

ROZSZERZANIE SIĘ DWÓCH LEPKO-SPRĘŻYSTYCH WALCÓW
NAŁOŻONYCH NA SIEBIE

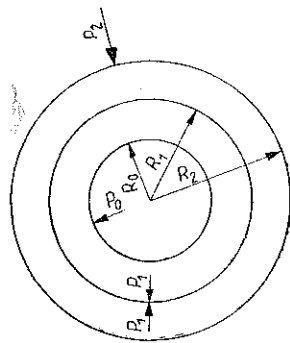
ADOLF ZAJĄC (KRAKÓW)

Wstęp

Zagadnienie rozszerzania się walca wykonanego z materiału lepkosprężystego, wzmocnionego sprężystą powłoką, rozpatrywane jest w książkach D. R. BLANDA [4] i W. NOWACKIEGO [9] (z powołaniem się na prace [8 i 13]). Zamieszczono tam rozwiązanie tego problemu, kiedy materiał walca odpowiada modelowi MAXWELLA [8] oraz VOIGTA [13]. W pracy tej czynimy próbę uogólnienia zagadnienia na przypadek, kiedy materiał walca oraz powłoki stanowią ciała odpowiadające modelowi Zenera. Przyjmiemy również, że powłoka poddana jest ciśnieniu zewnętrznemu. Rozwiążemy najpierw problem, gdy walec i powłoka są ośrodkami sprężystymi. Następnie, wykorzystując zasadę odpowiedniości (podaną przez BIOTA) między sprężystymi a lepkosprężystymi rozwiązaniami, wyprowadzimy wzory na transformaty składowych tensorów stanu naprężenia i odkształcenia.

1. Rozwiązanie dla układu sprężystego

Rozpatrzmy niograniczony walec o promieniu wewnętrznym R_0 i zewnętrznym R_1 , na który nałożony został swobodnie lub też przy użyciu siły drugi walec o promieniu wewnętrznym R_1 i zewnętrznym R_2 (rys. 1) (w dalszym ciągu nałożony walec nazywać będziemy powłoką). Stałe Lamégo walca oraz powłoki oznaczać będziemy odpowiednio przez N i M oraz przez N_0 i M_0 . Walec poddany jest ciśnieniu wewnętrznemu p_0 . Zewnętrzna powierzchnia walca oraz wewnętrzna powłoki cały czas ściśle kontaktują z sobą i oddziałują na siebie ciśnieniem p_1 , równym co do wielkości lecz przeciwnie skierowanym. Obciążenie zewnętrznej powierzchni powłoki wynosi p_2 .



Rys. 1

Przyjmiemy płaski, osiowo-symetryczny stan naprężenia i odkształcenia. Równanie równowagi wewnętrznej, wyrażone w przemieszczeniach, oraz związki fizyczne w tym przypadku (w układzie współrzędnych biegunowych) mają postać

$$(1.1) \quad \frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r^2} = 0$$

oraz

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= 2Ne_r + Me, & \sigma_\varphi &= 2Ne_\varphi + Me, & \sigma_z &= Me, \\ \tau_{r\varphi} &= N\gamma_{r\varphi} = 0, & \tau_{rz} &= N\gamma_{rz} = 0, & \tau_{\varphi z} &= N\gamma_{\varphi z} = 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad e = e_r + e_\varphi + e_z.$$

We wzorach tych u_r oznacza przemieszczenie radialne dowolnego punktu walca (lub powłoki),

$$\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z, \tau_{r\varphi}, \tau_{rz}, \tau_{\varphi z} \text{ oraz } e_r, e_\varphi, e_z, \gamma_{r\varphi}, \gamma_{rz}, \gamma_{\varphi z}$$

odpowiednio składowe tensorów stanu naprężenia oraz odkształcenia punktów walca (lub powłoki), a N, M oraz N_0, M_0 — stałe Lamégo materiału walca oraz powłoki (¹).

Rozwiązaniem równania (1.1) jest funkcja

$$(1.3) \quad u_r = \frac{A}{2r} + Br,$$

gdzie A i B oznaczają stałe całkowania.

Na podstawie (1.3) zależność (1.2) przedstawimy w postaci

$$(1.4) \quad \sigma_r = -\frac{NA}{r^2} + 2(N+M)B, \quad \sigma_\varphi = \frac{NA}{r^2} + 2(N+M)B, \quad \sigma_z = 2MB.$$

Dla powłoki możemy napisać wzory analogiczne do (1.3) – (1.4). Stałe całkowania A, B oraz A_0, B_0 obliczymy z następujących warunków brzegowych:

dla walca

$$(1.5) \quad \sigma_r(R_0) = p_0, \quad \sigma_r(R_1) = p_1,$$

dla powłoki

$$(1.6) \quad \sigma_r^0(R_1) = p_1, \quad \sigma_r^0(R_2) = p_2.$$

Przyjmijmy za autorem pracy [12], że oddziaływanie p_1 jest wprost proporcjonalne do przemieszczenia punktów na brzegu $r=R_1$, co przez przyrównanie odpowiednio z reakcją powłoki i walca prowadzi do równań

$$(1.7) \quad p_1 = \alpha_0 u_r(R_1), \quad p_1 = \alpha u_r^0(R_1),$$

gdzie α_0 i α oznaczają współczynniki proporcjonalności. Równocześnie musi być spełniony warunek ciągłości odkształceń na powierzchni $r=R_1$:

$$(1.8) \quad u_r(R_1) = u_r^0(R_1).$$

(¹) W dalszym ciągu symbol 0 umieszczony po prawej stronie u góry lub dołu danej wielkości oznaczać będzie, że odnosi się ona do powłoki.

Biorąc pod uwagę wzory (1.4) (zarówno dla walca jak i powłoki) oraz zależności (1.5) – (1.8) znajdujemy

$$(1.9) \quad A = \frac{R_1^2 R_0^2 (p_1 - p_0)}{N(R_1^2 - R_0^2)}, \quad B = \frac{p_1 R_1^2 - p_0 R_0^2}{2(N+M)(R_1^2 - R_0^2)},$$

$$A_0 = \frac{R_1^2 R_2^2 (p_2 - p_1)}{N_0(R_2^2 - R_1^2)}, \quad B_0 = \frac{p_2 R_2^2 - p_1 R_1^2}{2(N_0+M_0)(R_2^2 - R_1^2)},$$

$$p_1 = \frac{p_0 [R_0^2(2N+M)N_0(N_0+M_0)(R_2^2 - R_1^2)] + p_2 [R_2^2(2N_0+M_0)N(N+M)(R_1^2 - R_0^2)]}{[R_0^2(N+M) + NR_1^2][N_0(N_0+M_0)(R_2^2 - R_1^2)] + [R_2^2(N_0+M_0) + N_0R_1^2][N(N+M)(R_1^2 - R_0^2)]},$$

$$\alpha = \alpha_0.$$

Stałe A, B, A_0 i B_0 oraz wzory (1.3) i (1.4) określają składowe tensorów stanu odkształcenia i naprężenia punktów walca oraz powłoki.

2. Rozwiązanie dla przypadku materiałów reologicznych

Założmy, że zarówno walec jak i powłoka wykazują własności reologiczne. Związki (1.2) możemy przedstawić w formie

$$(2.1) \quad F = 2NJ, \quad \sigma_r + \sigma_\varphi + \sigma_z = 3Ke,$$

gdzie F i J są dewiatorami naprężeń i odkształceń, a $K = (2N+M)/3$ jest modułem ściśliwości ośrodka.

Uwzględnimy obecnie lepko-sprężyste własności materiału. Oprzemy się na analogii sprężysto-lepkosprężystej sformułowanej przez BIOTA [1, 2 i 3], według której dla ośrodków lepko-sprężystych związki fizyczne (1.2) (jak również równania równowagi wewnętrznej) są takie same jak dla ośrodka sprężystego z tą różnicą, że zamiast stałych N i M przyjmiemy odpowiednie operatory różniczkowe.

Jako szczególny przypadek tych operatorów przyjmiemy następujący [2]:

$$(2.2) \quad N = D \frac{N_1}{D + \beta} + N_2,$$

gdzie N_1 i N_2 oznaczają stałe materiałowe ośrodka, β jest stałą relaksacji, t czasem oraz $D \equiv d/dt$.

Opierając się na wzorze (2.2) sprowadzamy wyrażenie (2.1) do postaci

$$(2.3) \quad F = \frac{2(N_1 + N_2)}{\beta} \dot{J} + 2N_2 J - \frac{\dot{F}}{\beta}.$$

We wzorze tym \dot{F}, \dot{J} oznaczają odpowiednio dewiator prędkości naprężeń oraz odkształceń.

Wprowadźmy oznaczenia [11]

$$(2.4) \quad N_2 = G, \quad \frac{\mu}{\beta} = \frac{N_1 + N_2}{\beta} = \eta, \quad \frac{1}{\beta} = \tau, \quad T = \frac{\eta}{N_2} = \frac{\eta}{G},$$

gdzie $N_1 + N_2 = \mu$ to natychmiastowy moduł sprężystości postaciowej, G oznacza długotrwały moduł sprężystości postaciowej, τ czas relaksacji naprężeń, T czas opóźnienia sprężystego oraz η lepkość postaciową. Przy takich oznaczeniach wzory (2.2) i (2.3) przyjmują postać

$$(2.5) \quad F = 2GJ + 2\eta\dot{J} - \tau\ddot{F}$$

oraz

$$(2.6) \quad N = \frac{D\eta + G}{D\tau + 1}.$$

Wzory (2.3) i (2.5) jak wiadomo są równaniami stanu dla ośrodków odpowiadających trójparametrowemu modelowi ZENERA [9 i 11] (zwanym inaczej ciałem Poyntinga-Thomsona [6] lub ciałem standardowym [7]), który łączy własności reologiczne ciała Voigta (opóźnienie sprężyste) i Maxwella (relaksacja naprężeń). Zamieszczona poniżej tablica 1 przedstawia równania stanu ciał, które zawiera ośrodek Zenera jako ciało reologiczne złożone. Równania te wynikają ze wzorów (2.1) i (2.6).

Tablica 1

L.p.	η	G	τ	Równanie stanu	Nazwa ośrodka
1	0	0	0	$F = 0$	ciecz Pascala
2	η	0	0	$F = 2\eta\dot{J}$	ciecz Newtona
3	η	0	τ	$F = 2\eta\dot{J} - \tau\ddot{F}$	ciecz Maxwella
4	0	G	0	$F = 2GJ$	ciało Hooke'a
5	η	G	0	$F = 2GJ + 2\eta\dot{J}$	ciało Voigta
6	η	G	τ	$F = 2GJ + 2\eta\dot{J} - \tau\ddot{F}$	ciało Zenera
7	η	G	$\tau = T$	$F = 2GJ$	ciało Hooke'a z uwzględnieniem zjawiska opóźnienia sprężystego

Przyjmować będziemy w dalszym ciągu, że przy nagłych odkształceniach (dla $t=0$) ośrodek zachowuje się sprężyste, natomiast przy powolnej deformacji wykazuje własności lepkosprężyste [2]. Ponieważ pierwsze z równań (2.1) opisuje zmiany postaciowe (a nie objętościowe, które w stosunku do postaciowych można pominąć), przeto założymy, że moduły ściśliwości walca K i powłoki K_0 są stałe. Wobec tego z równości (2.6) wynikają następujące związki:

$$\begin{aligned}
 N &= N_1 + N_2 = \mu, & M &= \frac{3K - 2\mu}{3} = \lambda, & N_0 &= N_1^0 + N_2^0 = \mu_0, \\
 M_0 &= \frac{3K_0 - 2\mu_0}{3} = \lambda_0 & \text{dla } t &= 0; \\
 (2.7) \quad N &= \frac{D\eta + G}{D\tau + 1}, & M &= \frac{D(3K\tau - 2\eta) + 3K - 2G}{3(D\tau + 1)}, & N_0 &= \frac{D\eta_0 + G_0}{D\tau_0 + 1}, \\
 M_0 &= \frac{D(3K_0\tau_0 - 2\eta_0) + 3K_0 - 2G_0}{3(D\tau_0 + 1)} & \text{dla } t &> 0.
 \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę ostatnie wzory oraz pamiętając, że $D = d/dt$, wyprowadzamy ze wzorów (1.2) równania różniczkowe względem zmiennej t :

$$\begin{aligned}
 (2.8) \quad \tau \frac{\partial \sigma_r}{\partial t} + \sigma_r &= 2 \left(\eta \frac{\partial e_r}{\partial t} + G e_r \right) + a_1 \frac{\partial e}{\partial t} + a_2 e, \\
 \tau \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial t} + \sigma_\varphi &= 2 \left(\eta \frac{\partial e_\varphi}{\partial t} + G e_\varphi \right) + a_1 \frac{\partial e}{\partial t} + a_2 e, \\
 \tau \frac{\partial \sigma_z}{\partial t} + \sigma_z &= a_1 \frac{\partial e}{\partial t} + a_2 e, \\
 a_1 &= \frac{3K\tau - 2\eta}{3}, & a_2 &= \frac{3K - 2G}{3}.
 \end{aligned}$$

W celu rozwiązania układu równań (2.8) zastosujemy metodę przekształceń całkowych Laplace'a:

$$\begin{aligned}
 (2.9) \quad \sigma_r(r, s) &= -\frac{NA(s)}{r^2} + 2(N+M)B(s) + \frac{{}^p F_r}{s\tau + 1}, \\
 \sigma_\varphi(r, s) &= \frac{NA(s)}{r^2} + 2(N+M)B(s) + \frac{{}^p F_\varphi}{s\tau + 1}, \\
 \sigma_z(s) &= 2MB(s) + \frac{{}^p F_z}{s\tau + 1}, \\
 N &= \frac{s\eta + G}{s\tau + 1}, & M &= \frac{s(3K\tau - 2\eta) + 3K - 2G}{3(s\tau + 1)}, \\
 {}^p F_r &= \tau {}^p \sigma_r - 2\eta {}^p e_r - a_1 {}^p e, \\
 {}^p F_\varphi &= \tau {}^p \sigma_\varphi - 2\eta {}^p e_\varphi - a_1 {}^p e, & {}^p F_z &= \tau {}^p \sigma_z - a_1 e.
 \end{aligned}$$

W dalszym ciągu symbol p umieszczony po lewej stronie u góry danej wielkości oznacza, że została ona obliczona w chwili $t=0$. Symbole ${}^p \sigma_r$, ${}^p \sigma_\varphi$, ${}^p \sigma_z$, ${}^p e_r$, ${}^p e_\varphi$, ${}^p e_z$ oznaczają odpowiednio składowe tensorów stanu naprężenia i odkształcenia obliczone w chwili początkowej (dla $t=0$) na podstawie wyników pierwszej części pracy, w których wielkości N i M należy zastąpić przez μ , λ (stałe Lamégo dla $t=0$).

Analogiczne do wzorów (2.9) możemy napisać formuły dla powłoki, przyjmując indeksy 0.

Stałe $A(s)$, $B(s)$, $A_0(s)$, $B_0(s)$ obliczymy z przetransformowanych warunków brzegowych (1.5) i (1.6) zakładając, że p_0 , p_1 i p_2 są funkcjami t :

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \sigma_r(R_0, s) &= p_0(s), & \sigma_r(R_1, s) &= p_1(s), \\ \sigma_r^0(R_1, s) &= p_1(s), & \sigma_r^0(R_2, s) &= p_2(s), \end{aligned}$$

przy czym wielkość $p_1(s)$ przy wykorzystaniu wzorów (1.9) i (2.7) sprowadzamy do postaci następującej:

$$(2.11) \quad \begin{aligned} p_1(s) &= \frac{p_0(s) R_0^2 (R_2^2 - R_1^2) L_1(s) + p_2(s) R_2^2 (R_1^2 - R_0^2) L_2(s)}{R_0^2 (R_2^2 - R_1^2) L_3(s) + 3R_1^2 (R_2^2 - R_1^2) L_4(s) + (R_1^2 - R_0^2) [R_2^2 L_5(s) + 3R_1^2 L_6(s)]}; \\ L_1(s) &= (s\tau + 1)(s\eta_0 + G_0) [s(3K\tau + 4\eta) + 3K + 4G] [s(3K_0\tau_0 + \eta_0) + 3K_0 + G_0], \\ L_2(s) &= (s\tau_0 + 1)(s\eta + G) [s(3K_0\tau_0 + 4\eta_0) + 3K_0 + 4G_0] [s(3K\tau + \eta) + 3K + G], \\ L_3(s) &= (s\tau + 1)(s\eta_0 + G_0) [s(3K_0\tau_0 + \eta_0) + 3K_0 + G_0] [s(3K\tau + \eta) + 3K + G], \\ L_4(s) &= (s\tau + 1)(s\eta + G)(s\eta_0 + G_0) [s(3K_0\tau_0 + \eta_0) + 3K_0 + G_0], \\ L_5(s) &= (s\tau_0 + 1)(s\eta + G) [s(3K\tau + \eta) + 3K + G] [s(3K_0\tau_0 + \eta_0) + 3K_0 + G_0], \\ L_6(s) &= (s\tau_0 + 1)(s\eta + G)(s\eta_0 + G_0) [s(3K\tau + \eta) + 3K + G]; \end{aligned}$$

$$(2.12) \quad \begin{aligned} A(s) &= \frac{R_0^2 R_1^2 (s\tau + 1)}{(R_1^2 - R_0^2)(s\eta + G)} \left[p_1(s) - p_0(s) + \frac{{}^p F_r(R_0) - {}^p F_r(R_1)}{s\tau + 1} \right], \\ B(s) &= \frac{3(s\tau + 1)}{2 [s(3K\tau + \eta) + 3K + G] (R_1^2 - R_0^2)} \left[R_1^2 p_1(s) - R_0^2 p_0(s) + \frac{R_0^2 {}^p F_r(R_0) - R_1^2 {}^p F_r(R_1)}{s\tau + 1} \right], \\ A_0(s) &= \frac{R_1^2 R_2^2 (s\tau_0 + 1)}{(R_2^2 - R_1^2)(s\eta_0 + G_0)} \left[p_2(s) - p_1(s) + \frac{{}^p F_r^0(R_1) - {}^p F_r^0(R_2)}{s\tau_0 + 1} \right], \\ B_0(s) &= \frac{3(s\tau_0 + 1)}{2 (R_2^2 - R_1^2) [s(3K_0\tau_0 + \eta_0) + 3K_0 + G_0]} \times \\ &\quad \times \left[R_2^2 p_2(s) - R_1^2 p_1(s) + \frac{{}^p F_r^0(R_1) R_1^2 - {}^p F_r^0(R_2) R_2^2}{s\tau_0 + 1} \right]. \end{aligned}$$

Wobec tego możemy transformaty składowych tensorów stanu naprężeń i odkształcenia przedstawić w następującej postaci:

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \sigma_r(r, s) &= -\frac{N(s) A(s)}{r^2} + 2 [N(s) + M(s)] B(s) + \frac{{}^p F_r}{s\tau + 1}, \\ \sigma_\varphi(r, s) &= \frac{N(s) A(s)}{r^2} + 2 [N(s) + M(s)] B(s) + \frac{{}^p F_\varphi}{s\tau + 1}, \\ \sigma_z(s) &= 2M(s) B(s) + \frac{{}^p F_z}{s\tau + 1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_r(r, s) &= \frac{A(s)}{2r} + B(s)r, \\
 e_r(r, s) &= -\frac{A(s)}{2r^2} + B(s), \\
 e_\varphi(r, s) &= \frac{A(s)}{2r^2} + B(s).
 \end{aligned}
 \tag{2.13}$$

[c.d.]

Analogiczne wzory (ze wskaźnikiem 0) odnoszą się do powłoki.

Retransformaty Laplace'a można znaleźć np. przez rozkład na ułamki proste. Posługując się twierdzeniami [10]

$$\begin{aligned}
 \lim_{s \rightarrow +\infty} sf(s) &= f(0^+), \\
 \lim_{s \rightarrow 0^+} sf(s) &= f(+\infty)
 \end{aligned}
 \tag{2.14}$$

znajdujemy wartości funkcji (2.13) dla $t=0$ oraz dla $t=\infty$.

Otrzymujemy w ten sposób wzory typu (1.3) – (1.4) wraz ze związkami (1.9) (zarówno dla walca jak i dla powłoki), w których zamiast wielkości N i M należy przyjąć

$$\begin{aligned}
 N = \mu, \quad M = \lambda = (3K - 2\mu)/3 & \quad \text{dla } t=0; \\
 N = G, \quad M = (3K - 2G)/3 & \quad \text{dla } t=\infty.
 \end{aligned}
 \tag{2.15}$$

Wnioski o różnicy między stanem początkowym (dla $t=0$) a końcowym (dla $t=\infty$) punktów ośrodka możemy wyciągnąć w oparciu o znaną nierówność $\mu > G$ [11].

Możemy również zmodyfikować założenia początkowe przyjmując, że w chwili $t=0$ nałożono swobodnie na siebie walce (które ściśle przylegają do siebie) i nie nastąpiły jeszcze przemieszczenia punktów. Warunek ten jest następujący:

$${}^p u_r = {}^p e_r = {}^p e_\varphi = 0, \quad {}^p \sigma_r(R_1) = 0.
 \tag{2.16}$$

W tym przypadku założenie ${}^p u_r \neq 0$ oznacza, że walce zostały nałożone na siebie przy użyciu siły.

3. Szczególne przypadki stanu naprężenia i odkształcenia

Ośrodek odpowiadający modelowi Zenera jest ciałem reologicznie złożonym. Wobec tego zamieszczone w pracy wzory obejmują szczególne przypadki rozwiązania, gdy walec i powłoka są ciałami prostszymi reologicznie od ciała Zenera. Wystarczy w tym celu przyjąć wartość zerową dla jednej lub kilku stałych materiałowych ośrodka. Widoczne to jest z tablicy 1. Istnieją również możliwości równoczesnego przyjmowania różnych własności reologicznych dla walca i powłoki. Takich kombinacji teoretycznie istnieje 91. Wiele z nich będzie praktycznie bezużytecznych.

Pewne modyfikacje rozwiązań można uzyskać, formułując warunki brzegowe (1.5) – (1.6) za pomocą funkcji jednostkowej Heaviside'a $H(t)$:

$$\begin{aligned}
 \sigma_r(R_0) &= p_0(t) = {}^p p_0 \varphi_1(t) H(t), \\
 \sigma_r(R_1) &= p_1(t) = {}^p p_1 \varphi_2(t) H(t)
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

oraz

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \sigma_r^0(R_1) &= p_1(t) = {}^p p_1 \varphi_2(t) H(t), \\ \sigma_r^0(R_2) &= p_2(t) = {}^p p_2 \varphi_3(t) H(t). \end{aligned}$$

Na funkcje $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$ nakładamy warunek posiadania granic dla $t=0$ i dla $t=\infty$, a ich pierwsze pochodne są L -transformowalne [10].

Postać wzorów (3.1) – (3.2) umożliwia gaszenie lub przesunięcie funkcji ciśnień $p_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$.

Z podanego w pracy rozwiązania jako szczególne przypadki wynikają rozwiązania już znane. Np. w mechanice górotworu rozważa się często płaski, osiowo-symetryczny, nieograniczony układ z otworem kołowym, w którym umieszczony jest pierścień obudowy szybu. Układ w nieskończoności obciążony jest stałym ciśnieniem p_2 , a wewnętrzna powierzchnia szybu jest swobodna. Górotwór traktuje się zwykle jako ośrodek nieściśliwy. W naszych wzorach należy wobec tego przyjąć

$$(3.3) \quad R_2 \rightarrow \infty, \quad p_2 = \text{const}, \quad p_0 = 0, \quad K_0 \rightarrow \infty.$$

Przy tych założeniach rozwiązano następujące zagadnienia:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} K \rightarrow \infty, \quad {}^p u_r &\neq 0 & [5], \\ K \rightarrow \infty, \quad {}^p u_r &\neq 0, \quad \eta = 0, \quad \tau = 0 & [5], \\ K \rightarrow \infty, \quad {}^p u_r &\neq 0, \quad \eta_0 = 0, \quad \tau_0 = 0 & [5], \\ {}^p u_r^0 &= 0, \quad \eta = 0, \quad \tau = 0 & [6], \\ {}^p u_r^0 &= 0, \quad \eta = 0, \quad \tau = 0, \quad \tau_0 = 0 & [12], \\ {}^p u_r^0 &= 0, \quad \eta = 0, \quad \tau = 0, \quad G_0 = 0 & [12]. \end{aligned}$$

Przyjmując we wzorach (2.11) – (2.13) $p_2 = \eta_0 = \tau_0 = 0$ uzyskamy rozwiązanie dla przypadku, gdy walec mający własności ciała Zenera, wzmocniony jest sprężystą powłoką. Jeżeli grubość powłoki $R_2 - R_1 = h$ jest mała w porównaniu z promieniem walca R_1 , to należy przyjąć $R_1 = R_2$.

Jeśli powłoka jest tak cienka ($h \ll R_1$), że panujący w niej stan naprężenia traktować można jako błonowy, to należy przyjąć następujące warunki brzegowe [4]:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \sigma_r(R_0) &= p_0, \\ \sigma_r(R_1) &= \gamma \sigma_\varphi(R_1), \\ \gamma &= \frac{\delta(2N+M)}{\delta M - 4N(N+M)}, \quad \delta = \frac{4hN_0(N_0+M_0)}{R_1(2N_0+M_0)} = \text{const}. \end{aligned}$$

Stałe całkowania A i B w tym przypadku mają wartości

$$(3.6) \quad A = \frac{p_0(1-\gamma)R_1^2}{N \left[\gamma \left(\frac{R_1^2}{R_0^2} + 1 \right) - \left(\frac{R_1^2}{R_0^2} - 1 \right) \right]}, \quad B = \frac{p_0(\gamma+1)}{2(N+M) \left[\gamma \left(\frac{R_1^2}{R_0^2} + 1 \right) - \left(\frac{R_1^2}{R_0^2} - 1 \right) \right]}.$$

Postępując podobnie jak w poprzednim punkcie, wyprowadzamy wzory typu (2.13) na składowe tensorów stanu naprężenia i odkształcenia, przy czym stałe $A(s)$ i $B(s)$ określają wzory

$$\begin{aligned}
 A(s) &= \frac{R_1^2(s\tau+1)}{(s\eta+G) \left[\gamma(s) \left(\frac{R_1^2}{R_0^2} + 1 \right) - \left(\frac{R_1^2}{R_0^2} - 1 \right) \right]} \left\{ p_0(s) (1-\gamma(s)) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{{}^pF_r(R_1) - {}^pF_r(R_0)}{s\tau+1} + \frac{\gamma(s) [{}^pF_r(R_0) - {}^pF_\varphi(R_1)]}{s\tau+1} \right\}, \\
 (3.7) \quad B(s) &= \frac{3(s\tau+1)}{\left[\gamma(s) \left(\frac{R_1^2}{R_0^2} + 1 \right) - \left(\frac{R_1^2}{R_0^2} - 1 \right) \right] 2L_7(s)} \left\{ (1+\gamma(s)) \left[p_0(s) - \frac{{}^pF_r(R_0)}{s\tau+1} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{R_1^2 [{}^pF_r(R_0) - \gamma(s) {}^pF_\varphi(R_1)]}{R_0^2(s\tau+1)} \right\}, \\
 \gamma(s) &= \frac{\delta(s\tau+1) [s(3K\tau+4\eta)+3K+4G]}{\delta(s\tau+1) [s(3K\tau-2\eta)+3K-2G] - 4(s\eta+G)L_7(s)}, \\
 L_7(s) &= s(3K\tau+\eta)+3K+G.
 \end{aligned}$$

Przyjmując w ostatnich formułach ${}^pF_r = {}^pF_\varphi = \tau = 0$ uzyskujemy rozwiązanie podane w pracy [13]. Natomiast jeśli ${}^pF_\varphi = {}^pF_r = \tau = 0$, to otrzymujemy wyniki zamieszczone w pracy [8].

Zauważyć należy, że jeśli ośrodek w chwili $t=0$ jest nieobciążony (znajduje się w stanie naturalnym lub pomijamy natychmiastowe sprężyste odkształcenie), to znikają wielkości pF_r , ${}^pF_\varphi$, pF_z i uwzględnienie reologicznych własności ośrodka sprowadza się do formalnego podstawiania operatorów (2.9)₁ do rozwiązania uzyskanego dla ośrodka traktowanego jako ciało sprężyste.

Literatura cytowana w tekście

1. M. A. BIOT, *Theory of stress-strain relation in anisotropic viscoelasticity and relaxation phenomena*, J. Appl. Phys., **25** (1954), 1385.
2. M. A. BIOT, *Theory of deformation of a porous viscoelastic anisotropic solid*, J. Appl. Phys., **24** (1956), 459.
3. M. A. BIOT, *Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media*, J. Appl. Phys., **33** (1962), 1482.
4. Д. Р. БЛАНД, *Теория линейной вязкоупругости* (tłum. z ang.), Изд. Мир, Москва 1965.
5. J. DIMOV, *Wpływ reologicznych własności obudowy na jej współpracę z górotworem*. Praca doktorska, Kraków 1961.
6. H. FILCEK, *Wpływ czasu na stan naprężenia i odkształcenia górotworu w sąsiedztwie wyrobiska chodnikowego*, Zeszyty problemowe górnictwa, Komitet Górnictwa PAN. Zesz. 1 (1963), 61.
7. I. KISIEL, B. ŁYSIK, *Zarys reologii gruntów*, Wyd. Arkady, Warszawa 1966.
8. E. H. LEE, J. R. M. RADOK, W. B. WOODWARD, *Stress analysis for linear viscoelastic materials*, Trans. Soc. Rheologie, **3** (1959), 41.
9. W. NOWACKI, *Teoria pełzania*, Wyd. Arkady, Warszawa 1963.
10. J. OSIŃSKI, *Zarys rachunku operatorowego*, Wyd. Naukowo-Techniczne, Warszawa 1965.
11. А. Р. РЖАНИЦЫН, *Теория ползучести*, Изд. Литературы по строительству, Москва 1968.
12. A. SAŁUSTOWICZ, *Ciśnienie górotworu na obudowę wyrobisk jako funkcja czasu*, Archiwum Górnictwa, **10** (1965), 275.
13. W. B. WOODWARD, J. R. M. RADOK, Brown University, Technical Raport PA-TR-14, (1955).

Резюме

РАСШИРЕНИЕ ДВУХ ВЯЗКО-УПРУГИХ, НАЛОЖЕННЫХ ДРУГ
НА ДРУГА ЦИЛИНДРОВ

В работе, рассматривается бесконечный цилиндр с внутренним радиусом R_0 и внешним R_1 , на котором свободно или при употреблении силы был наложен второй цилиндр называемый в дальнейшем оболочкой, с внутренним радиусом R_1 и внешним радиусом R_2 . Цилиндр подвергается внутреннему давлению p_0 . Наружная и внутренняя поверхность оболочки беспрерывно тесно контактируются с собой и воздействуют на себя давлением p_1 равным по величине, но противоположных по направлению. Нагрузка внешней поверхности оболочки равняется p_2 . Цилиндр и оболочка изготовлены из разных материалов. Для поставленного таким образом вопроса, в работе даются формулы для трансформаты Лапласа составляющих тензоров напряжения и деформации принимая, что величины p_0 , p_1 и p_2 являются функциями времени, а также, что цилиндр и оболочка изготовляются из материалов отвечающих модели Зенера.

Сначала, получено решение для упругой системы. Затем используя упруго-вязко-упругую аналогию сформулированную Биотом, решается задача для случая, когда цилиндр и оболочка обладают реологическими свойствами. В работе дается, также обобщение задачи, «цилиндра упрочненного упругой оболочкой» для случая когда цилиндр является телом Зенера. Ввиду того, что тело Зенера представляет собой реологически сложное тело, из полученных формул вытекают решения, когда цилиндр и оболочка, являются реологически несложными средами. Приведенные здесь результаты, заключают в себе в качестве особых случаев — существующие здесь решения [5, 6, 8, 12 и 13].

Summary

THE EXPANSION OF TWO VISCO-ELASTIC CYLINDERS
SUPERPOSED ON EACH OTHER

In the paper an infinite cylinder is considered having an internal radius R_0 and external R_1 on which there was superposed freely by means of force a second cylinder (subsequently called the shell) having an internal radius R_1 and external radius R_2 . The cylinder is subjected to an internal pressure p_0 . The external surface of the cylinder and the internal surface of the shell are constantly in exact contact with each other and mutually interact with pressure p_1 , equal in magnitude but oppositely directed. The external load of the shell is p_2 . The cylinder and the shell are made of different materials. For the so-formulated problem the expressions are given in the paper for the Laplace transforms of the components of the tensors of stress and deformation, assuming that the quantities p_0 , p_1 and p_2 are functions of the time and that the cylinder and shell are made of materials corresponding to the Zener model.

At first the solution was obtained for the elastic system. Next, utilizing the elasto-viscoelastic analogy formulated by Biot, the problem has been solved for the case when the cylinder and the shell possess rheological properties. Also included in the paper is a generalization of the problem of a «cylinder reinforced with an elastic shell» to the case when the cylinder constitutes a Zener body. Since a Zener body is rheologically complex, from the obtained formulae there follow solutions if the cylinder and shell are rheologically more simple media.

The results derived here contain in them as particular cases already existing results [5, 6, 8, 12 and 13].

KATEDRA FIZYKI
WYŻSZEJ SZKOŁY ROLNICZEJ W KRAKOWIE

Praca została złożona w Redakcji dnia 23 lutego 1970 r.