

NAPRĘŻENIA KONTAKTOWE  
W PROCESIE PLASTYCZNEGO PŁYNIĘCIA KSZTAŁTOWEGO  
OSIOWO-SYMETRYCZNEGO STEMPŁA

LECH DIETRICH (WARSZAWA)

1. Wstęp

W pracy przedstawiono sposób i wyniki pomiarów normalnych naprężeń kontaktowych, występujących na czołowej powierzchni przy ściskaniu, w zakresie plastycznym osiowo-symetrycznego stempla w kształcie ściętego stożka wykonanego z ołowiu. Otrzymane wyniki porównano z obliczeniami wykonanymi na gruncie teorii plastyczności przy przyjęciu modelu materiału sztywno-idealnie plastycznego. Przyjęcie tak uproszczonego modelu, a szczególnie nieuwzględnienie wzmocnienia materiału niewątpliwie ma istotny wpływ na wyniki obliczeń zarówno rozkładu naprężeń, jak i nośności granicznej elementu. W kilku opublikowanych w ostatnich latach pracach [1, 4, 5, 11 i 12] weryfikowano rozwiązania teorii plastyczności pod względem nośności granicznej stwierdzając dość dobrą zgodność teorii z doświadczeniem. I tak w pracy [1] potwierdzono wniosek otrzymany na podstawie obliczeń [7], że siła potrzebna dla uzyskania tej samej średnicy odcisku przy wciskaniu sztywnego stożka w plastyczną półprzestrzeń rośnie ze wzrostem kąta jego rozwarcia w przedziale wartości od  $105^\circ$  do  $180^\circ$ . Przeprowadzone w pracach [4, 5 i 11] doświadczenia dla rozciąganych osiowo-symetrycznych prętów osłabionych korbami o różnych kształtach były dobrym potwierdzeniem uzyskanych w tych pracach rozwiązań teoretycznych nośności granicznej. Podobnie w pracy [12] stwierdzono dobrą zgodność doświadczenia z teorią zarówno pod względem nośności granicznej, jak i wpływu sił tarcia na wielkość siły uplastyczniającej przy ściskaniu osiowo-symetrycznych stempli w kształcie ściętego stożka.

Trzeba jednak zdawać sobie sprawę, że weryfikacja wielkości globalnych, chociaż niewątpliwie wartościowa z teoretycznego i przede wszystkim praktycznego punktu widzenia, może dać jedynie przybliżone oceny trafności teorii.

W przeprowadzonych w niniejszej pracy doświadczeniach dokonano pomiarów charakterystyk lokalnych w procesie plastycznego płynięcia kształtowych stempli. Niewątpliwie porównanie otrzymanych wyników z rozwiązaniami teorii plastyczności jak i teorii sprężystości byłoby bardzo interesujące. Wprawdzie w monografiach NEUBERA [8] i PETERSONA [9] podano w postaci nomogramów i wykresów wyniki sprężystych obliczeń dla szeregu przypadków obciążenia dla płaskich i osiowo-symetrycznych prętów osłabionych korbem o różnych kształtach, ale obliczenia

te dotyczą współczynnika koncentracji naprężeń. Natomiast brak jest w literaturze rozwiązań teorii sprężystości, które dotyczyłyby przypadków ściskania osiowo-symetrycznych, kształtowych stempli. Zagadnienia takie były niejednokrotnie rozważane na gruncie teorii plastyczności i istniejące obecnie rozwiązania pozwalają na teoretyczną analizę wpływu kształtu stempla jak i sił tarcia na nośność graniczną i rozkład naprężeń na czołowej powierzchni stempla. W dalszej części pracy będzie krótko omówiony sposób otrzymywania interesujących nas rozwiązań teorii plastyczności z uwzględnieniem wpływu sił tarcia na czołowej powierzchni stempla.

## 2. Rozwiązania teoretyczne

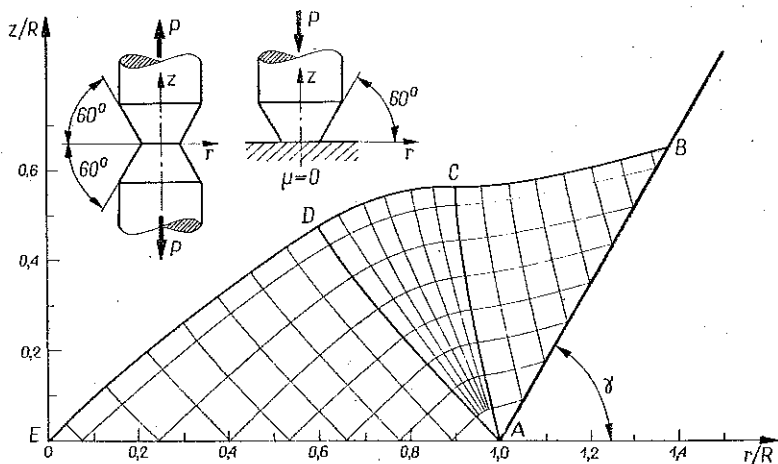
Otrzymane rozwiązanie problemu osiowo-symetrycznego polega na określeniu czterech składowych tensora naprężenia i dwóch składowych prędkości płynięcia. Przy założeniu warunku plastyczności Treski i hipotezy pełnej plastyczności Haara-Kármána zagadnienie można rozwiązać najpierw dla naprężeń i następnie dla prędkości. Rozwiązanie dla naprężeń określone jest przez układ czterech równań, mianowicie dwa równania równowagi, warunek plastyczności i zależność wynikającą z hipotezy Haara-Kármána. Wykorzystując znane podstawienie Levy'ego można równania te sprowadzić do hiperbolicznego układu dwóch równań różniczkowych, który z kolei rozwiązujemy metodą charakterystyk na drodze numerycznego bądź też graficznego całkowania. Szczegółowa analiza i dyskusja układu równań dla osiowej symetrii zawarta jest w pracy SHIELDA [10].

Rozpatrzmy zagadnienie ściskania osiowo-symetrycznego, plastycznego stempla w kształcie ściętego sześcianka, którego powierzchnia czołowa jest oparta na nieodkształcalnym podłożu. W zadaniu tym warunki brzegowe są określone kształtem swobodnej krawędzi stempla, na której znamy wartość i kierunek działających naprężeń, oraz warunkami tarcia na powierzchni kontaktu stempla i podłoża.

Załóżmy najpierw, że styk między stemplem i płytą jest idealnie gładki, co odpowiada przyjęciu, że powierzchnia kontaktu jest powierzchnią naprężeń głównych. Rozwiązanie dla naprężeń rozpoczynamy od zbudowania brzegowego zagadnienia Cauchy'ego. Wychodząc ze swobodnego brzegu, którym w rozpatrywanym przypadku jest linia prosta nachylona pod kątem  $\gamma$  do osi  $r$ , możemy określić siatkę charakterystyk w obszarze  $ABC$  (rys. 1). Następnie rozwiązujemy zagadnienie zdegenerowane, którego skrajna charakterystyka  $AD$  tworzy z osią  $r$  w punkcie  $A$  kąt  $\pi/4$ . Dane wzdłuż charakterystyki  $AD$  i znany kąt, pod jakim charakterystyki podchodzą do linii  $AE$ , pozwalają na rozwiązanie zagadnienia mieszanego w obszarze  $ADE$ . Zasięg obszaru plastycznego jest ograniczony charakterystyką wyprowadzoną ze swobodnego brzegu, przechodzącą przez początek układu współrzędnych.

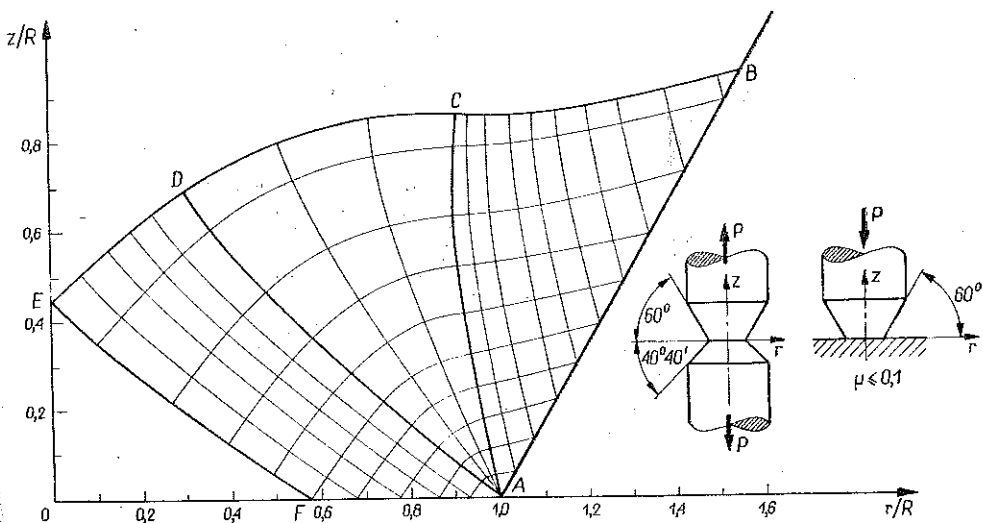
Przedstawione na rys. 1 rozwiązanie będzie, po prostej zmianie znaków, odnosić się do przypadku rozciąganego, osiowo-symetrycznego pręta osłabionego kątowym wytoczeniem [11].

Nieco odmiennie przedstawia się rozwiązanie przy uwzględnieniu występowania sił tarcia na powierzchni kontaktowej. Po zbudowaniu zagadnienia Cauchy'ego w obszarze  $ABC$  (rys. 2) rozwiązujemy zagadnienie zdegenerowane  $ACD$ . Kąt wa-



Rys. 1

chlarza w punkcie  $A$  jest zależny od przyjętego współczynnika tarcia, zdefiniowanego jako stosunek naprężenia stycznego  $\tau_{rz}$  do naprężenia normalnego  $\sigma_z$ , działających w danym punkcie powierzchni czołowej. Następnie wychodząc z charakterystyki  $AD$  i znając stosunek  $\tau_{rz}/\sigma_z$  wzdłuż linii kontaktu, rozwiązujemy zagadnienie



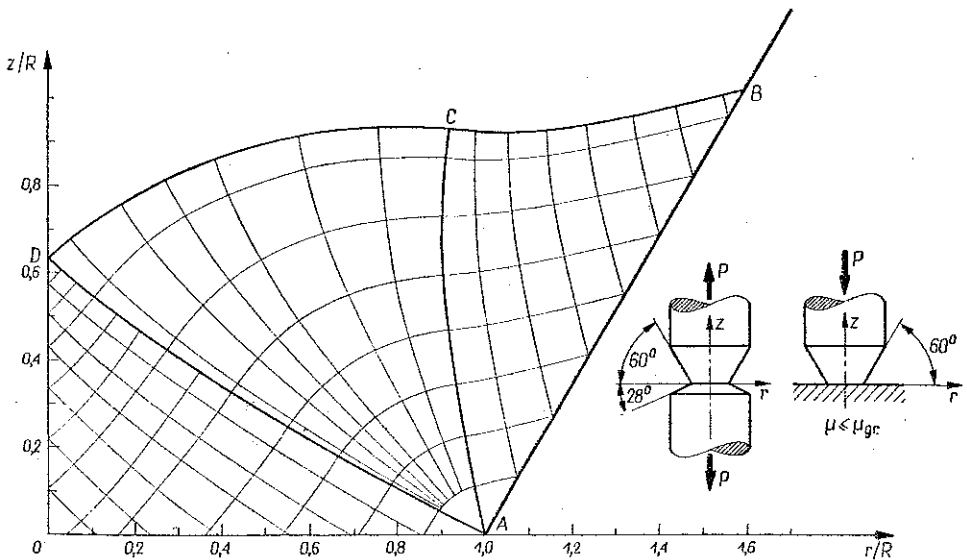
Rys. 2

mieszane w obszarze  $ADEF$ . Warunek symetrii rozwiązania względem osi  $z$  jednoznacznie określa zarówno położenie punktu  $B$  jak i punktu  $F$ . Po zbudowaniu przedłużenia siatki charakterystyk poza linię  $EF$  możemy wyznaczyć rozkład naprężeń normalnych  $\sigma_z$  i stycznych  $\tau_{rz}$ , działających na powierzchni kontaktowej. Przedstawione na rys. 2 rozwiązanie wykonano w pracy [12] przy założeniu, że na

powierzchni styku współczynnik tarcia spełnia nierówność  $\mu \leq 0,1$ , przy czym na odcinku  $AF$   $\mu=0,1$ ; natomiast począwszy od punktu  $F$  wartość  $\mu$  maleje osiągając zero w początku układu  $r, z$ .

Otrzymana siatka charakterystyk będzie również, po zmianie znaków, częścią rozwiązania dla zagadnienia rozciągania osiowo-symetrycznego pręta osłabionego wytoczeniem o nierówno nachylonych krawędziach. Zarówno kształt jak i pochylenie dolnej krawędzi otrzymamy przedłużając siatkę charakterystyk z rys. 2 poza linię  $AF$ .

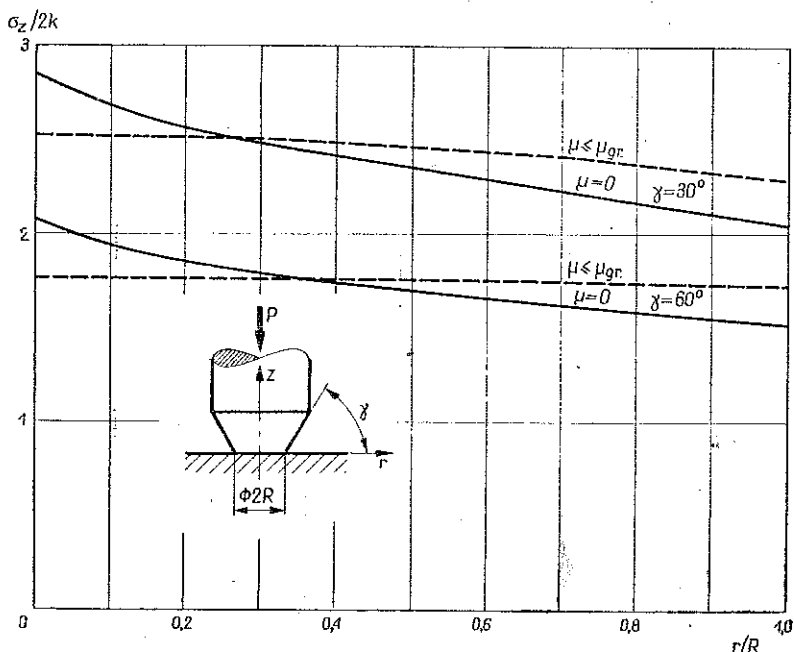
Żądając żeby skrajna charakterystyka zagadnienia zdegenerowanego  $AD$  i charakterystyka wyprowadzona ze swobodnego brzegu przecięły się na osi  $z$  i tworzyły z nią kąt  $\pi/4$  (rys. 3), otrzymujemy graniczne rozwiązanie z tarcieniem, w którym dla danych warunków brzegowych kąt wachlarza, a tym samym współczynnik tarcia w punkcie  $A$ , osiągają największą wartość. W przedstawionym na rys. 3 przypadku, gdy krawędź stożka tworzy kąt  $60^\circ$  z osią  $r$ , współczynnik tarcia na skrajnym promieniu powierzchni kontaktu wynosi  $0,153$ . Również i w tym przypadku przedstawiona siatka będzie, po zmianie znaków, częścią rozwiązania dla rozciągania pręta osłabionego niesymetrycznym wytoczeniem [4].



Rys. 3

Dysponując dla danych warunków brzegowych siatką charakterystyk możemy określić rozkład naprężeń normalnych, działających na powierzchni czołowej stempla, i następnie po scałkowaniu tegoż wykresu możemy określić nośność graniczną rozpatrywanego elementu. Na rys. 4 przedstawiono wykresy naprężeń normalnych jako funkcję promienia powierzchni czołowej stempla dla różnych warunków brzegowych. Liniami ciągłymi zaznaczono wykresy otrzymane przy założeniu idealnie gładkiego styku między stemplem i podłożem, a więc otrzymane w oparciu o typ rozwiązania przedstawiony na rys. 1. Liniami przerywanymi zaznaczono natomiast

wykresy dla dwóch różnych kątów pochylenia krawędzi swobodnej, otrzymane na podstawie granicznego rozwiązania z tarcieniem (rys. 3). W przypadku występowania sił tarcia na powierzchni czołowej ściskanego stempla wykres naprężeń normalnych ma bardziej płaski przebieg w porównaniu do wykresów otrzymanych przy założeniu idealnie gładkiego styku, które cechują się wzrostem naprężeń przy zbliżaniu się do osi symetrii. Również i nośność graniczna stempla o danym kącie  $\gamma$  będzie funkcją współczynnika tarcia na powierzchni czołowej. Teoretyczny współczynnik zwiększenia nośności granicznej, zdefiniowany jako stosunek siły uplastycz-



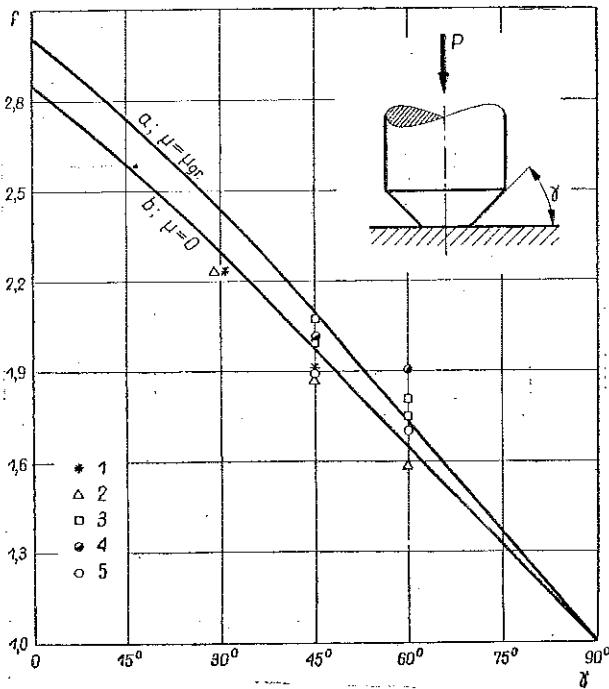
Rys. 4

niającej kształtowy stempel, otrzymanej przez całkowanie odpowiedniego rozkładu naprężeń, do siły uplastyczniającej ściskany walec o średnicy równej średnicy powierzchni czołowej stempla i odpowiedniej wysokości, będzie dla  $\gamma=60^\circ$  wynosił  $f=1,75$  według granicznego rozwiązania z tarcieniem oraz  $f=1,65$  przy założeniu zerowego współczynnika tarcia. Dla  $\gamma=30^\circ$  odpowiednie wartości teoretyczne będą  $f=2,42$  i  $f=2,30$ . Zależność współczynnika zwiększenia nośności granicznej w funkcji parametru kształtu, którym w tym przypadku jest kąt  $\gamma$ , przedstawiono na rys. 5. Górna linia oznaczona literą *a* otrzymana została na podstawie granicznego rozwiązania z tarcieniem. Wielkość współczynnika zwiększenia nośności granicznej  $f=3,02$  dla  $\gamma=0^\circ$  podano w pracy [6]. Linia dolna oznaczona literą *b* odnosi się do idealnie gładkiego styku. Dla  $\gamma=0^\circ$  będzie w tym przypadku  $f=2,84$  [10].

Omówione dotychczas rozwiązania będą z punktu widzenia rozpatrywanej teorii rozwiązaniami ścisłymi, jeśli można zbudować dla danej siatki charakterystyk kinematycznie dopuszczalne pole prędkości i można wykazać, że w żadnym innym

miejsu pręta poza obszarem uplastycznionym nie jest przekroczony warunek plastyczności.

Dopuszczalne pole prędkości i warunki brzegowe dla tego typu zagadnień przedyskutował SHIELD [10] dla idealnie gładkiego kontaktu oraz EASON i SHIELD [6] dla granicznego rozwiązania z tarcieniem. W obu tych pracach wykonano numeryczne obliczenia dla konkretnego przypadku, gdy  $\gamma=0^\circ$ . W pracy [5] podano zbudowany wykreslinie hodograf dla rozciąganego pręta osłabionego kątowym wytoczeniem o całkowitym rozwarciu  $90^\circ$ , co, jak już wspomniano, odpowiada z dokładnością do znaków przypadkowi ściskania kształtowego stempla, którego stożkowa krawędź nachylona jest pod kątem  $45^\circ$ . Pole prędkości dla ściskanego stempla przy  $\gamma=30^\circ$  bez uwzględnienia tarcia podano w pracy [3], gdzie można również znaleźć hodograf dla granicznego rozwiązania z tarcieniem dla ściętego stożka o kącie  $\gamma=60^\circ$ . W obu tych przypadkach zamieszczone hodografy wykonano metodą wykresliną.



Rys. 5

W pracy SUHA i innych [12] przedyskutowano i wykonano odpowiednie obliczenia numeryczne pól prędkości dla ściskanych stempli o różnych kątach nachylenia stożkowej krawędzi w przedziale  $0^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$ . Otrzymane pola prędkości spełniają hipotezę Haara-Kármána w przedziale  $\gamma=0^\circ$  w przybliżeniu do  $\gamma=26^\circ$  zarówno w rozwiązaniach z tarcieniem, jak i bez jego uwzględnienia. Dla większych kątów  $\gamma$  w kilku punktach zagadnienia Cauchy'ego w bezpośrednim otoczeniu punktu A hipoteza Haara-Kármána nie jest spełniona i z formalnego punktu widzenia rozwią-

zania są wówczas jedynie statycznie dopuszczalne. Tym niemniej autorzy podkreślają, że skoro hipoteza Haara-Kármána nie jest spełniona w niewielkiej liczbie punktów siatki linii poślizgu, możliwe jest zbudowanie kinematycznie dopuszczalnego rozwiązania, którego wynik będzie bardzo bliski dolnej ocenie wynikającej z pola statycznie dopuszczalnego, co wskazuje, że ocena dolna daje oszacowanie niewiele odbiegające od ścisłego rozwiązania.

Sprawdzenie, że poza obszarem uplastycznionym nie jest przekroczony warunek plastyczności, polega na zbudowaniu przedłużenia siatki linii poślizgu w obszar sztywny w sposób zaproponowany przez BISHOPA [2]. Przedłużenia te pozwalają na określenie teoretycznej, niezbędnej średnicy oraz wysokości części walcowej próbki. W cytowanych już pracach podano obliczone numerycznie przedłużenia dla ściskanego stempla o kącie  $\gamma=0^\circ$  bez uwzględnienia tarcia [10] oraz z uwzględnieniem tarcia [6]. Podobne przedłużenia dla  $\gamma=45^\circ$  bez uwzględnienia tarcia można znaleźć w pracy [5], gdzie podano również wykres zależności niezbędnych wymiarów jako funkcji kąta pochylecia tworzącej stożka  $\gamma$ . W pracy [4] podano przedłużenia, które odnoszą się również do ściskanych stempli o kącie  $\gamma=30^\circ$  i  $60^\circ$  przy występowaniu tarcia.

W dalszej części tej pracy przy wyznaczaniu wymiarów próbek użytych w doświadczeniach korzystano z wyników obliczeń zamieszczonych w cytowanych powyżej pracach. W przypadku zerowego współczynnika tarcia dla stempla o kącie  $\gamma=30^\circ$  teoretyczna wartość niezbędnej średnicy części walcowej w stosunku do średnicy powierzchni czołowej wynosi  $c/R=2,32$ , a wymagany stosunek wysokości próbki  $s$  do jej średnicy powierzchni czołowej jest równy  $s/2R=1,36$ . Dla stempla o kącie  $\gamma=45^\circ$  odpowiednie wymiary teoretyczne wynoszą:  $c/R=1,95$  i  $s/2R=1,17$ . Natomiast z granicznych rozwiązań z tarciem te niezbędne wymiary próbki wynoszą: dla  $\gamma=30^\circ$   $c/R=2,64$  i  $s/2R=1,46$  oraz dla  $\gamma=45^\circ$   $c/R=2,20$  i  $s/2R=1,28$ .

Opisane powyżej rozwiązania teorii plastyczności, wykonane przy przyjęciu modelu ciała izotropowego, sztywno-idealnie plastycznego są rozwiązaniami kompletnymi, a obliczone na ich podstawie wykresy rozkładu nacisków i wartości nośności granicznej danego elementu będą porównane z wynikami doświadczeń opisanych w dalszej części niniejszej pracy.

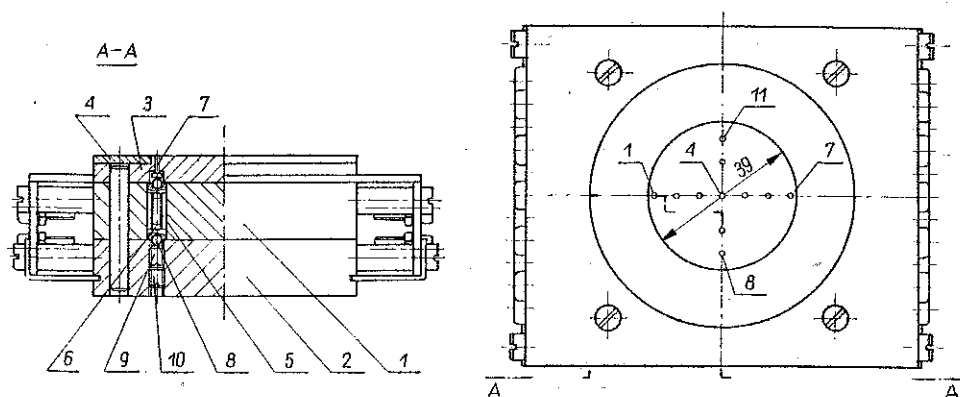
### 3. Metoda doświadczeń

Ze względu na cel przeprowadzone doświadczenia dzieliły się na dwie grupy. W pierwszej z nich określano wykresy siły ściskającej w funkcji skrócenia próbki, na podstawie których określano tzw. umowną siłę uplastyczniającą. Porównanie jej z wielkością wynikającą z rozwiązania teorii plastyczności pozwala na stwierdzenie dla wykorzystanego w doświadczeniach materiału stopnia zgodności teorii z eksperymentem z punktu widzenia nośności granicznej. Celem natomiast doświadczeń drugiej grupy było określenie rzeczywistego rozkładu naprężeń normalnych na powierzchni czołowej ściskanego, kształtowego stempla i następnie porównanie ich z wykresami teoretycznymi otrzymanymi w ramach teorii plastyczności.

Doświadczenia przeprowadzono na próbkach wykonanych z ołowiu w kształcie walca zakończonego z jednej strony ściętym stożkiem. Pod względem kształtu próbki dzieliły się na trzy serie: próbki walcowe o średnicy 37,5 mm i wysokości 80 mm, próbki, w których tworząca stożka nachylona była do osi  $r$  pod kątem  $\gamma=30^\circ$  o średnicy części walcowej 92 mm, średnicy powierzchni czołowej 37,5 mm i całkowitej wysokości 110 mm oraz próbki trzeciej serii, różniące się jedynie kątem  $\gamma=45^\circ$ , o pozostałych wymiarach takich samych jak w próbkach drugiej serii. W obu przypadkach dla próbek o różnym kącie nachylenia tworzącej stożka rzeczywisty stosunek średnicy części walcowej do średnicy powierzchni czołowej wynosił  $c/R=2,45$ , a stosunek wysokości do tej średnicy był równy  $s/2R=1,47$ . Wymiary te są dostateczne z teoretycznego punktu widzenia dla próbek o kącie  $\gamma=45^\circ$ , natomiast dla próbek o kącie  $\gamma=30^\circ$  średnica części walcowej jest mniejsza niż to wynika z przedłużenia rozwiązania teoretycznego z uwzględnieniem tarcia (jak na rys. 3).

Doświadczenia przeprowadzono na hydraulicznej, uniwersalnej maszynie wytrzymałościowej z zachowaniem jednakowych warunków tarcia na powierzchni styku próbki i płyty oporowej. Zarówno w doświadczeniach pierwszej jak i drugiej grupy próbka była oddzielona od płyty oporowej folią ołowianą grubości 0,12 mm, a powierzchnia próbki była przed doświadczeniem smarowana dwusiarczkiem wolframu (wzór chemiczny  $WS_2$ ).

W doświadczeniach pierwszej grupy próbka spoczywała na gładkiej stalowej płycie. Całkowite odkształcenie określano jako średnią arytmetyczną wskazań dwóch symetrycznie umieszczonych względem osi próbki czujników zegarowych o dokładności 0,01 mm. Zbudowane w ten sposób wykresy obciążenia w funkcji odkształcenia były podstawą do wyznaczenia umownej wartości siły uplastyczniającej daną próbkę.



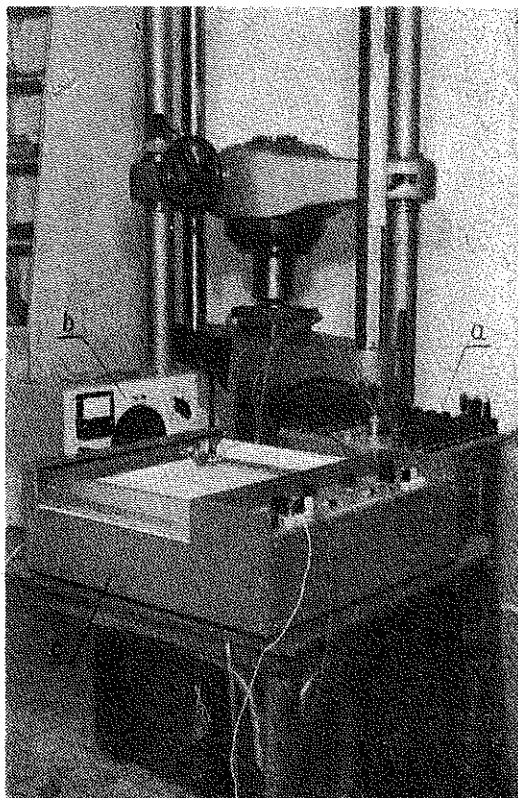
Rys. 6

Dla przeprowadzenia doświadczeń drugiej grupy zbudowano przyrząd pomiarowy o następującej konstrukcji (rys. 6). Korpus przyrządu wykonany ze stali składał się z trzech części. W pierwszej z nich oznaczonej na rys. 6 cyfrą 3 wywiercono 11 otworków o średnicy 1 mm, w których umieszczono trzpienie pomiarowe 7. Siła działająca na trzpień jest przekazywana za pośrednictwem stalowej kulki na elek-



tryczny czujnik 5 wykonany z brązowej rurki o grubości ścianki 0,1 mm, na której naklejono jeden tensometr elektrooporowy. Powierzchnia płyty pomiarowej była szlifowana i polerowana po zmontowaniu przyrządu, tak że trzpienie pomiarowe tworzyły jedną płaszczyznę z korpusem. Przy największej sile działającej w przeprowadzonym doświadczeniu na jeden czujnik, równej około 4 kp, ugięcie trzpienia nie przekraczało 0,004 mm. Poszczególne czujniki połączone za pośrednictwem skrzynki rozdzielczej (a na rys. 7) do mostka tensometrycznego b, skąd następnie powstały impuls był przekazywany do rejestratora c. Oczywiście przed przystąpieniem do zasadniczych pomiarów zmontowane w przyrządzie czujniki były wycechowane za pomocą dynamometru mechanicznego.

Doświadczenia przeprowadzono w następujący sposób. Próbkę umieszczoną na płycie przyrządu pomiarowego ściskano wolno rosnącą siłą za pomocą maszyny wytrzymałościowej. Po osiągnięciu określonego obciążenia całkowitego utrzymywano jego stałą wartość przez czas potrzebny do zarejestrowania wskazań jedenastu czujników. Dla każdej próbki pomiary przeprowadzono przy kilku wartościach siły ściskającej aż do momentu pojawienia się wyraźnych odkształceń w części walcowej próbki.



Rys. 7

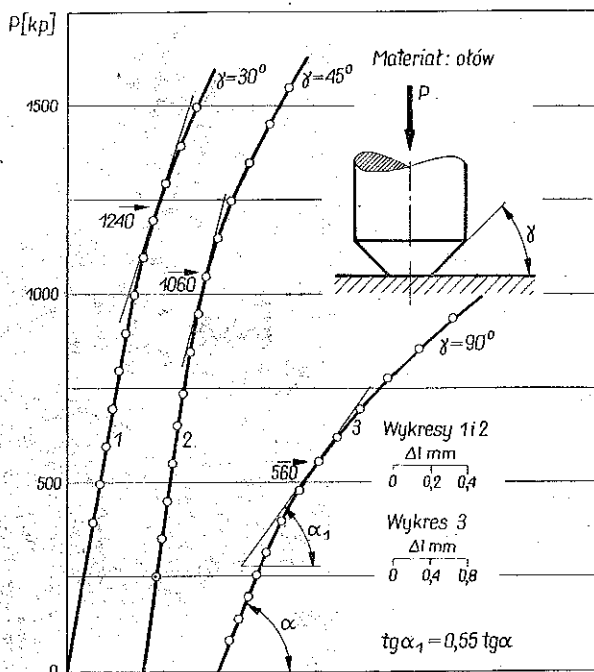
#### 4. Wyniki doświadczeń

Na rysunku 8 przedstawiono początkowe odcinki krzywych siły w funkcji odkształcenia, otrzymane przy ściskaniu trzech próbek o różnych kształtach. Z wykresów tych można w sposób umowny określić wartość siły uplastyczniającej dany element. W pracy za graniczne obciążenie próbki przyjmowano punkt styczności wykresu z prostą, której kąt nachylenia obliczano z równania

$$\alpha_1 = \arctg(0,55 \operatorname{tg} \alpha),$$

gdzie  $\alpha$  jest kątem nachylenia wykresu w jego początkowym, sprężystym zakresie. Wartość współczynnika 0,55 przyjęto tu w sposób dowolny mając na uwadze wyniki teoretyczne.

Określone w ten sposób siły graniczne podano na rysunku obok krzywych dla poszczególnych próbek. Natomiast wartości naprężeń granicznych, obliczone przez podzielenie umownej siły uplastyczniającej daną próbkę przez jej początkowe pole powierzchni czołowej, wynoszą odpowiednio:  $\sigma_g = 1,123 \text{ kp/mm}^2$  dla próbki o kącie  $\gamma = 30^\circ$ ,  $\sigma_g = 0,965 \text{ kp/mm}^2$  dla próbki o kącie  $\gamma = 45^\circ$  i  $\sigma_g = 0,594 \text{ kp/mm}^2$  dla próbki walcowej. Rzeczywiste współczynniki zwiększenia nośności granicznej obliczone

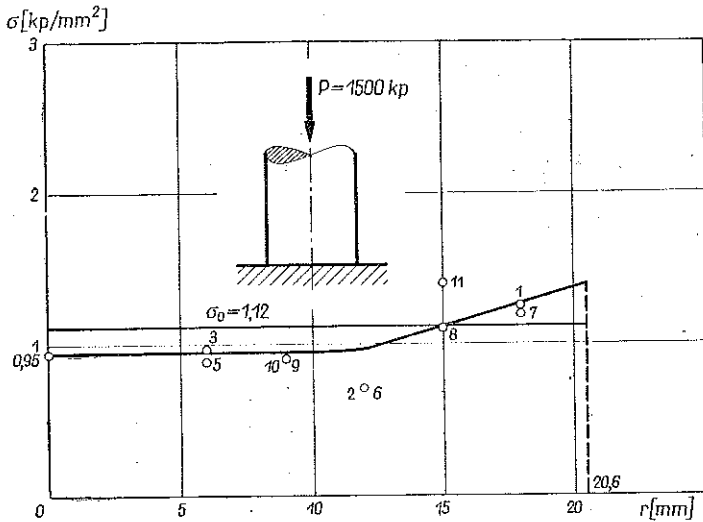


Rys. 8

jako stosunek naprężeń granicznych próbki kształtowej do naprężeń próbki walcowej o tym samym czynnym przekroju wynoszą  $f = 2,23$  dla  $\gamma = 30^\circ$  i  $f = 1,915$  dla  $\gamma = 45^\circ$ . Wielkości te zaznaczono gwiazdkami na wykresie (rys. 5), gdzie oprócz krzywych teoretycznych i punktów doświadczalnych, otrzymanych dla ołowiu, naniesiono również wyniki doświadczeń, zaczerpnięte z innych prac. I tak punkty zaznaczone trójkątami i kwadratami otrzymano dla rozciąganych, osiowo-symetrycznych prętów osłabionych kątowym wytoczeniem, przy czym trójkąty odnoszą się do próbek aluminiowych [11], a kwadraty do próbek ze stopu aluminium PA3 [4]. Kółkami natomiast zaznaczono punkty doświadczalne dla próbek stalowych [12], kółka zaczernione otrzymano przy ściskaniu stempla w kształcie ściętego stożka przy występowaniu sił tarcia na jego powierzchni czołowej, natomiast kółka białe otrzymano dla próbek o takim samym kształcie, ale doświadczenia tak przeprowadzono, że na powierzchni czołowej nie występowały siły tarcia.

Doświadczenia drugiej grupy wykonano na uprzednio opisanym przyrządzie pozwalającym na pomiar kontaktowych naprężeń normalnych w zaawansowanym

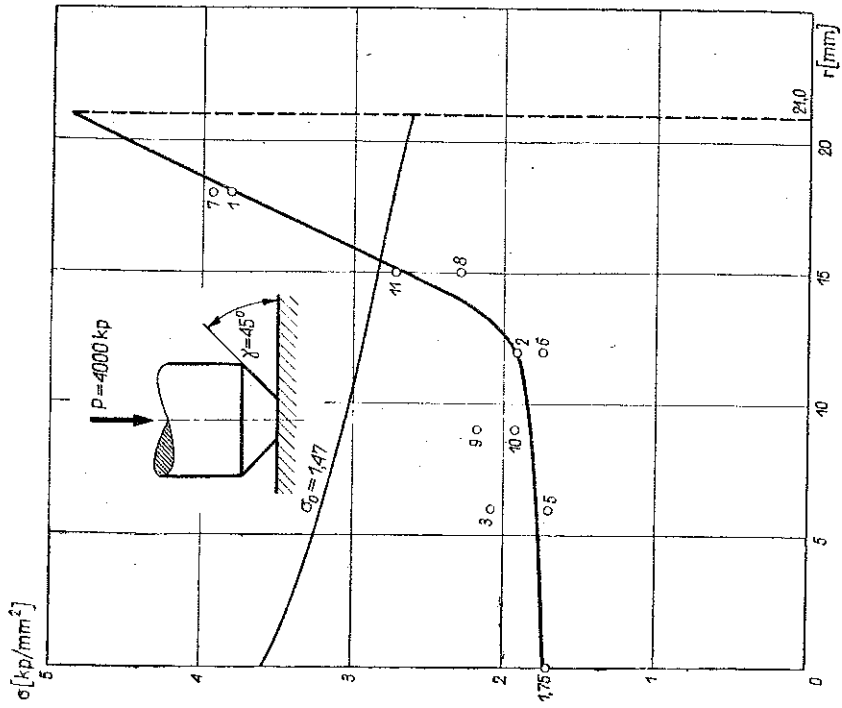
procesie plastycznego płynięcia próbki. Wszystkie wyniki eksperymentów przedstawiono w postaci wykresów naprężeń w funkcji promienia powierzchni czołowej próbki, liczonego od jej osi symetrii. Na danym promieniu mamy po dwa punkty doświadczalne, odpowiadające wskazaniom czujników symetrycznie położonych.



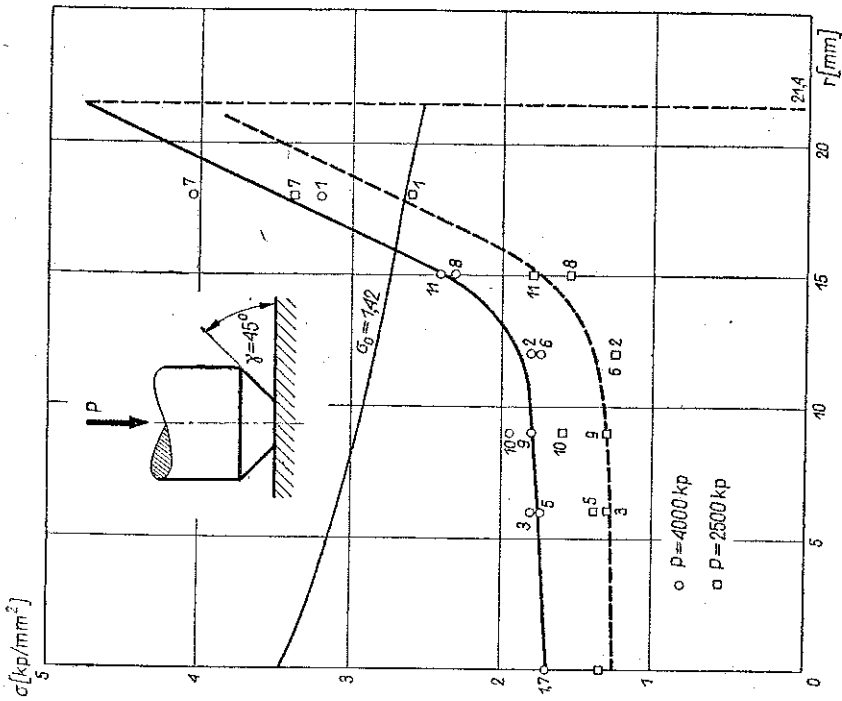
Rys. 9

Na rysunku 9 przedstawiono wyniki pomiarów naprężeń normalnych przy ściskaniu próbki walcowej. Kółkami zaznaczono zmierzone w poszczególnych punktach wartości naprężeń odpowiadające całkowitej sile obciążającej próbkę  $P=1500$  kp. Umieszczone obok kółek cyfry przedstawiają numery czujników zgodnie z oznaczeniami podanymi na dolnym rzucie, rys. 6. Gruba linia opisująca punkty doświadczalne przedstawia rzeczywisty rozkład nacisków normalnych, natomiast linią cienką zaznaczono średnią wartość naprężeń normalnych. Nieznaczny wzrost naprężeń na zewnętrznych promieniach próbki świadczy o występowaniu sił tarcia na powierzchni czołowej. Również przeprowadzony pomiar beczkowatości próbki po jej odkształceniu potwierdza ten wniosek. Średnica powierzchni czołowej, odkształconej prawie o 7,5% próbki, wzrosła prawie o 1,5 mm, natomiast średnica w części środkowej próbki wzrosła o 1,9 mm. Po wywołaniu tego samego odkształcenia w ściskanej próbce między dwiema płytami, na których były nacięte w prostopadłych kierunkach ostre kanałki, średnica w części środkowej wzrosła o 2 mm, natomiast przy powierzchni czołowej o 0,8 mm. Z przeprowadzonych pomiarów można więc wnosić, że przy zastosowanym w pracy smarowaniu siły tarcia na powierzchni kontaktowej są mniejsze niż miałyby to miejsce w przypadku trwałego złączenia stempla i płyty oporowej.

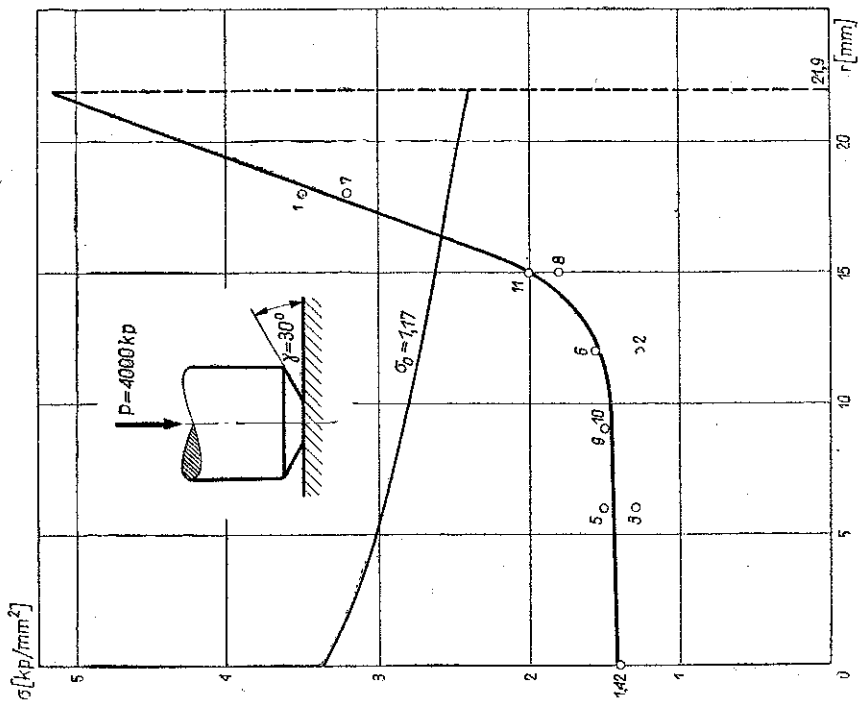
Wyniki pomiarów dla kształtowych próbek o kącie nachylenia tworzącej stożka  $\gamma=45^\circ$  przedstawiono na rys. 10 i 11, a dla próbek o kącie  $\gamma=30^\circ$  na rys. 12 i 13. Na pierwszym z nich zaznaczono punkty doświadczalne dla dwóch poziomów



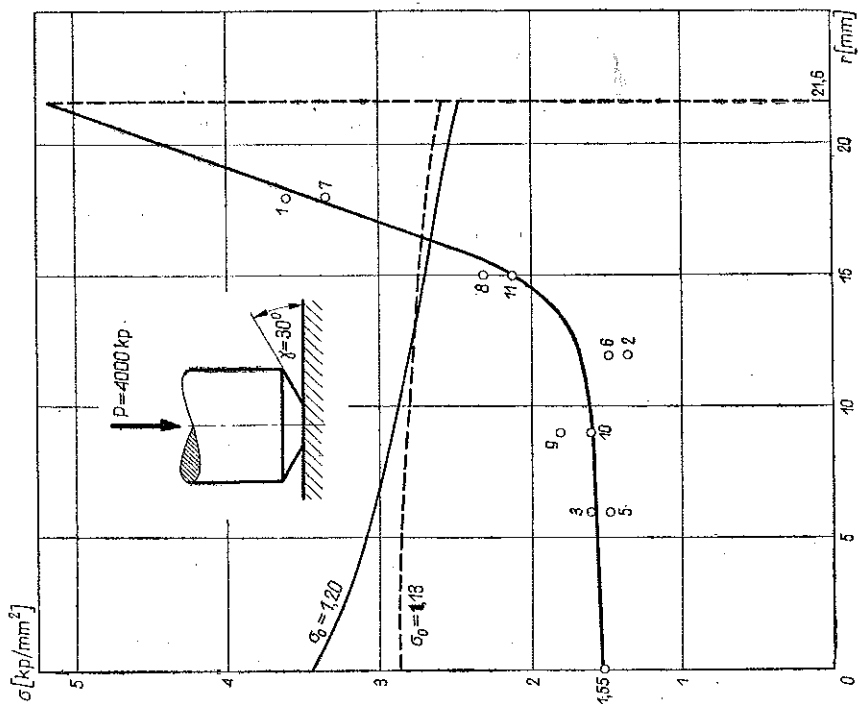
Rys. 11



Rys. 10

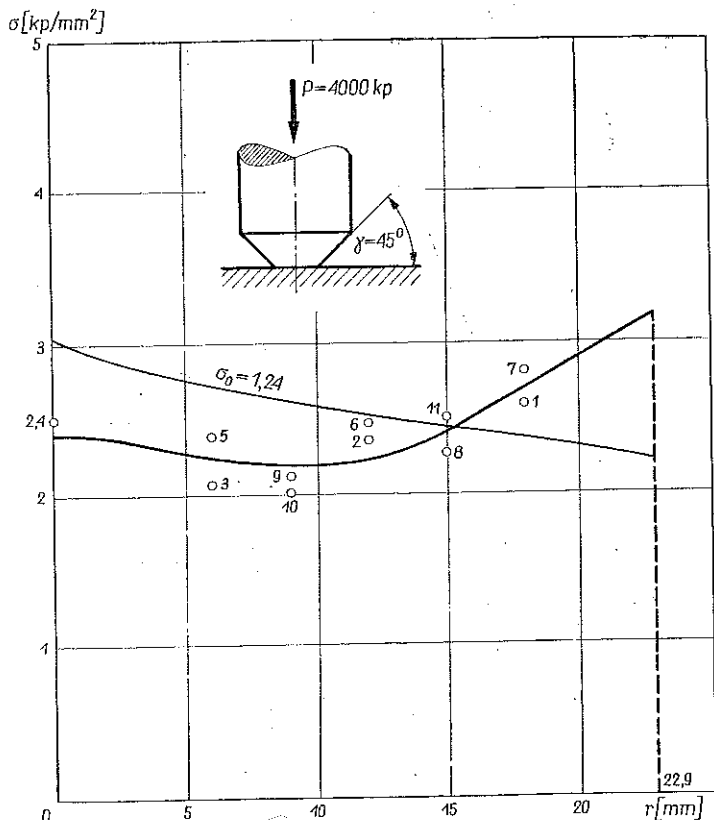


Rys. 13



Rys. 12

całkowitego obciążenia. Linia gruba przerywana opisuje punkty zaznaczone kwadratami, otrzymane przy obciążeniu  $P=2500$  kp. Natomiast linia gruba ciągła i punkty zaznaczone kółkami odnoszą się do obciążenia 4000 kp. Na pozostałych rysunkach zaznaczono jedynie punkty doświadczalne przy obciążeniu siłą 4000 kp. Na rysunkach obok wyników doświadczalnych naniesiono również liniami cienkimi wykresy teoretyczne, otrzymane przy przyjęciu modelu materiału sztywno-idealnie plastycznego. Liniami ciągłymi narysowano rozkłady obliczone z rozwiązania, którego typ przedstawiono na rys. 1, a więc przy założeniu braku sił tarcia na powierzchni kontaktowej. Na wykresie (rys. 12) zaznaczono również linią przerywaną teoretycz-



Rys. 14

ny rozkład otrzymany przy uwzględnieniu sił tarcia z rozwiązania przedstawionego na rys. 3. Zaznaczoną obok krzywych teoretycznych wielkość  $\sigma_0$ , odpowiadającą umownej granicy plastyczności, obliczono w każdym konkretnym przypadku z warunku  $\sigma_0 = \sigma_{sr}/f$ , gdzie  $\sigma_{sr} = P/\pi R_a^2$  jest średnim naprężeniem wynikającym z podzielenia całkowitej siły przez odpowiadające jej pole przekroju powierzchni czołowej, a  $f$  jest teoretycznym współczynnikiem zwiększenia nośności granicznej.

Próbki, których wyniki badań były dotychczas przedstawione, wykonano na drodze obróbki skrawaniem odlanych, walcowych półfabrykatów. Na rys. 14

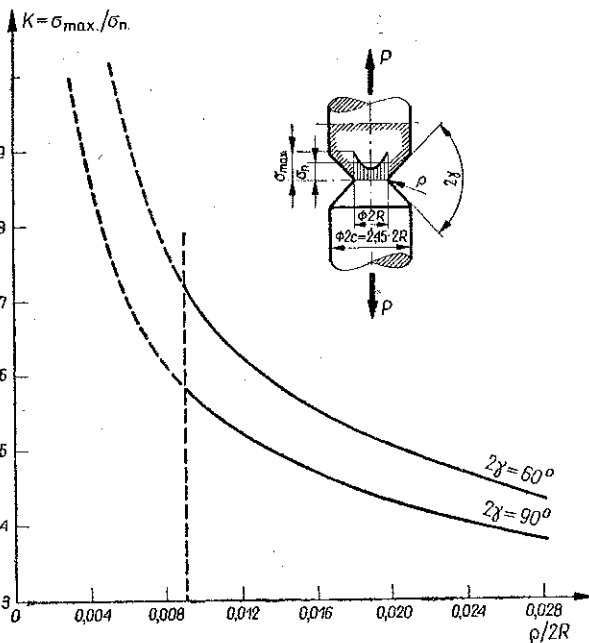
przedstawiono wyniki pomiarów dla próbki o kącie  $\gamma=45^\circ$ , wykonanej w inny sposób. Wstępnie obrobiony odlew był w tym przypadku wciskany do stalowej matrycy, gdzie następnie poddano uformowany stempel silnemu zginiotowi obciążając go siłą 70 t. Dzięki temu próbka miała w stosunku do poprzednich bardziej jednorodną, drobnoziarnistą strukturę i znacznie wzmocniony materiał, szczególnie w części walcowej. Inny też otrzymano rozkład nacisków, zmalały naprężenia na zewnętrznych promieniach, natomiast wzrosły w porównaniu do wykresów z rysunków 10 i 11 w przedziale  $0 < r < 15$  mm. Tym niemniej charakter wykresu pozostał bez zmiany i największe naprężenia występują na zewnętrznych promieniach. Zauważono, podobnie jak dla innych próbek, występowanie odkształceń w części walcowej dla obciążenia  $P=4000$  kp.

W wykorzystanym do badań przyrządzie skrajne czujniki pomiarowe znajdowały się w odległości około 18 mm od środka. Wobec braku punktów pomiarowych na większych promieniach powierzchni czołowej przebieg doświadczalnych wykresów rysowano w tym zakresie jako liniowe przedłużenie poprzedniego odcinka. Poprawność narysowanego w ten sposób wykresu sprawdzano z warunku zgodności całkowitej siły z wartością obliczoną przez scałkowanie danego rozkładu naprężeń.

### 5. Analiza wyników

Otrzymane na podstawie przeprowadzonych doświadczeń wykresy naprężeń normalnych w sposób istotny różnią się od wykresów obliczonych na podstawie równań teorii plastyczności. Rozkłady doświadczalne cechują się przede wszystkim wyraźnym spiętrzeniem naprężeń na zewnętrznych promieniach powierzchni kontaktu. Stopień tego spiętrzenia jest jednak znacznie mniejszy w stosunku do rozwiązań teorii sprężystości. Na rys. 15 przedstawiono wykres współczynnika koncentracji naprężeń  $K$  w funkcji promienia zaokrąglenia dna karbu  $\rho$  dla dwóch różnych kątów rozwarcia wycięcia. Wykres ten obliczono z nomogramu zamieszczonego w pracy NEUBERA [8]; odnosi się on do rozciąganych osiowo-symetrycznych prętów osłabionych wycięciem kątowym z zaokrąglonym dnem i będzie on również użyteczny dla przypadku ściskania stempla o analogicznym kształcie przy założeniu, że nie występują siły tarcia na powierzchni kontaktowej. Współczynnik koncentracji naprężeń jest tu zdefiniowany jako stosunek największych naprężeń do naprężeń średnich w najwęższym przekroju próbki. Liniami grubymi na rys. 15 narysowano odcinki krzywych, otrzymane bezpośrednio z nomogramu Neubera, natomiast dla wartości  $\rho/2R < 0,009$  liniami przerywanymi narysowano ekstrapolację zależności  $K=K(\rho)$ . Wartość współczynnika spiętrzenia naprężeń dąży do nieskończoności dla ostrych podcięć ( $\rho=0$ ), ale nawet dla wartości  $\rho/2R=0,009$  (co dla przyjętej w pracy średnicy  $2R=37,5$  mm odpowiada wartości  $\rho \approx 0,34$  mm) teoretyczny współczynnik spiętrzenia naprężeń jest znacznie większy od wartości zmierzonych. Dla podcicia o kącie  $\gamma=30^\circ$  teoretyczna wartość wynosi  $K_t=7,2$  i dla  $\gamma=45^\circ$   $K_t=5,8$ . Natomiast średnie wartości mierzone wynoszą  $K=3,4$  dla  $\gamma=30^\circ$  i  $K=2,8$  dla  $\gamma=45^\circ$ .

Rzeczywisty mechanizm powstawania odkształceń przebiega następująco. W pierwszej fazie obciążenia silny wzrost naprężeń na zewnętrznych promieniach powierzchni czołowej próbki powoduje powstanie tam odkształceń plastycznych. W miarę wzrostu siły strefa plastyczna powiększa się i tym samym zmienia się wykres naprężeń normalnych w stosunku do wykresu, gdy cały materiał był w stanie sprężystym. Jednocześnie materiał strefy plastycznej ulega wzmocnieniu i odkształcenia lokalizują się coraz dalej od powierzchni czołowej ściętego stożka, aby przy pewnej wartości siły objąć swoim zasięgiem również i część walcową. Występuje tu wyraźna jakościowa różnica między procesem ściskania i rozciągania próbek osłabionych karbem. W procesie rozciągania w miarę wzrostu obciążenia maleje minimalna średnica próbki i stosunek  $c/R$  będzie ulegać zwiększeniu w procesie odkształcania. Istnieją więc tu przesłanki do lokalizacji odkształceń w okolicy najmniejszego przekroju. Natomiast przy ściskaniu stempli w miarę wzrostu odkształceń średnica powierzchni czołowej ulega zwiększeniu, a tym samym stosunek  $c/R$  będzie malał w procesie plastycznego odkształcania.



Rys. 15

Dla próbek o kącie  $\gamma=45^\circ$  odkształcenia w części walcowej zaczynają powstawać po osiągnięciu (w środku powierzchni czołowej) naprężeń około  $1,7 \text{ kp/mm}^2$ , natomiast dla próbek o kącie  $\gamma=30^\circ$  wartość około  $1,5 \text{ kp/mm}^2$  na tyle wzmacnia materiał, że dalsze odkształcenia powstają poza najmniejszym przekrojem. To obniżenie wartości naprężeń dla próbek o kącie  $30^\circ$  jest niewątpliwie spowodowane zbyt małą w stosunku do rozwiązania teoretycznego średnicą części walcowej. Pojawienie się odkształceń w oddalonych od powierzchni czołowej częściach próbek uniemożliwia zmianę charakteru wykresów ze wzrostem deformacji.



Przy analizowaniu zaobserwowanych tu rozbieżności między wynikami doświadczenia i teorii trzeba przede wszystkim pamiętać, że wykresy teoretyczne uzyskano na podstawie układu równań wyprowadzonych przy założeniu sztywno-idealnie plastycznego modelu ciała oraz przyjętej *a priori* hipotezie Haara-Kármána. Pewne informacje o wpływie wzmocnienia materiału na charakter wykresu można uzyskać na podstawie wyników doświadczenia, przedstawionych na rys. 14. Ściskana próbka miała w tym przypadku w stosunku do poprzednio badanych stempli znacznie wzmocniony materiał w części walcowej, co spowodowało pewne opóźnienie w rozwinięciu się tam odkształceń. Było to bezpośrednią przyczyną wyraźnej, ilościowej zmiany rzeczywistego wykresu. Zmierzony współczynnik spiętrzenia naprężeń wynosi w tym przypadku  $K=1,3$ .

## 6. Wnioski

Doświadczalnie określony współczynnik zwiększenia nośności granicznej ściskanego w poprzednio opisanych warunkach stempla w kształcie ściętego stożka dość dobrze zgadza się z wartościami, obliczonymi na podstawie teorii plastyczności (rys. 6). Podobna zgodność była niejednokrotnie potwierdzana w innych pracach dla innych materiałów i kształtów ściskanego lub rozciąganego elementu. Można tu przykładowo wymienić choćby prace [1, 4, 5, 11 i 12].

Z doświadczeń drugiej grupy wynika, że rzeczywisty rozkład naprężeń na czołowej powierzchni ściskanego stempla w zakresie plastycznym różni się jakościowo od rozkładu określonego z równań teorii plastyczności. Wykresy narysowane na podstawie przeprowadzonych pomiarów mają wyraźne spiętrzenie naprężeń na zewnętrznym promieniu powierzchni czołowej. Stopień tego spiętrzenia jest jednak znacznie mniejszy, niż to wynika z rozwiązań teorii sprężystości. Rzeczywisty współczynnik koncentracji naprężeń znacznie maleje, jeśli utrudnić rozwijanie się odkształceń w części walcowej próbki (rys. 14).

Wzmocnienie materiału jest niewątpliwie istotną przyczyną rozbieżności między teorią i doświadczeniem, jednakże przeprowadzone badania ze względu na swój zakres nie dają podstawy do stwierdzenia, w jakim stopniu na wyniki wpływa wzmocnienie materiału, jak również nie dają podstawy do potwierdzenia czy też zaprzeczenia słuszności hipotezy Haara-Kármána.

## Literatura cytowana w tekście

1. A. G. ATKINS, D. TABOR, *Plastic indentation in metals with cones*, J. Mech. Phys. Solids, 13 (1965), 149 - 164.
2. J. F. W. BISHOP, *On the complete solution to problems of deformation of a plastic-rigid material*, J. Mech. Phys. Solids, 2 (1953), 43 - 53.
3. L. DIETRICH, *Nośność graniczna w zagadnieniach kontaktowych* [w druku].
4. L. DIETRICH, W. SZCZEPIŃSKI, *Plastic yielding of axially-symmetric bars with non-symmetric V-notch*, Acta Mech., 4 (1967), 230 - 240.
5. L. DIETRICH, K. TURSKI, *Nośność graniczna rozciąganych osiowo-symetrycznych prętów osłabionych szeregiem korbów kątowych*, Mech. Teor. i Stos., 6 (1968), 437 - 448.

6. G. EASON, R. T. SHIELD, *The plastic indentation of a semi-infinite solid by a perfectly rough circular punch*, ZAMP, **11** (1960), 33 - 42.
7. F. J. LOCKETT, *Indentation of a rigid-plastic material by a conical indenter*, J. Mech. Phys. Solids, **11** (1963), 345 - 355.
8. H. NEUBER, *Kerbspannungslehre*, Springer-Verlag, Berlin 1958.
9. R. E. PETERSON, *Stress Concentration Design Factors*, J. Wiley, New York 1953.
10. R. T. SHIELD, *On the plastic flow of metals under conditions axial symmetry*, Proc. Roy. Soc., A, **233** (1955), 267 - 286.
11. W. SZCZEPIŃSKI, L. DIETRICH, E. DRESCHER, J. MIĄSTKOWSKI, *Plastic flow of axially-symmetric notched bars pulled in tension*, Int. J. Solids Structures, **2** (1966), 543 - 554.
12. N. P. SUH, R. S. LEE, C. R. ROGERS, *The yielding of truncated solid cones under quasi-static and dynamic loading*, **16** (1968), 357 - 372.

## Резюме

### КОНТАКТНОЕ НАПРЯЖЕНИЕ, В ПРОЦЕССЕ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ ПРОФИЛЬНОГО ОСЕСИММЕТРИЧЕСКОГО ШТАМПА

Обсуждается способ и результаты измерений нормальных напряжений, появляющихся на торцевой поверхности, при сжатии в пластической области осесимметрического штампа, в виде усеченного конуса. Экспериментальные исследования проводились для двух серий образцов, изготовленных из свинца и различающихся углом наклона образующей конуса. Определенное, на основании экспериментов, распределение нормальных напряжений, принципиально различается от распределения вычисленного на основе теории пластичности. Диаграммы, изготовленные на основании, проведенных измерений показывают отчетливо концентрацию напряжений на внешнем радиусе торцевой поверхности; степень концентрации является, однако, меньшей чем бы то следовало из решений теории упругости.

## Summary

### CONTACT STRESSES IN THE PROCESS OF PLASTIC FLOW OF AN AXIAL-SYMMETRICALLY SHAPED STAMP

In the paper the method and results are given of the measurements of the normal contact stresses occurring on a frontal surface during compression in the plastic range of an axial-symmetrical stamp in the shape of a truncated cone. Experimental investigations were carried out for two batches of samples differing in the angle of inclination of the generator of the cone, made of lead. The distribution of normal stresses determined on the basis experiments differs essentially from the distribution calculated on the basis of the equation of the theory of plasticity. The graphs plotted on the basis of the performed measurements possess a distinct accumulation of the stresses on the external radius of the frontal surface; the degree of this accumulation is however smaller than it follows from solutions of the theory of plasticity.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI  
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca została złożona w Redakcji dnia 6 września 1969 r.