

ROZWIJANIE SIĘ SIŁ TARCIA
DLA PEWNEGO PRZYPADKU WSPÓŁPRACY DWÓCH BELEK

BENEDYKT BOLIŃSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

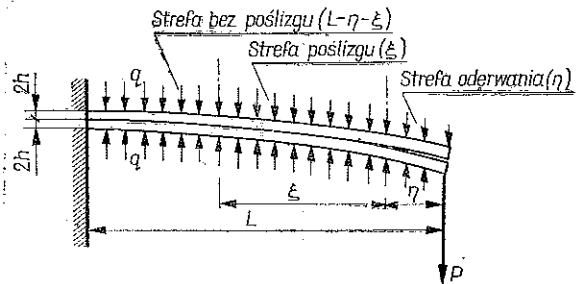
W pracy rozważymy zagadnienie rozwijania się sił tarcia i poślizgu między dwoma wysięgnikowymi belkami, dociskanymi do siebie obciążeniem o intensywności $q = \text{const}$ i obciążonymi siłą P przyłożoną do dolnej belki (rys. 1). Układ taki stanowi pewien wyidealizowany model wielu często spotykanych rozwiązań konstrukcyjnych układów belek, np. uchwytów lub resorów. W układach takich docisk q zrealizowany być może np. układem śrub, nitów, obejm itp. nie pracujących na ścinanie. Jeżeli śruby rozmieszczone są dostatecznie gęsto, to możemy je zastąpić obciążeniem ciągłym o intensywności q .

Zagadnienie rozwijania się sił tarcia i poślizgu pomiędzy dwoma belkami rozważone było w pracy [2 i 3], ale dla przypadku obciążenia dwoma jednakowymi siłami P przyłożonymi do swobodnych końców obydwóch belek.

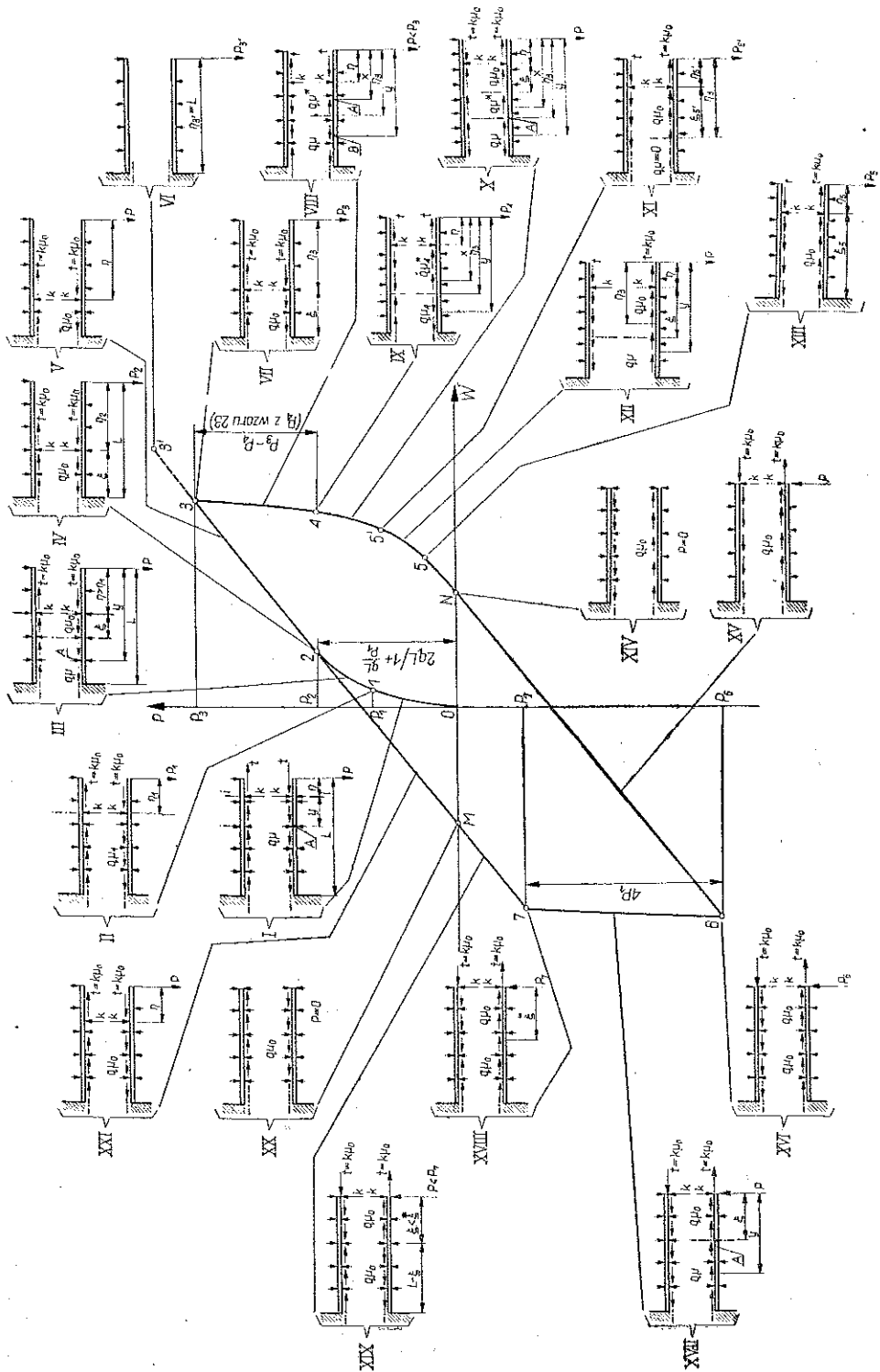
D. D. ELEY w monografii [1]

rozważał zagadnienia w dwóch belkach obciążonych siłą P i połączonych ze sobą spoiwem (klejem). Autor w swojej pierwszej pracy na ten temat [4] rozważył zagadnienie rozwijania się sił tarcia i poślizgu pomiędzy belkami (rys. 1), ale dla przypadku gdy siła P rośnie monotonicznie w przedziale $0 < P < P_3$. W obecnej pracy, która stanowi niejako kontynuację pracy [4], rozważymy problem histerezy powstałej w sytuacji, gdy siła P zmienia się cyklicznie przyjmując wartości $P = 0, P_3, 0, -P_3, 0$ (rys. 2). Histerezę przedstawimy w układzie współrzędnych P, W (gdzie W oznacza ugięcie końca belki obciążonej siłą P).

Zbadanie histerezy jest o tyle istotne, że pole histerezy określa pracę sił tarcia wewnętrzznego (pomiędzy belkami) i jest miarą tłumienia oraz związanych z tym strat energii przy cyklicznie zmiennych obciążeniach. Zbadanie rozwijania się sił tarcia i poślizgów jest również istotne do prawidłowego projektowania takich ukła-



Rys. 1



Rys. 2

dów (np. projektowanie śrub dociskających i koniecznego docisku). Rozpatrywane zagadnienie obliczenia histerezy, gdy traktować je jako problem określenia jednej funkcji $P=f(W)$, jest zagadnieniem nieliniowym i stąd bardzo trudnym do analitycznego rozwiązania. Ażeby uniknąć tych trudności i otrzymać rozwiązanie, histerezę podzielono na szereg przedziałów. Każdy przedział charakteryzuje się jednym określonym rodzajem (mechanizmem) współpracy pomiędzy belkami. Są to na ogół mechanizmy proste z punktu widzenia ich opisu. Żądać będziemy, ażeby każdy z mechanizmów czynił zadość warunkom równowagi oraz ciągłości odkształceń.

Przedział zastosowania takiego mechanizmu jest ograniczony warunkami wynikającymi z rozwinięcia sił tarcia w granicach określonych współczynnikiem tarcia rozwiniętego μ_0 oraz długością rozwijania się strefy poślizgu, której długość nie może przekraczać długości strefy docisków pomiędzy belkami. Uwzględniając powyższe warunki, same mechanizmy (sposoby współpracy belek między sobą) dobieramy metodą kolejnych prób. Jako właściwy przyjmujemy dla danego przedziału obciążeń $P_n \leq P \leq P_{n+1}$ taki mechanizm, który czyniąc zadość wszystkim sformułowanim powyżej warunkom, spełnia ponadto warunki brzegowe razem z sąsiednimi mechanizmami. W pracy nie opisujemy szczegółowo wszystkich kolejnych prób, w wyniku których obieramy dany mechanizm jako odpowiedni dla danego przedziału $P_n \leq P \leq P_{n+1}$, ale ograniczamy się do wykazania, że czyni on zadość warunkom brzegowym.

Ponieważ w pracy [4] przedstawiono szczegółowe rozważania na temat rozwijania się sił tarcia i poślizgu w przedziałach $0 \leq P \leq P_1$, $P_1 \leq P \leq P_2$, $P_2 \leq P \leq P_3$ (rys. 2), przeto w niniejszej pracy ograniczymy się do krótkiego streszczenia przeprowadzonych tam rozważań. Pozostałe przedziały, na które została podzielona histereza, omówimy nieco dokładniej. W pracy korzysta się z liniowej teorii belek, opartej na hipotezie płaskich przekrojów.

2. Przedziały histerezy

2.1. Przedział [0-1]. Pierwszą fazę obciążania belek poprzeczną siłą ($0 \leq P \leq P_1$) przedstawia rys. 2.I. W tym przypadku mamy dwie strefy: oderwania na długości η i przylegania bez poślizgu na długości $L-\eta$. W strefie bez poślizgu ($L-\eta$) oddziaływania sprowadzają się do nacisków i sił stycznych między dociskanymi do siebie płaszczyznami qu (tarcie). Ponieważ naciski q w całej strefie przylegania dla danej siły P są stałe, a pomiędzy obiema strefami występuje skokowa nieciągłość krzywizny belek, to może ona być wywołana tylko skupionym momentem gnącym. Skupiony moment gnący może spowodować jedynie skupiona siła styczna t wywołana siłą k .

Z przyrównania momentów gnących belki górnej M_g i dolnej M_d w przekroju $(i-i)$ [($i-i$) oznacza nieskończenie bliski przekrój z lewej strony przekroju $(i-i)_0$; rys. 2.I] co jest warunkiem koniecznym równości ugięć obu belek w strefie ($L-\eta$), wyznaczamy długość strefy oderwania:

$$\eta = \frac{P}{q}$$

Z równości sił tnących w górnej i dolnej belce w przekroju ($i-i$), co jest również warunkiem koniecznym równych ugięć obu belek w strefie ($L-\eta$), wyznaczamy siłę skupioną:

$$k = \frac{P}{2}.$$

W dowolnym punkcie A wewnętrznych włókien skrajnych strefy bez poślizgu ($L-\eta$) (rys. 2.1) naprężenia normalne σ_A wyrażają się wzorem

$$\sigma_A = \frac{h}{I} \left[\left(\frac{P}{2} - qh\mu \right) y + Ph\mu - th \right] - \frac{1}{F} \left[q\mu y + t - \mu P \right],$$

gdzie symbolem I oznaczono moment bezwładności przekroju poprzecznego belki, a symbolem F pole przekroju poprzecznego belki. Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, ażeby strefa ($L-\eta$) była istotnie strefą, w której nie zachodzi poślizg między belkami, i aby obie belki zginały się jak jedna belka o wysokości $4h$, jest stałość naprężeń σ_A przy zmianie siły P ($\sigma_A = \text{const}$). Przy zginaniu bez poślizgu linia przylegania belek jest jednocześnie osią obojętną dla obydwu belek w tym sensie, że włókna na niej leżące nie wydłużają się, więc naprężenie $\sigma_A = \text{const}$. Powyższy warunek jest ogólniejszy od warunku $\sigma_A = 0$ (na osi obojętnej), ponieważ ten ostatni jest słuszny tylko wtedy, gdy dla $P=0$ oś obojętna jest linią prostą. W dalszych rozważaniach rozpatrywane będą belki z «historią», czyli takie, w których przy $P=0$ oś obojętna nie jest linią prostą, dlatego też będziemy posługiwać się warunkiem ogólniejszym $\sigma_A = \text{const}$. Warunek ten jest równoważny warunkowi $\partial\sigma_A/\partial P = 0$.

Zakładając, że $\mu = \mu(P)$ i $t = t(P)$ po zróżniczkowaniu σ_A względem P otrzymano równanie

$$(2.1) \quad \frac{\partial\sigma_A}{\partial P} = \left[\frac{h}{2I} - \left(\frac{h^2}{I} + \frac{1}{F} \right) q \right] \frac{d\mu}{dP} + \left(\frac{h^2}{I} + \frac{1}{F} \right) \mu + \left(\frac{h^2}{I} + \frac{1}{F} \right) P \frac{d\mu}{dP} - \left(\frac{h^2}{I} + \frac{1}{F} \right) \frac{dt}{dP} = 0.$$

Aby powyższe równanie było spełnione dla dowolnego y w przedziale $\eta \leq y \leq L$ i P w przedziale $0 < P < P_1$, muszą być spełnione dwa równania:

$$(2.2) \quad \frac{h}{2I} - \left(\frac{h^2}{I} + \frac{1}{F} \right) q \frac{d\mu}{dP} = 0$$

oraz

$$(2.3) \quad -\frac{dt}{dP} + P \frac{d\mu}{dP} + \mu = 0.$$

Z rozwiązania równania (2.2) dla warunków początkowych $P=0$, $\mu=0$ otrzymujemy

$$(2.4) \quad \mu = \alpha P$$

gdzie

$$\alpha = \frac{hF}{2q(h^2F + I)}.$$

Dla warunków początkowych $P=0$, $t=0$ otrzymujemy $C=0$, a zatem rozwiązaniem równania (2.3) jest funkcja

$$(2.5) \quad t = \alpha P^2.$$

Koniec pierwszego przedziału współpracy dwóch rozważanych belek może nastąpić, gdy $P=P_1$, i $\mu=\mu_0$, co odpowiada warunkowi

$$(2.6) \quad P_1 = \frac{\mu_0}{\alpha}.$$

Przypadkowi, w którym $P=P_{1''}$, i $t=1/2P_{1''}\mu_0$, odpowiada warunek

$$(2.7) \quad P_{1''} = \frac{\mu_0}{2\alpha}.$$

Ponieważ $P_{1''} < P_1$, zatem jako koniec przedziału przyjmuje się siłę

$$P_1 = P_{1''} = \frac{\mu_0}{2\alpha}.$$

Dla siły $P_1 = \mu_0/2$ współczynnik tarcia $\mu = \mu_1$ i wynosi

$$(2.8) \quad \mu_1 = \frac{\mu_0}{2}.$$

Z powyższego wynika, że gdy pod siłą skupioną $k=P/2$ współczynnik tarcia $\mu=\mu_0$, to w strefie bez poślizgu ($L-\eta$) współczynnik tarcia wynosi $\mu_1=\mu_0/2$. Udowodniono zatem, że poślizg zaczyna się na pograniczu strefy oderwania ze strefą bez poślizgu [rys. 2. II; przekrój ($i-i$)]. Przy $P > P_1$ przyjęty mechanizm współpracy belek przestaje być pożyteczny, ponieważ zaczyna się nowy kolejny przedział współpracy belek, w którym pojawi się obok strefy oderwania i strefy bez poślizgu trzecia strefa — poślizgu.

2.2. Przedział [1-2]. Ponieważ dla sił $P > P_1$, siła t nie może wzrastać (ponieważ już powstało tarcie), należy przyjąć, że pojawi się w tym miejscu nowa strefa, strefa poślizgu. W rozpatrywanym przedziale siła P zawarta w przedziale $P_1 \leq P \leq P_2$ powoduje powstanie trzech stref: oderwania (na długości η), poślizgu z tarcieciem rozwiniętym (na długości ξ) i bez poślizgu (na długości $L-(\eta+\xi)$) z tarcieciem nierozwiniętym (rys. 2.III).

Długość odcinka między belkami, na którym działają siły tarcia nierozwiniętego, wynosi $L-(\eta+\xi)$ (rys. 2.III). Tak jak poprzednio określimy naprężenia w punkcie A strefy bez poślizgu.

Naprężenia powstałe od działania momentu gnącego i siły skierowanej wzdłuż osi w przekroju określonym współrzędną y w punkcie A (rys. 2.III) wynoszą

$$\sigma_A = \frac{h}{I} \left[\frac{1}{2} P y + h P \left(\mu - \frac{\mu_0}{2} \right) + q h \xi (\mu - \mu_0) - q h \mu y \right] + \frac{1}{F} \left[P \left(\mu - \frac{\mu_0}{2} \right) + q (\mu - \mu_0) \xi - q \mu y \right].$$

Warunek konieczny i wystarczający, aby w strefie $[L - (\eta + \xi)]$ nie wystąpił poślizg, jest taki sam, jak w pierwszym przedziale $(0 - I)$, czyli $\partial \sigma_A / \partial P = 0$. Zakładając że $\mu = \mu(P)$ i $\xi = \xi(P)$, otrzymujemy równanie różniczkowe

$$(2.9) \quad \frac{\partial \sigma_A}{\partial P} = \left[\frac{h}{2I} - q \left(\frac{h^2}{I} + \frac{1}{F} \right) \frac{d\mu}{dP} \right] y + \left[\left(\frac{h^2}{I} + \frac{1}{F} \right) P + q \left(\frac{h^2}{I} + \frac{1}{F} \right) \xi \right] \frac{d\mu}{dP} + q \left(\frac{h^2}{I} + \frac{1}{F} \right) (\mu - \mu_0) \frac{d\xi}{dP} + \left(\frac{h^2}{I} + \frac{1}{F} \right) \left(\mu - \frac{\mu_0}{2} \right) = 0$$

Z powyższego otrzymujemy dwa równania

$$(2.10) \quad \frac{h}{2I} - q \left(\frac{h^2}{I} + \frac{1}{F} \right) \frac{d\mu}{dP} = 0,$$

$$(2.11) \quad q(\mu - \mu_0) \frac{d\xi}{dP} + (P + q\xi) \frac{d\mu}{dP} + \mu - \frac{\mu_0}{2} = 0.$$

Równania różniczkowe (2.10) i (2.11) mają dwie niewiadome funkcje $\mu = \mu(P)$ i $\xi(P)$. Rozwiązaniem równania (2.10) jest funkcja:

$$\mu = \alpha P + C, \quad \alpha = \frac{hF}{2q(h^2F + I)}.$$

Zgodnie z rezultatem otrzymanym przez rozpatrzenie końca przedziału $(0 - I)$ warunki początkowe są następujące: dla $P = P_1 = \mu_0/2\alpha$ i $\mu = \mu_0/2$, $C = 0$, a zatem ostatecznym rozwiązaniem równania (2.10) jest funkcja

$$(2.12) \quad \mu = \alpha P.$$

Podstawiając (2.12) do (2.11) oraz biorąc pod uwagę, że $d\mu/dP = \alpha$, otrzymujemy

$$(2.13) \quad \frac{d\xi}{dP} + \frac{\alpha}{\alpha P - \mu_0} \xi = \frac{-2\alpha P + \frac{\mu_0}{2}}{q(\alpha P - \mu_0)}.$$

Rozwiązaniem równania (2.13) jest całka

$$(2.14) \quad \xi = e^{-f} \left[\gamma + \int_{P_1}^P \frac{-2\alpha P + \frac{\mu_0}{2}}{q(\alpha P - \mu_0)} e^f dP \right],$$

gdzie

$$f(P) = \int_{P_1}^P \frac{\alpha}{\alpha P - \mu_0} dP,$$

a γ oznacza wartość stałą, którą należy wyznaczyć z warunków początkowych.

Po dokonaniu podstawień i scałkowaniu równanie (2.14) przyjmuje postać

$$(2.15) \quad \xi = \frac{\alpha P_1 - \mu_0}{\alpha P - \mu_0} \left\{ \gamma + \frac{1}{q(\alpha P_1 - \mu_0)} \left[-\alpha(P^2 - P_1^2) + \frac{\mu_0}{2}(P - P_1) \right] \right\}.$$

Dla warunków początkowych $P = P_1 = \mu_0/2\alpha$ i $\xi = 0$ otrzymujemy $\gamma = 0$, a zatem ostateczna postać funkcji (2.15) jest następująca ⁽¹⁾

$$(2.16) \quad \xi = \frac{-P + P_1}{P - 2P_1} \frac{P}{q}.$$

Strefa poślizgu określona parametrem ξ wcześniej osiągnie przekrój zamocowania belek niż współczynnik tarcia μ w strefie bez poślizgu osiągnie wartość graniczną μ_0 . Z analizy wzorów (2.12) i (2.16) widać, że dla $P = P_1$ długość strefy poślizgu $\xi = 0$. Gdy $P = P_1 + \Delta P$, a ΔP jest dostatecznie mała, wzór (2.16) można przedstawić w następującej postaci:

$$\xi = \frac{P_1 + \Delta P}{P_1 - \Delta P} \frac{\Delta P}{q}.$$

Otrzymana zależność wykazuje, że ξ jest dodatnia dla dodatnich wartości ΔP , co jest zgodne z fizyczną interpretacją zjawiska, wyrażającą się w założeniu dodatniego kierunku ξ . Dla rozważanego przedziału (1 - 2) granicą stosowalności otrzymanych zależności będzie taka sytuacja, gdy strefa poślizgu osiągnie przekrój zamocowania belek, czyli gdy dla pewnej siły $P = P_2$, $\xi = L - \eta_2$, gdzie $\eta_2 = P_2/q$ (rys. 2.IV).

Podstawiając powyższe funkcje do wzoru (2.16) otrzymamy równanie

$$(2.17) \quad L - \frac{P_2}{q} = \frac{-P_2 + P_1}{P_2 - 2P_2} \frac{P_2}{q}.$$

Rozwiązując równanie (2.17) względem siły P_2 , możemy tę siłę obliczyć w zależności od długości belki L i pozostałych parametrów α , μ_0 i q . Siła P_2 określona jest wzorem

$$P_2 = \frac{qL}{\frac{1}{2} + qL \frac{\alpha}{\mu_0}} = \frac{2}{\frac{1}{qL} + \frac{1}{P_1}}.$$

2.3. Przedział [2 - 3]. Charakterystyczną cechą tego przedziału jest istnienie tylko dwóch stref: strefy poślizgu i strefy oderwania (rys. 2.V). Wzrost siły P do

⁽¹⁾ W pracy [4] z powodu błędnego napisania znaku przy wyrazie $\frac{\alpha}{\alpha P - \mu_0} \xi$ w równaniu (13) otrzymano inną funkcję ξ .

wartości P_3 powoduje zupełny zanik strefy poślizgu ξ , a strefa oderwania pojawia się na całej długości belki ($\eta_3=L$), (rys. 2.VI). Dalszy wzrost siły ($P>P_3$) zwiększa jedynie ugięcie dolnej belki bez wpływu na ugięcie górnej belki. W tym przedziale kończy się proces obciążania.

2.4. Przedział [3-4]. Przyjmujemy, że odciażanie belki zaczyna się od wartości równej $P_3 < P_3$. W punkcie tym (rys. 2.VII) nadal istnieje strefa oderwania o długości $\eta_3 = P_3/q$ oraz strefa poślizgu o długości $\xi = L - \eta_3$.

Gdy siła P zmniejsza swą wielkość do $P = P_3 - \Delta P_3$ (gdzie ΔP_3 jest pewnym małym przyrostem), powstaje nowy mechanizm współpracy belek. Szereg prób i rozważań doprowadza do wniosku, że jedynym możliwym w tym przedziale mechanizmem jest mechanizm pokazany na rys. 2.VIII. Mechanizm ten składa się z dwóch stref: oderwania o długości $P/q = \eta$ i bez poślizgu o długości $L - \eta$. Interesującym faktem jest to, że strefa bez poślizgu składa się z dwóch odcinków. Na odcinku pierwszym o długości $L - \eta_3$ siły tarcia $q\mu$ zachowują swój poprzedni zwrot, natomiast na odcinku $\eta_3 - \eta$, który powstał w wyniku zmniejszenia się strefy oderwania, siły tarcia $q\ddot{\mu}$ mają zwrot przeciwny. Jak już podkreśliliśmy powyżej, mechanizm współpracy pokazany na rys. 2.VIII jest jedynym, który prowadzi do rozwiązań czyniących zadość warunkom początkowym. Wszystkie inne mechanizmy wykazują niezgodność z warunkami początkowymi, a nawet prowadzą do paradoksów. Naprężenia w punktach A i B odcinków strefy bez poślizgu $L < y < \eta_3$ oraz $L - \eta_3 < x < \eta$ są funkcjami współrzędnych odpowiednio x i y , ale są stałe względem wariacji siły P . Z tego powodu warunki $\partial\sigma_A/\partial P = 0$ i $\partial\sigma_B/\partial P$ zachowują swoje zastosowanie w obu odcinkach strefy bez poślizgu. Rozważmy kolejno naprężenia w punktach A i B określonych współrzędnymi x i y .

Odcinek $\eta_3 \geq x \geq \eta$ strefy bez poślizgu. Na odcinku tym mamy do czynienia z podobną sytuacją jak w przedziale [0-1]. Różnica polega jedynie na innym zwrocie i oznaczeniu współczynnika tarcia. Z powyższego wynika, że warunek $\partial\sigma_A/\partial P = 0$ dla tego odcinka prowadzi do równań różniczkowych podobnych do równań odnoszących się do przedziału [0-1]. Można je otrzymać wprost z równań (2.2) i (2.3) podstawiając w nich $\mu = -\ddot{\mu}$:

$$(2.18) \quad \frac{h}{2I} + \left(\frac{h^2}{I} + \frac{1}{F} \right) q \frac{d\ddot{\mu}}{dP} = 0,$$

$$(2.19) \quad \frac{dt}{dP} + P \frac{d\ddot{\mu}}{dP} + \ddot{\mu} = 0.$$

Warunki brzegowe dla $P = P_3$ są następujące: $\ddot{\mu} = 0$, $t = P_3\mu_0/2$. Uwzględniając powyższe w (2.18) otrzymamy:

$$(2.20) \quad \frac{d\ddot{\mu}}{dP} = -\alpha, \quad \ddot{\mu} = \alpha(P_3 - P).$$

Podstawiając (2.20) do (2.19) otrzymamy

$$(2.21) \quad \frac{dt}{dP} - \alpha P + \alpha(P_3 - P) = 0,$$

skąd

$$t = \alpha P^2 + \alpha P_3 P + C.$$

Z warunków brzegowych znajdziemy stałą

$$C = P_3 \left(\frac{1}{2} \mu_0 - 2\alpha P_3 \right)$$

i funkcja $t(P)$ przyjmuje postać

$$(2.22) \quad t = -\alpha(2P_3^2 - P^2) + P_3 \left(\alpha P + \frac{1}{2} \mu_0 \right).$$

Koniec przedziału (punkt 4) określają następujące warunki: dla $P = P_4$, $\mu_4 = \mu_0$ lub $t_4 = -1/2 P_4 \mu_0$.

Można wykazać, że większą wartość siły P_4 , określając koniec przedziału (rys. 2.IX) otrzymamy z warunku $t_4 = -P_4 \mu_0 / 2$. Obliczona stąd wielkość siły P_4 wyraża się wzorem:

$$(2.23) \quad \frac{P_4}{P_1} = \frac{\chi + 1}{2} \left[\sqrt{1 + 4 \frac{\left(2 - \frac{1}{\chi}\right)}{\left(1 + \frac{1}{\chi}\right)^2}} - 1 \right],$$

gdzie

$$\chi = P_3 / P_1.$$

Na końcu przedziału [3 - 4] współczynnik tarcia $\mu_4 = \mu_4^*$ i wyraża się wzorem

$$(2.24) \quad \mu_4^* = \alpha(P_3 - P_4).$$

Na rys. 3 przedstawiono wykres funkcji $P_4/P_1 = f(\chi)$.

Odcinek $L \geq y \geq \eta_3$ strefy bez poślizgu. Warunek $\delta \sigma_B / \partial P = 0$ dla tego odcinka pozwala otrzymać następujące równania różniczkowe:

$$(2.25) \quad \frac{h}{2I} - \left(\frac{h^2}{I} + \frac{1}{F} \right) q \frac{d\mu}{dP} = 0,$$

$$(2.26) \quad \frac{dt}{dP} + P \frac{d\mu^*}{dP} + \mu^* - P_3 \left(\frac{d\mu^*}{dP} + \frac{d\mu}{dP} \right) = 0.$$

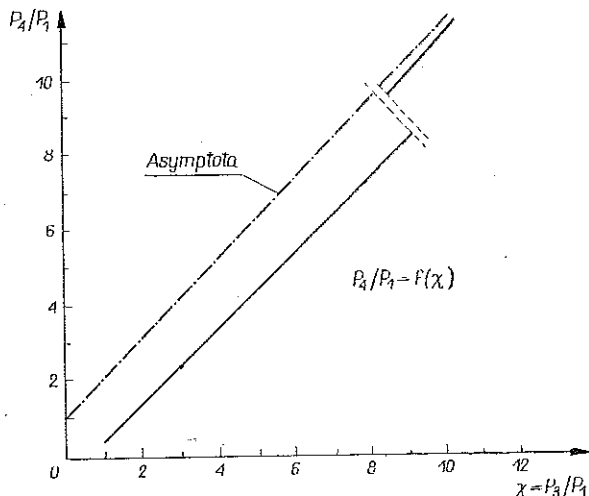
Z równania (2.25) dla warunku brzegowego $P = P_3$, $\mu = \mu_0$ otrzymamy

$$(2.27) \quad \mu = -\alpha(P_3 - P) + \mu_0.$$

Uwzględniając (2.24) i (2.27) w równaniu (2.26) widzimy, że jest ono identyczne z rozwiązaniem równaniem (2.19). Sprawdzamy wielkość współczynnika tarcia μ na końcu przedziału (dla $P = P_4$). Otrzymamy:

$$(2.28) \quad \mu_4 = -\alpha(P_3 - P_4) + \mu_0.$$

Na podstawie wykresu przedstawionego na rys. 3 można sprawdzić, że zarówno μ_4 jak i $\check{\mu}_4$, są mniejsze od μ_0 . Oznacza to, że pierwszy poślizg następuje istotnie pod siłą skupioną $k=P_4/2$ określoną wzorem (2.23). Na rys. 2.IX pokazano sytuację na końcu przedziału (punkt 4).



Rys. 3

2.5. Przedział [4-5']. Jako obowiązujący w tym przedziale przyjmujemy mechanizm składający się z trzech stref: oderwania, poślizgu i bez poślizgu, przy czym ta ostatnia strefa podzielona jest na dwa odcinki (rys. 2.X). Przewidujemy pojawienie się strefy poślizgu ponieważ na końcu przedziału [3-4] siła tarcia t pod siłą skupioną k osiągnęła maksymalną wielkość równą $P_4\mu_0/2$.

Rozważmy warunek $\partial\sigma/\partial P=0$ w strefie bez poślizgu na odcinku $\eta_3 \geq x \geq \xi + \eta$. Warunku tego nie będziemy rozpatrywać na odcinku $L \leq y \leq \eta_3$, ponieważ, tak jak to poprzednio wykazaliśmy, nie wnosi on nic nowego. Naprężenia w punkcie A odcinka $\eta_3 \leq x \leq \xi + \eta$ wyrażają się wzorem

$$\sigma_A = \left[\frac{h}{2I}P + \left(\frac{h^2}{I} + \frac{1}{F} \right) q\check{\mu} \right] x - \left(\frac{h^2}{I} + \frac{1}{F} \right) \left[q(-\mu_0 + \check{\mu})\xi + \left(-\frac{\mu_0}{2} + \check{\mu} \right) P \right].$$

Obliczając z powyższego wyrażenie $\partial\sigma_A/\partial P=0$, otrzymamy dwa równania różniczkowe:

$$(2.29) \quad \frac{h}{2I}P + \left(\frac{h^2}{I} + \frac{1}{F} \right) q \frac{d\check{\mu}}{dP} = 0,$$

$$(2.30) \quad q \frac{d\check{\mu}}{dP} \xi + q(-\mu_0 + \check{\mu}) \frac{d\xi}{dP} + \frac{d\check{\mu}}{dP} P + \mu - \frac{\mu_0}{2} = 0.$$

Z równania (2.29) dla warunku początkowego $P=P_4$ i $\check{\mu}=\check{\mu}_4$ otrzymujemy funkcję $\check{\mu}(P)$:

$$(2.31) \quad \check{\mu} = \alpha(P_3 - P).$$

Podstawiając (2.31) do (2.30) doprowadzamy to równanie do postaci

$$(2.32) \quad (P - P_3 - 2P_1) \frac{d\xi}{dP} + \xi = -2 \frac{P}{q} + \frac{P_3 - P_1}{q}.$$

Rozwiązaniem ogólnym tego równania jest funkcja

$$(2.33) \quad \xi = \frac{D}{P - (P_3 - 2P_1)} - \frac{P - P_1}{q}.$$

Stałą D obliczamy z warunków dla $P = P_4$, $\xi = 0$:

$$D = \frac{1}{q} (P_4 - P_1) [P_4 - (P_3 - 2P_1)]$$

i funkcja (2.33) przyjmie postać

$$(2.34) \quad \xi = \frac{1}{q} \left[\frac{(P_4 - P_1) [P_4 - (P_3 - 2P_1)]}{P - (P_3 - 2P_1)} - (P - P_1) \right].$$

Ponieważ w rozpatrywanym przedziale $P < P_4$ i $P_4 > P_3 - 2P_1$, to strefa poślizgu ξ jest dodatnia, co jest zgodne z jej fizyczną interpretacją. Koniec przedziału obliczymy z warunków dla $P = P_5$, $\xi_5 + \eta_5 = \eta_3$. Po podstawieniu do (2.34) i wykonaniu przekształceń otrzymamy

$$(2.35) \quad P_{5'} = \frac{P_3 - P_4}{P_3 - P_1} (P_3 - 2P_1) + \frac{P_4 - P_1}{P_3 - P_1} P_4.$$

Można łatwo sprawdzić, że $P_{5'} > P_3 - 2P_1$, ponieważ dla $P = P_3 - 2P_1$ (kiedy rozwinęłaby się siła tarcia w strefie bez poślizgu) strefa poślizgu $\xi \rightarrow \infty$. Jako koniec przedziału należy zatem uznać siłę (2.35). Sytuację na końcu przedziału [4 - 5'] pokazuje rys. 2.XI.

2.6. Przedział [5' - 5]. W przedziale tym mechanizm współpracy polega na rozprzestrzenianiu się strefy poślizgu na odcinku $L - \eta_3$ w strefie bez poślizgu (rys. 2.XI). Na odcinku $L \geq y \geq \eta$ strefy bez poślizgu mechanizm współpracy jest taki sam, jak na odcinku $\eta_3 \geq x \geq \eta$ (rys. 2.X). Wobec tego równania wynikające z warunku $\partial\sigma/\partial P = 0$ są takie same jak równania (2.29) i (2.30). Należy tylko zamiast μ podstawić $\bar{\mu}$. Otrzymujemy dla tego przypadku następujący układ równań:

$$(2.36) \quad \frac{h}{2I} P + \left(\frac{h^2}{I} + \frac{1}{F} \right) q \frac{d\mu}{dP} = 0,$$

$$(2.37) \quad q \frac{d\mu}{dP} \xi + (-\mu_0 + \mu) q \frac{d\xi}{dP} + \frac{d\mu}{dP} P + \mu - \frac{\mu_0}{2} = 0.$$

Uwzględniając przy rozwiązaniu równania (2.36) warunki brzegowe w punkcie 5' (rys. 2.XI) dla $P = P_{5'}$, $\mu = 0$ otrzymamy

$$(2.38) \quad \mu = \alpha (P_{5'} - P).$$

Podstawiając (2.38) do (2.37) otrzymujemy to równanie w postaci

$$(2.39) \quad (P - P_{5'} + 2P_1) \frac{d\xi}{dP} + \xi = -2 \frac{P}{q} + \frac{P_{5'}}{q} - \frac{P_1}{q}.$$

Rozwiązaniem równania (2.39) jest funkcja

$$(2.40) \quad \xi = \frac{D}{P - P_{5'} + 2P_1} - \frac{P - P_1}{q}.$$

Stałą D wyznaczamy z warunku początkowego w punkcie 5' dla $P = P_{5'}$, i $\xi = \eta_3 - \eta_{5'}$:

$$D = \frac{P_3 - P_1}{q} 2P_1.$$

Po podstawieniu powyższej wartości do (2.40) otrzymujemy ostatecznie:

$$(2.41) \quad \xi = \frac{1}{q} \left[\frac{2P_1(P_3 - P_1)}{P - P_{5'} + 2P_1} - P + P_1 \right].$$

Koniec przedziału (punkt 5) otrzymamy z warunku rozprzestrzeniania się strefy poślizgu do zamocowania. Warunek ten określić można w sposób następujący: dla $P = P_5$, $\xi = L - \eta_5$.

Po podstawieniu powyższych warunków początkowych do (2.41) otrzymamy siłę P określającą koniec przedziału [5' - 5]:

$$(2.42) \quad P_5 = P_{5'} - 2P_1 \frac{qL - P_3}{qL - P_1}.$$

Sytuację w punkcie 5 przedstawia mechanizm (rys. 2.XIII).

2.7. Przedział [5 - N]. Dalsze zmniejszanie siły ($P < P_5$) doprowadza do charakterystycznego punktu oznaczonego na współrzędnej w literę N . Rysunek 2.XIII przedstawia sytuację na początku omawianego przedziału. W tym mechanizmie mamy tylko dwie strefy: strefę oderwania i strefę poślizgu długości $\xi = L - \eta$. Stopniowe, kolejne zmniejszanie siły P powoduje wzrost strefy poślizgu i zanik strefy oderwania. Gdy siła $P = 0$ (punkt N), to również długość strefy oderwania $\eta = 0$, natomiast długość strefy poślizgu $\xi = L$. Na skutek oddziaływania sił tarcia między belkami równych $-q\mu_0$ obie belki w tym punkcie ($P = 0$) pozostają ugięte, przy czym ugięcie przyjmuje wartość W_N (rys. 2.XIV).

2.8. Przedział [N - 6]. Od początku tego przedziału siła P zmienia zwrot i zaczyna wzrastać. Mechanizm pracy obydwu belek pokazany jest na rys. 2.XV. Charakteryzuje się on tym, że nie ma strefy oderwania i strefy bez poślizgu. Jediną strefą jest strefa poślizgu. Koniec tego przedziału określa maksymalna siła $P = P_6$. Jedyne ograniczenie wynikać może z warunku stosowalności liniowej teorii belek. W punkcie histerezy określonym siłą P_6 mamy sytuację zilustrowaną na rys. 2.XVI.

2.9. Przedział [6 - 7]. Przedział ten zaczyna się sytuacją przedstawioną schematem oddziaływań pod wpływem siły P_6 na rys. 2.XVI. Przy zmniejszaniu siły ($P < P_6$) następuje zmiana sposobów współpracy obu belek. W wyniku rozważenia

szeregu możliwych mechanizmów współpracy w przedziale $P_6 < P < P_7$ przyjęto mechanizm współpracy pokazany na rys. 2.XVII. Przyjęto mianowicie, że istnieją dwie strefy: strefa poślizgu i strefa bez poślizgu.

Skoro zakładamy istnienie strefy bez poślizgu, to możemy zastosować analizę opartą na wykorzystaniu warunków $\sigma_A = \text{const}$ omówionym w poprzednim przedziale.

Moment gnący i siła wzdłużna w punkcie A wynoszą

$$M_g = \left(qh\mu - \frac{P}{2} \right) y + qh(\mu_0 - \mu)\xi + \frac{P}{2} \mu_0 h,$$

$$N = q\mu y + q(\mu_0 - \mu)\xi + \frac{P}{2} \mu_0.$$

Znając moment gnący i siłę wzdłużną wyznaczamy naprężenie w tym przekroju:

$$(2.43) \quad \sigma_A = \frac{h}{I} M_g + \frac{1}{F} N.$$

Zakładając $\mu = \mu(P)$, $\xi = \xi(P)$ i $\partial\sigma_A/\partial P = 0$ po zróżniczkowaniu (2.43) otrzymujemy równanie

$$(2.44) \quad \frac{\partial\sigma_A}{\partial P} = \left[-\frac{h}{2I} + q \left(\frac{h^2}{I} + \frac{1}{F} \right) \frac{d\mu}{dP} \right] y + \left(\frac{h^2}{I} + \frac{1}{F} \right) q(\mu_0 - \mu) \frac{d\xi}{dP} - \\ - \left(\frac{h^2}{I} + \frac{1}{F} \right) q \frac{d\mu}{dP} \xi + \left(\frac{h^2}{I} + \frac{1}{F} \right) \frac{\mu_0}{2} = 0.$$

Aby powyższe równanie było spełnione dla y w zakresie $\xi < y < L$ i P w zakresie $P_7 < P < P_6$, muszą być spełnione następujące równania

$$(2.45) \quad -\frac{h}{2I} + q \left(\frac{h^2}{I} + \frac{1}{F} \right) \frac{d\mu}{dP} = 0$$

oraz

$$(2.46) \quad (\mu - \mu_0) \frac{d\xi}{dP} - \frac{d\mu}{dP} \xi + \frac{\mu_0}{2q} = 0.$$

Z równania (2.45) znajdziemy

$$(2.47) \quad \mu = \alpha P + C_1.$$

Z warunków początkowych $P = P_6$ i $\mu = \mu_0$ wyznaczamy stałą całkowania:

$$C_1 = \mu_0 - \alpha P_6.$$

Podstawiając stałą całkowania do wzoru uzyskanego z rozwiązania równania (2.45) określiliśmy wartość w postaci

$$(2.48) \quad \mu = -\alpha(P_6 - P) + \mu_0.$$

Rozwiązaniem równania (2.46) jest całka:

$$(P_6 - P) \left(\xi - \frac{\mu_0}{2\alpha} \right) = C_2.$$

Spełnienie powyższego związku dla $P = P_6$ wymaga aby $C_2 = 0$. Stąd otrzymujemy:

$$(2.49) \quad \xi = \xi^* = \frac{\mu_0}{2\alpha} = \frac{P_1}{q} = \text{const.}$$

Z powyższego wynika, że w przedziale [6 - 7] strefa poślizgu jest stała, a jej wartość określona jest równaniem (2.49). Granica stosowalności mechanizmu rys. 2.XVII wynika z tego, że w strefie bez poślizgu tarcie może zmienić znak i rozwinąć się osiągając wartość $-\mu_0$. Podstawiając dla $P = P_7$, $\mu = \mu_0$ do (2.48) otrzymamy

$$(2.50) \quad -\mu_0 = -\alpha(P_6 - P_7) + \mu_0.$$

Stąd

$$(2.51) \quad P_7 = P_6 - 4P_1.$$

Sytuację w punkcie odpowiadającym P_7 przedstawiono na rys. 2.XVIII. Strefę poślizgu oznaczono tu przez ξ^* , a jej długość określona jest wzorem (2.42).

2.10. Przedział [7 - M]. W przedziale tym przyjmujemy mechanizm przedstawiony na rys. 2.XIX. Równoległe ze zmniejszaniem się siły P maleje strefa poślizgu ξ dążąc do zera dla $P_M = 0$. Przedział ten charakteryzuje się tym, że istnieją w nim dwie strefy poślizgu różniące się zwrotami sił tarcia. W miarę zmniejszania się siły P jedna ze stref poślizgu o długości równej ξ maleje, dążąc do zera dla $P = 0$. Odpowiednio do tego druga strefa poślizgu o długości $L - \xi$ rośnie i dąży do rozprzestrzenienia się na całą długość belki, co zostaje osiągnięte w punkcie M dla $P = 0$ (rys. 2.XX). Ze szczegółowej analizy wynika, że przedstawiony na rys. 2.XIX mechanizm współpracy spełnia wszystkie omawiane we wstępie warunki.

2.11. Przedział [M - 2]. Ostatni odcinek od punktu M do punktu 2 zamyka obszar histerezy. W tym przedziale mechanizmy oddziaływań przedstawione są na rys. 2.XXI. Od punktu M siła zaczyna wzrastać ($P > 0$) lecz skierowana jest przeciwnie. Mechanizm ten jest zatem taki sam, jak poprzednio opisany w przedziale 2 - 3 (rys. 2.V). Dowodzi to, że nastąpiło zamknięcie pętli histerezy.

3. Uwagi końcowe

W przedstawionych powyżej rozważaniach zanalizowano mechanizmy współpracy belek w kolejnych przedziałach histerezy (rys. 2) oraz określono wielkości sił P_i, P_{i+1} , stanowiące granice tych przedziałów. Mechanizmy współpracy, czyniąc zadość równaniom równowagi i ciągłości przemieszczeń, ograniczone są «od góry» i «od dołu» bądź rozwinięciem się współczynnika tarcia μ do wartości $\pm\mu_0$ lub osiągnięciem przez strefę poślizgu przekroju zamocowania ($\xi = L - \eta$). Samą histerezę przedstawiono poglądowo w układzie współrzędnych P, W , gdzie W oznacza ugięcie

w punkcie przyłożenia siły P . Poszczególne punkty histerezy przedstawione zostały w sposób orientacyjny, ponieważ w pracy nie obliczano dla żadnego przedziału ugięcia W w zależności od siły P . Wyznaczenie ugięć $W(P)$ w poszczególnych przedziałach, gdy znane są mechanizmy współpracy, sprowadza się do prostych obliczeń, których nie przytaczamy w pracy.

Chociaż histereza naszkicowana została na rys. 2 w sposób schematyczny, to jednak dobrze ilustruje przebieg procesów zachodzących przy pełnym cyklu zmian siły P w granicach $P_6 \leq P \leq P_3$. Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że granice poszczególnych przedziałów histerezy określają następujące parametry: $P_1 = \mu_0/2\alpha$, q ; L , gdzie

$$\alpha = \frac{hF}{2q(h^2F + I)}$$

a zatem parametry te w pełni charakteryzują poszczególne punkty histerezy.

Zasadniczym celem rozważań autora było wyjaśnienie i opisanie mechanizmów współpracy belek dla poszczególnych przedziałów histerezy i cel ten można uważać za osiągnięty.

Przedstawiona praca stanowi część szerszej opracowywanego programu analiz teoretycznych i doświadczalnych, mających na celu wyjaśnienie istotnych zjawisk związanych z tarciem konstrukcyjnym w układach sprężystych.

Literatura

1. D. D. ELEY, *Adhesion*, Oxford University Press, 1961.
2. L. E. GOODMAN, J. H. KLUMP, *Analysis of slop damping with reference to turbine-blade vibration*, J. Appl. Mech., 3, 23 (1956), 421–429.
3. Н. Г. Калинин, *Вопросы динамики и прочности*, Изд. АН Латвийской ССР, выпуск 7, 1961.
4. В. ВОЛИНСКИ, *Zagadnienie współpracy dwóch belek z uwzględnieniem sil tarcia*, Biul. WAT, Rok XVII, 7, 191 (1968), 79–89.
5. Е. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Гос. Изд. Физ.-Мат. Лит., Москва 1965.

Резюме

ВОЗНИКНОВЕНИЕ СИЛ ТРЕНИЯ, ДЛЯ НЕКОТОРОГО СЛУЧАЯ СОВМЕСТНОЙ РАБОТЫ ДВУХ БАЛОК

В работе обсуждается задача, касающаяся совместной работы, двух одинаковых упругих балок, закрепленных консольно в недеформируемой опоре и прижимаемых одна к другой нагрузкой с интегральностью q . Приложенная, к свободному концу одной из балок поперечная сила P , вызывает появление между балками следующих зон: отрыва, скольжения и с отсутствием скольжения. Циклические изменения силы P разрывают возникновение гистерезиса, которая иллюстрируется диаграммой в системе координат, сила-прогиб в точке приложения силы.

В работе выясняется и описываются механизмы совместной работы между балками для отдельных интервалов гистерезиса.

Summary

THE DEVELOPMENT OF FRICTION FORCES FOR A CERTAIN CASE
OF COOPERATION OF TWO BEAMS

In this paper the problem of cooperation is considered of two identical beams fixed in a non-deformable support and pressed together by a load of intensity q . A transverse force P applied to the free end of one of the beams causes the evolution of zones between the beams: breaking off, with sliding, and without sliding. Cyclical variations of the force P bring about the formation of hysteresis, which is illustrated in a graph using the system of coordinates: force-bending at point of application of force. In the paper the mechanisms of cooperation are explained and described between the beams for the particular intervals of hysteresis.

Praca została złożona w Redakcji dnia 1 grudnia 1969 r.
