b)}{b^2-1} \Pi \left(\frac{1}{b^2-1}, k \right) \right]^2 \right\}^{-1/2} \times \\ \times \left\{ \left[b(b-A_1) - \frac{b^2(a-b)^2}{b^2-1} \right] \mathbb{K}(k) + \frac{b^2(a-b)^2}{(b^2-1)(k'^2+k^2b^2)} \mathbb{E}(k) + \right. \\ \left. + \frac{b^2(a-b)}{b^2-1} \left[2b-A_1 + \frac{b^2(a-b)(1-2k^2+2k^2b^2)}{(b^2-1)(k'^2+k^2b^2)} \right] \Pi \left(\frac{1}{b^2-1}, k \right) \right\}, \\ t_x = A_4 \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{\pi^2}{4} (1-A_1^2) + 3 \left[(b-A_1) \mathbb{K}(k) + \frac{b^2(a-b)}{b^2-1} \Pi \left(\frac{1}{b^2-1}, k \right) \right]^2 \right\}^{-1/2} \times \\ \times \left\{ \left[b^2-1 + \frac{b^2(a-b)^2}{b^2-1} \right] \mathbb{K}(k) - \frac{b^2(a-b)^2}{(b^2-1)(k'^2+k^2b^2)} \mathbb{E}(k) - \right. \\ \left. - \frac{b^3(a-b)}{b^2-1} \left[2 + \frac{b(a-b)(1-2k^2+2k^2b^2)}{(b^2-1)(k'^2+k^2b^2)} \right] \Pi \left(\frac{1}{b^2-1}, k \right) \right\}.$$

Drogą przejścia granicznego $A_1 \rightarrow 0$ można z powyższych wzorów wyeliminować ciśnienie i uzyskać podaną przez GWOZDIEWA [4] krzywą (m_y, t_x) ,

$$(4.11) \quad m_y = \frac{1}{1-A_4^2} [\mathbb{E}(1-A_4^2)^{1/2} - A_4^2 \mathbb{K}(1-A_4^2)^{1/2}], \\ t_x = \frac{A_4}{1-A_4^2} [\mathbb{K}(1-A_4^2)^{1/2} - \mathbb{E}(1-A_4^2)^{1/2}], \quad A_4^2 \leq 1.$$

Rozkłady naprężeń oraz inne przypadki szczególne zawiera praca [7].

5. Uwagi końcowe

Przedstawione w tej pracy rozwiązanie (3.15) i (3.16), uzyskane drogą ekstremalizacji funkcjonala (2.11) przy pominięciu niektórych warunków pobocznych, nie jest na ogół rozwiązaniem ścisłym. Spełnia ono bowiem warunek plastyczności

i odpowiednie warunki brzegowe, natomiast równanie równowagi, które np. przy braku sił poprzecznych przybiera prostą postać

$$(5.1) \quad \tau_{z\varphi} = \text{const}(\varphi)$$

nie jest zazwyczaj spełnione. Przez dobór odpowiednich pól kinematycznych [7] można w niektórych przypadkach wykazać, że rozwiązanie to określa górną ocenę nośności granicznej.

Jedynie w dość trywialnym przypadku kołowo-symetrycznym: ciśnienie wewnętrzne, siła osiowa i moment skręcający ($\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0$) naprężenie $\tau_{z\varphi}$ jest stałe:

$$(5.2) \quad \tau_{z\varphi} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{\lambda_2 \sqrt{1 - \frac{3\sigma_\varphi^2}{4\sigma_0^2}}}{\lambda_1} = \text{const}(\varphi),$$

co oznacza, że rozwiązanie jest zarazem statycznie dopuszczalne, a więc (wobec jednoczesnej kinematycznej dopuszczalności) ściśle.

Literatura cytowana w tekście

1. В. М. Беляков, Р. И. Кравцова, М. Г. Рапопорт, *Таблицы эллиптических интегралов*, 1–2, изд. АН СССР, Москва 1962–1963.
2. P. F. BYRD, M. D. FRIEDMAN, *Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists*, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1954.
3. М. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Москва 1952.
4. А. А. Гвоздев, *Расчет несущей способности конструкции по методу предельного равновесия*, Стройиздат, 1949.
5. M. MROWIEC, *Limit state of thin pipeline under combined internal pressure and bending moment*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. tech., 4, 15 (1967); Rozpr. Inżyn., 3, 14 (1966) [pełny tekst w języku polskim].
6. M. MROWIEC, M. ŻYCZKOWSKI, *Krzywe nośności granicznej dla cienkościennego rurociągu poddanego ciśnieniu wewnętrznemu i zginaniu*, Rozpr. Inżyn., 4, 15 (1967).
7. J. SKRZYPEK, *Przybliżone rozwiązanie problemu nośności granicznej w złożonych przypadkach obciążeń rurociągów cienkościennych*, Zesz. Kom. Mech. Stosow. Oddz. Krak. PAN [w druku].
8. M. ŻYCZKOWSKI, *Obciążenia złożone w teorii plastyczności*, Bibl. Mech. Stos. [w przygotowaniu].

Резюме

ОБОБЩЕНИЕ ЗАДАЧИ ГВОЗДЕВА, НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ТОНКОСТЕННЫХ ТРУБ, НА СЛУЧАЙ ДЕЙСТВИЯ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

Решена задача несущей способности сечения тонкостенной трубы при одновременном действии внутреннего давления, осевой силы, двух изгибающих моментов, двух поперечных сил и крутящего момента. Это является непосредственным обобщением решения А. Гвоздева, на случай существования внутреннего давления. Примененный вариационный подход, состоящий в экстремализации функционала (2.12)–(2.13) приводит, как правило, к кинема-

тически допускаемым решениям и одновременно к частично статически допускаемым. Единственно в некоторых простых случаях (давление, растяжение, кручение), когда удовлетворяется условию внутреннего равновесия, (2.3) оно является точным решением. Приведение общих интегральных формул (3.15) к нормальным эллиптическим интегралам иллюстрируется на примере.

Summary

GENERALIZATION OF THE GVOZDEV'S PROBLEM OF LIMIT CARRYING CAPACITY OF THIN-WALLED TUBES TO THE CASE OF THE ACTION OF INTERNAL PRESSURE

The problem of limit carrying capacity is solved of a thinwalled tube under the simultaneous action of internal pressure, axial force, two bending moments, two shear forces and torque. This is a direct generalization of A. Gvozdev's solution to the case of the appearance of internal pressure. The applied variational approach consisting of extremization of the functional (2.12) – (2.13) leads here as a rule to kinematically admissible solutions (and simultaneously to statically partially admissible). Only in certain simple cases of loads (pressure, tension, twisting), when the condition of internal equilibrium (2.3) is satisfied, it does constitute an exact solution. Reduction of the general integral formulae (3.15) to the normal elliptical integrals is illustrated by an example.

KATEDRA MECHANIKI TECHNICZNEJ
POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 28 lutego 1970 r.