Rozprawy Inżynierskie
3, 18 (1970)

ZAGADNIENIE OSOBLIWE W PŁASKIM OŚRODKU Z NAPRĘŻENIAMI MOMENTOWYMI

RYSZARD GANOWICZ (POZNAŃ)

1. W pracy niniejszej rozpatrzono zagadnienie nieograniczonego płaskiego ośrodka poddanego działaniu obciążeń skupionych. Rozwiązanie problemu otrzymano wprowadzając dwie funkcje przemieszczeń. Przedstawienie rozwiązania za pomocą funkcji przemieszczeń jest zdaniem autora szczególnie dogodne przy rozpatrywaniu problemów dla obszarów nieograniczonych.

W pracy rozważać będziemy ośrodek z naprężeniami momentowymi przy założeniu, że obroty związane są z przemieszczeniami ($\omega = \text{rot}\,(\underline{u}/2)$). Ten typ ośrodka był przedmiotem rozważań szeregu autorów [1 – 5]. W pracy niniejszej użyjemy oznaczeń takich samych, jakich użył W. Nowacki w pracy [4].

2. Równania równowagi dla rozpatrywanego ośrodka mają postać następującą:

$$\tag{2.1} \begin{aligned} &\sigma_{ij,i} + X_j = 0, \\ &\epsilon_{ij}\sigma_{ij} + m_{i,i} + Y = 0, \qquad i,j = 1,2, \end{aligned}$$

gdzie σ_{ij} oznacza niesymetryczny tensor naprężeń, m_i wektor naprężeń momentowych, X_j wektor sił masowych oraz Y moment masowy.

Tensor naprężeń rozłożymy na część symetryczną i część antysymetryczną:

$$\tag{2.2} \sigma_{ij} = S_{ij} + r_{ij}, \qquad S_{ij} = \frac{\sigma_{ij} + \sigma_{ji}}{2}, \qquad r_{ij} = \frac{\sigma_{ij} - \sigma_{ji}}{2}.$$

Biorąc pod uwagę równanie $(2.1)_2$ część antysymetryczną tensora naprężeń uzależnimy od naprężeń momentowych w sposób następujący:

$$\tag{2.3} r_{ij} = -\frac{1}{2}\epsilon_{ij}(m_{i,i} + Y).$$

Równania konstytutywne dla omawianego ośrodka mają postać

$$\tag{2.4} \begin{aligned} &S_{ij} = 2\mu\gamma_{ij} + \lambda\gamma_{kk}\delta_{ij}, \\ &m_i = 4\mu l^2 \omega_{3,i}. \end{aligned}$$

gdzie μ, λ oznaczają stałe Lamégo, l nową stałą materiałową oraz

$$\gamma_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),$$

$$\omega_3=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right).$$

Następnie wstawiając funkcje $(2.4)_2$ do równania (2.3) otrzymujemy

$$r_{ij}=-\epsilon_{ij}\left[\mu l^2\nabla^2\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)+\frac{1}{2}Y\right]. \tag{2.5}$$

W ten sposób wykazaliśmy, że wszystkie interesujące nas wielkości wyrazić możemy w zależności od przemieszczeń u_i. Układ równań na przemieszczenia u_i otrzymujemy wstawiając wyrażenia $(2.4)_1$ i (2.5) do dwóch pierwszych równań (2.1) po uwzględnieniu związków (2.2):

$$\begin{aligned}&\left[(\mu+\lambda)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\mu\nabla^2-\mu l^2\nabla^2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right]u_1+\frac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial x_2}(\mu+\lambda+\mu l^2\nabla^2)\,u_2+\\ &\qquad\qquad+X_1+\frac{1}{2}\frac{\partial Y}{\partial x_2}=0,\\ &\frac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial x_2}(\mu+\lambda+\mu l^2\nabla^2)\,u_1+\left[(\mu+\lambda)\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\mu\nabla^2-\mu l^2\nabla^2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right]u_2+\\ &\qquad\qquad+X_2-\frac{1}{2}\frac{\partial Y}{\partial x_1}=0.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Posługując się znanym postępowaniem Hilberta [6 i 7] sprowadzamy powyższy układ równań do dwóch oddzielnych równań na dwie funkcje przemieszczeń. Wykonując odpowiednie działania otrzymujemy

$$(2\mu+\lambda)(1-l^2\nabla^2)\nabla^2\nabla^2 F_i=-\Gamma_i, \tag{2.7}$$

gdzie

$$\Gamma_1=X_1+\frac{1}{2}\frac{\partial Y}{\partial x_2},\qquad \Gamma_2=X_2-\frac{1}{2}\frac{\partial Y}{\partial x_1}.$$

Natomiast składowe przemieszczenia związane są z funkcjami przemieszczeń w następujący sposób:

$$\begin{aligned}u_1&=\mu\frac{\partial}{\partial x_1}(1-l^2\nabla^2)\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right)+(2\mu+\lambda)\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_2}-\frac{\partial F_2}{\partial x_1}\right),\\ u_2&=\mu\frac{\partial}{\partial x_2}(1-l^2\nabla^2)\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right)-(2\mu+\lambda)\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_2}-\frac{\partial F_2}{\partial x_1}\right).\end{aligned} \tag{2.8}$$

W ten sposób zagadnienie płaskie sprowadziliśmy do problemu rozwiązania układu równań (2.7) z odpowiednimi warunkami brzegowymi.

Powyżej podane związki są ścisłe dla płaskiego stanu odkształceń. W przypadku płaskiego stanu naprężeń można posłużyć się tymi samymi zależnościami z dokładnością zależną od grubości tarczy, podobnie jak w klasycznej teorii sprężystości. W tym ostatnim przypadku (płaski stan naprężeń) należy zamiast stałej Lamégo λ wprowadzić stałą $\lambda^*=\lambda 2\mu/(2\mu+\lambda)$.

3. Rozważmy płaszczyznę x_1, x_2 poddaną działaniu sił masowych $X_1=P\delta(x_1)\,\delta(x_2)$, $X_2=0$, $Y=0$. Przypadek ten odpowiada nieograniczonej tarczy obciążonej siłą skupioną w płaszczyźnie tarczy w początku układu współrzędnych. Podobne zagadnienie rozpatrywał Y. WEITSMAN [5]. Podał on funkcję naprężeń dla tego zagadnienia, jednak nie udało mu się znaleźć rozwiązania osobliwego dla przemieszczeń.

Celem naszym jest znalezienie całki szczególnej układu równań (2.7) dla $\Gamma_2=0$. Wobec powyższego możemy przyjąć $F_2=0$ i zagadnienie uprości się do rozwiązania następującego równania:

$$(1-l^2\nabla^2)\nabla^2\nabla^2 F_1=-\frac{P}{\mu(2\mu+\lambda)}\delta(x_1)\,\delta(x_2). \tag{3.1}$$

Wykonując na równaniu powyższym podwójną nieskończoną transformację Fouriera

$$\begin{aligned}\bar{N}(\alpha,\beta)&=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\!\!\int N(\xi,\zeta)\exp[i(\alpha\xi+\beta\zeta)]\,d\xi\,d\zeta,\\ N(x_1,x_2)&=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\!\!\int \bar{N}(\alpha,\beta)\exp[-i(\alpha x_1+\beta x_2)]\,d\alpha\,d\beta,\end{aligned} \tag{3.2}$$

otrzymamy rozwiązanie dla funkcji przemieszczeń w postaci całkowej:

$$F_1(x_1,x_2)=-\frac{P}{4\pi^2\mu(2\mu+\lambda)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\!\!\int\frac{\exp[-i(\alpha x_1+\beta x_2)]}{[1+l^2(\alpha^2+\beta^2)](\alpha^2+\beta^2)^2}\,d\alpha\,d\beta. \tag{3.3}$$

Występująca w powyższym wzorze całka nie istnieje jako niewłaściwa; nie udaje się też wydzielić z niej wartości głównej w sensie Cauchy'ego. Należy tutaj posłużyć się pojęciem części skończonej całki rozbieżnej wprowadzonym przez J. HADAMARDA [8]. Podobny problem rozważał autor w pracach [9 i 10]. W pracy [10] podano część skończoną całki rozbieżnej tego samego typu, co całka występująca w wyrażeniu (3.3). Wykorzystując obliczenia zawarte w pracy [10] otrzymujemy rozwiązanie osobliwe dla funkcji przemieszczeń $F_1(x_1, x_2)$ rozpatrywanego zagadnienia:

$$\begin{aligned}F_1(x_1,x_2)=&-\frac{P}{16\pi\mu(2\mu+\lambda)}(x_1^2+x_2^2)\ln(x_1^2+x_2^2)-\\ &-\frac{Pl^2}{2\pi\mu(2\mu+\lambda)}\left[\ln\sqrt{x_1^2+x_2^2}+K_0\left(\frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}{l}\right)\right],\end{aligned} \tag{3.4}$$

gdzie $K_0(\ )$ oznacza zmodyfikowaną funkcję Bessela drugiego rodzaju.

Wykorzystując wzory (2.8) i biorąc pod uwagę że $F_2(x_1, x_2)=0$, otrzymujemy rozwiązanie osobliwe przemieszczeń:

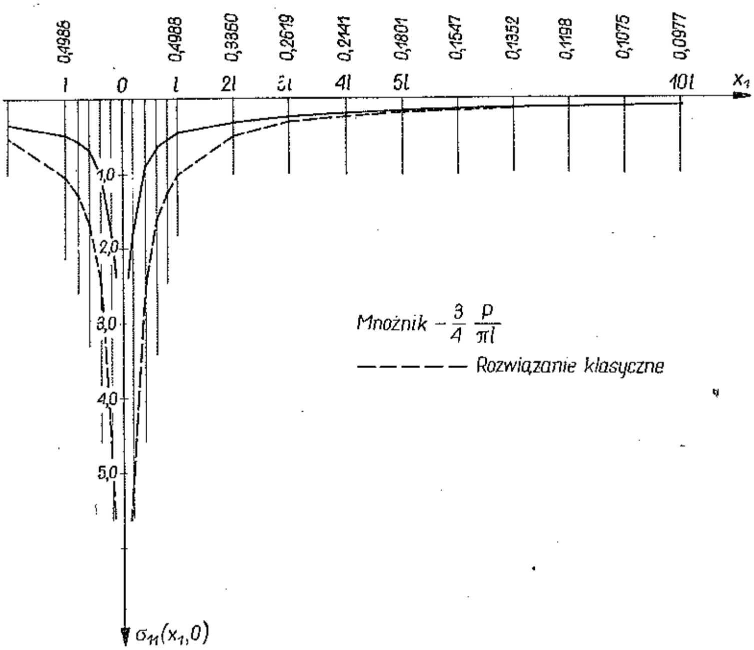
$$
\begin{aligned}
u_1 &= -\frac{P}{8\pi(2\mu+\lambda)}\left[\ln(x_1^2+x_2^2)+\frac{2x_1^2}{x_1^2+x_2^2}+1\right]-\frac{P}{8\pi\mu}\left[\ln(x_1^2+x_2^2)+\right.\\
&\left.+\frac{2x_2^2}{x_1^2+x_2^2}+1\right]-\frac{Pl^2}{2\pi\mu}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left[\ln\sqrt{x_1^2+x_2^2}+K_0\left(\frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}{l}\right)\right],\\
u_2 &= -\frac{P}{8\pi(2\mu+\lambda)}\frac{2x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}+\frac{P}{8\pi\mu}\frac{2x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}+\\
&+\frac{Pl^2}{2\pi\mu}\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\left[\ln\sqrt{x_1^2+x_2^2}+K_0\left(\frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}{l}\right)\right].
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Naprężenia obliczamy wykorzystując związki (2.2) - (2.8) i (3.5). Biorąc pod uwagę, że dla płaskiego stanu naprężeń $\lambda=\nu E/(1-\nu^2)$ otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
\sigma_{11}=S_{11} &= -\frac{P}{4\pi}\frac{\cos\varphi}{r}[3+\nu-2(1+\nu)\sin^2\varphi]-\\
&-\frac{Pl^2}{\pi}\left\{\frac{\cos\varphi(3\sin^2\varphi-\cos^2\varphi)}{r^3}\left[2-2\frac{r}{l}K_1\left(\frac{r}{l}\right)-\frac{r^2}{l^2}K_0\left(\frac{r}{l}\right)\right]-\right.\\
&\left.-\frac{1}{l^3}\cos\varphi\sin^2\varphi K_1\left(\frac{r}{l}\right)\right\},\\
\sigma_{22}=S_{22} &= \frac{P}{4\pi}\frac{\cos\varphi}{r}[1-\nu-2(1+\nu)\sin^2\varphi]+\\
&+\frac{Pl^2}{\pi}\left\{\frac{\cos\varphi(3\sin^2\varphi-\cos^2\varphi)}{r^3}\left[2-2\frac{r}{l}K_1\left(\frac{r}{l}\right)-\frac{r^2}{l^2}K_0\left(\frac{r}{l}\right)\right]-\right.\\
&\left.-\frac{1}{l^3}\cos\varphi\sin^2\varphi K_1\left(\frac{r}{l}\right)\right\},\\
\sigma_{21} &= -\frac{P}{4\pi}\frac{\sin\varphi}{r}[1-\nu+2(1+\nu)\cos^2\varphi]+\\
&+\frac{Pl^2}{\pi}\left\{\frac{\sin\varphi(3\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)}{r^3}\left[2-2\frac{r}{l}K_1\left(\frac{r}{l}\right)-\frac{r^2}{l^2}K_0\left(\frac{r}{l}\right)\right]-\right.\\
&\left.-\frac{1}{l^3}\sin\varphi\cos^2\varphi K_1\left(\frac{r}{l}\right)\right\},\\
\sigma_{12} &= -\frac{P}{4\pi}\frac{\sin\varphi}{r}[1-\nu+2(1+\nu)\cos^2\varphi]+\\
&+\frac{Pl^2}{\pi}\left\{\frac{\sin\varphi(3\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)}{r^3}\left[2-2\frac{r}{l}K_1\left(\frac{r}{l}\right)-\frac{r^2}{l^2}K_0\left(\frac{r}{l}\right)\right]+\right.\\
&\left.+\frac{1}{l_3}\sin^3\varphi K_1\left(\frac{r}{l}\right)\right\},
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

gdzie $r^2=x_1^2+x_2^2$, $\sin\varphi=x_2/r$, $\cos\varphi=x_1/r$.

W podanych powyżej formułach na naprężenia pierwsza część każdego ze wzorów przedstawia rozwiązanie klasyczne, natomiast druga część, zależna od stałej l — wpływ naprężeń momentowych.



Rys. 1

Jako przykład liczbowy przedstawimy wykres funkcji σ_{11} dla $x_2=0$, $\nu=0$ (rys. 1):

$$\sigma_{11}(x_1,0)=-\frac{3}{4}\frac{P}{\pi}\left[\frac{1}{x_1}-\frac{4}{3}\frac{1}{x_1}\,\frac{2-2\dfrac{x_1}{l}K_1\left(\dfrac{x_1}{l}\right)-\dfrac{x_1^2}{l^2}K_0\left(\dfrac{x_1}{l}\right)}{\left(\dfrac{x_1}{l}\right)^2}\right].$$

Jak widać z wykresu podanego na rys. 1, różnica między rozwiązaniem klasycznym i podanym w niniejszej pracy maleje wraz z odległością od punktu przyłożenia siły skupionej. W odległości $x_1=10\,l$ różnica wynosi tylko 2,3%.

4. Jako drugi problem rozważymy nieograniczoną tarczę poddaną działaniu sił masowych w postaci

$$X_1=-Q\delta'(x_1)\,\delta(x_2), \qquad X_2=-Q\delta(x_1)\,\delta'(x_2).$$

Obciążenie to odpowiada działaniu centralnej siły ściskającej. W tym przypadku należy rozwiązać oba równania (2.7), które dla omawianego zagadnienia mają postać następującą:

$$\begin{aligned}&\mu(2\mu+\lambda)(1-l^2\nabla^2)\nabla^2\nabla^2F_1=Q\delta'(x_1)\,\delta(x_2),\\ &\mu(2\mu+\lambda)(1-l^2\nabla^2)\nabla^2\nabla^2F_2=Q\delta(x_1)\,\delta'(x_2).\end{aligned}\tag{4.1}$$

Stosując podwójną nieskończoną transformację Fouriera (3.2) do powyższego układu otrzymamy

$$
(4.2)\quad
\begin{aligned}
F_1 &= -\frac{Q}{4\pi^2\mu(2\mu+\lambda)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\!\!\int \frac{i\alpha\exp[-i(\alpha x_1+\beta x_2)]}{[1+l^2(\alpha^2+\beta^2)](\alpha^2+\beta^2)^2}\,d\alpha\, d\beta,\\
F_2 &= -\frac{Q}{4\pi^2\mu(2\mu+\lambda)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\!\!\int \frac{i\beta\exp[-i(\alpha x_1+\beta x_2)]}{[1+l^2(\alpha^2+\beta^2)](\alpha^2+\beta^2)^2}\,d\alpha\, d\beta.
\end{aligned}
$$

Następnie wykorzystując związki (2.8) otrzymamy przemieszczenia w postaci całkowej:

$$
(4.3)\quad
\begin{aligned}
u_1 &= \frac{Q}{4\pi^2(2\mu+\lambda)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\!\!\int \frac{i\alpha\exp[-i(\alpha x_1+\beta x_2)]}{\alpha^2+\beta^2}\,d\alpha\, d\beta,\\
u_2 &= \frac{Q}{4\pi^2(2\mu+\lambda)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\!\!\int \frac{i\beta\exp[-i(\alpha x_1+\beta x_2)]}{\alpha^2+\beta^2}\,d\alpha\, d\beta.
\end{aligned}
$$

Podobnie jak poprzednio, obliczając część skończoną całek rozbieżnych występujących w powyższych zależnościach (4.3) [9], otrzymujemy rozwiązanie osobliwe dla przypadku działania centralnej siły ściskającej:

$$
u_1 = \frac{Q}{2\pi(2\mu+\lambda)}\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2},\qquad u_2 = \frac{Q}{2\pi(2\mu+\lambda)}\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2},
$$

$$
\sigma_{11} = -\sigma_{22} = -\frac{Q(1-\nu)}{2\pi}\frac{x_1^2-x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2},\qquad \sigma_{12}=\sigma_{21} = -\frac{Q(1-\nu)}{\pi}\frac{x_1x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2}
$$

i we współrzędnych biegunowych:

$$
\sigma_r = -\frac{Q(1-\nu)}{2\pi}\frac{1}{r^2},\qquad \tau_{r\varphi}=0.
$$

Łatwo zauważyć, że powyżej podane rozwiązanie jest identyczne z rozwiązaniem klasycznym. W przypadku działania środkowej siły ściskającej na tarczę nieograniczoną naperężnia momentowe nie pojawiają się.

Stosując taki sam tok postępowania jak podany w niniejszej pracy, można otrzymać dalsze rozwiązania osobliwe np. dla przypadku działania momentu skupionego.

Literatura cytowana w tekście

1. W. T. Koiter, *Couple-stresses in the theory of elasticity* (I) *and* (II), Proc. Konikl. Nederl. Akademie van Wetenschappen, Amsterdam. Series B, 1, **67** (1964).
2. R. D. Mindlin, H. F. Tiersten, *Effects of couple-stresses in linear elasticity*, Arch. Rat. Mech. and Anal., **11** (1962), 415 - 448.
3. A. Dusza, M. Sokołowski, *Naprężenia momentowe w zagadnieniu kontaktowym dla pasma nieskończonego*, Rozpr. Inżyn., 1, **16** (1968), 3 - 19.
4. W. Nowacki, *Couple-stresses in the theory of thermoelasticity*, I, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. tech., **14** (1966), 97 - 106.

5. Y. WEITSMAN, *Two dimensional singular solution in infinite regions with couple-stresses*, Quart. Appl. Math., 4, **25** (1968).
6. S. KALISKI, *Pewne problemy brzegowe dynamicznej teorii sprężystości i ciał niesprężystych*, WAT, Warszawa 1957.
7. W. NOWACKI, *Zagadnienia termosprężystości*, PWN, Warszawa 1960.
8. J. HADAMARD, *Lectures on Cauchy's problem in partial differential equations*, Yale University Press, 1923.
9. R. GANOWICZ, *Wybrane zagadnienia teorii płyt Reissnera i teorii płyt trójwarstwowych*, Mech. Teoret. Stos., 3, **4** (1966), 55 - 95.
10. R. GANOWICZ, *Rozwiązania osobliwe w ogólnej teorii płyt trójwarstwowych*, Mech. Teoret. Stos., 3, **5** (1967), 293 - 307.

Резюме

СИНГУЛЯРНАЯ ЗАДАЧА В ПЛОСКОЙ СРЕДЕ С МОМЕНТНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

В работе дается в виде замкнутых выражений решения плоской бесконечной среды с моментными напряжениями, загруженной последовательно сосредоточенной силой и подверженной действию центра сжатия. Решения получены после введения в обсуждения двух функций перемещений и при применении двойного бесконечного преобразования Фурье.

Summary

THE SINGULAR PROBLEM IN A PLANE MEDIUM WITH MOMENT STRESSES

In the paper the solutions in the form of closed expressions are given for a plane infinite medium with moment stresses successively under a concentrated load and subjected to the action of a compressing centre. The solutions were obtained following the introduction of two functions of displacements into the considerations, and with the application of the double infinite Fourier's transform.

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 grudnia 1969 r.