

ZNISZCZENIE PEŁZAJĄCE W OŚRODKACH SPRĘŻYSTO-LEPKO-PLASTYCZNYCH

MIŁOSZ WNUK (SOUTH DAKOTA)

1. Wstęp

Szczeliny występujące w polimerach powodują niejednorodny stan odkształcenia i naprężenia. Prawa fizyczne (sprężyste czy też lepko-sprężyste), wiążące odkształcenia w strefie poddanej wysokim naprężeniom ze stanem naprężenia nie mogą być liniowe. Dane doświadczalne zebrane przez BERREGO [2], CESSNA i STERNSTEINA [4] i KAMBOURA [9] wskazują na istnienie znacznych nieodwracalnych odkształceń zlokalizowanych w płaszczyźnie szczeliny i tworzących wąską warstwę w postaci «przedłużenia» szczeliny. Taki stan odkształcenia, poprzedzający zniszczenie, był obserwowany w amorficznych termoplastykach (por. KAMBOUR [9]). Obszary położone około brzegów szczeliny o wyraźnie odmiennych własnościach optycznych i mechanicznych nazywać będziemy «pseudo-pęknięciem» (termin angielski «craze»). To właśnie w tym obszarze większa część energii jest rozproszona przed pęknięciem właściwym. Na przykład dla pleksiglasu (PMMA) KAMBOUR ocenia, że tylko 1,5% energii zostaje zużyte na pokonanie sił spójności, 16% jest stracone na deformację plastyczną, reszta jest rozproszona podczas procesów deformacji lepko-sprężystej.

Wydaje się, że żadna z dotychczasowych teorii zniszczenia pełzającego nie uwzględnia nieliniowych procesów zależnych od czasu, występujących w wierzchołku szczeliny. Wcześniejsze prace WILLIAMSZA [21], SCHAPERZY i WILLIAMSZA [18] oraz KNAUSSA [10] wyprowadzają prawa zniszczenia pełzającego na gruncie liniowej teorii lepko-sprężystości. WILLIAMS [21] próbuje uniknąć osobliwości, jaka pojawia się w wierzchołkach szczeliny, przez intuicyjne wprowadzenie pewnego charakterystycznego obszaru, którego wielkość określa intuicyjnie (podobnie jak to uczynił NEUBER dla metali); w obszarze tym składowe stanu naprężenia są uśredniane. Poza tym w modelach Williama [21] materiał wokół szczeliny zostaje zastąpiony układem niezależnych «kolumn», z których każda kolejno wchodzi w kontakt z wierzchołkiem poruszającej się szczeliny.

Z drugiej strony istnieją opracowania, SCHAPERZY [18], w których na podstawie ogólnych rozważań termodynamicznych wyprowadza się równanie bilansu energetycznego dla chwili pojawienia się zniszczenia i dla ruchu szczeliny. WILLIAMS [22] równania te zastosował do liniowego lepko-sprężystego ośrodka, jednakże, aby uniknąć trudności matematycznych, WILLIAMS nie rozwiązuje problemu szczeliny,

lecz rozważa defekt kulisty, powstający pod wpływem działania ciśnienia hydrostatycznego.

SMITH [19] oraz KNAUSS [10] poświęcili sporo uwagi problemowi zniszczenia w polimerach przy dwuwymiarowych stanach naprężenia i rozmaitych historiach obciążenia. Wyniki tych badań, uzupełnione danymi doświadczalnymi, wskazują, że wartość obciążenia krytycznego (lub krytycznej deformacji) zależy od prędkości oraz od drogi obciążenia.

Stosunkowo niedawno CESSNA i STERNSTEIN [4] zaproponowali pewien nieliniowy model reologiczny, nadający się do opisu niejednorodnego stanu odkształcenia w ciele osłabionym szczeliną. Model ten składa się z elementu Maxwella połączonego w szereg z elementem Voigta z tym zastrzeżeniem, że tłumik w tym ostatnim jest nieliniowy zgodnie z prawem płynięcia Eyringa. Rzeczywiście model taki pozwala opisać kilka istotnych właściwości polimerów: sprężystość natychmiastową, lepkie płynięcie oraz sprężysty powrót a także to, co jest najistotniejsze w teorii szczelin: płynięcie plastyczne w obszarze wysokich wartości naprężeń z równoczesnym zachowaniem liniowej lepko-sprężystości w pozostałej części ośrodka. Autorzy ci określili także na drodze doświadczalnej pięć stałych charakteryzujących ów model w odniesieniu do pleksiglasu (PMMA). Budując następnie prostą, przybliżoną teorię odkształceń dla wierzchołka szczeliny, CESSNA i STERNSTEIN porównują dane z testów laboratoryjnych, dotyczących zniszczenia, z przewidywaniami teoretycznymi. Zgodność jest dobra, jakkolwiek użycie modelu o stałych skupionych (zamiast ciągłego spektrum) wydaje się zmniejszać ogólność metody. Chociaż trudno jest ocenić precyzję przybliżeń w analizie Cessny i Sternsteina, ich praca daje doskonały pogląd na problemy związane z opóźnionym zniszczeniem w ciałach lepko-sprężysto-plastycznych.

W związku z niniejszym studium interesująca jest własność zaobserwowana przez CESSNĘ i STERNSTEINA; jest to mianowicie stałość parametru proporcjonalnego do «wielkości» strefy plastycznej w chwili krytycznej. Parametr ten pozostawał niezmienny przy bardzo różnych wartościach koncentracji naprężeń oraz prędkości obciążenia (w przedziale od 10^{-1} do 10^{-4} s $^{-1}$). W świetle tym usprawiedliwione wydaje się założenie przyjęte w niniejszej pracy, że istnieje krytyczne przemieszczenie w wierzchołku szczeliny, decydujące o własnościach wytrzymałościowych materiału ⁽¹⁾. Również dane zebrane przez SMITHA [19], LOWA [11], KNAUSSA [10] oraz MUELLERA i KNAUSSA [13] dowodzą istnienia krytycznego przemieszczenia; w ostatniej spośród wymienionych prac wielkość ta jest także zależna od temperatury oraz prędkości obciążenia (dane doświadczalne).

Niniejsza praca przedstawia próbę rozwiązania problemu rozkładu naprężeń, odkształceń i przemieszczeń około osiowo-symetrycznej szczeliny przy przyjęciu modelu Dugdale'a dla opisu efektów plastycznych w obszarze koncentracji naprężeń (wąska strefa w kształcie pierścienia otaczającego szczelinę) oraz przy założeniu, że materiał zdala od szczeliny zachowuje się jak liniowe ciało lepko-sprężyste.

⁽¹⁾ Niektórzy badacze nie lubią założenia o «krytycznym przemieszczeniu», jak np. W. S. BLACKBURN (informacja prywatna). Twierdzą oni, że własność ta powinna raczej wynikać z teorii.

Nie czynimy żadnych dalszych zastrzeżeń odnośnie rodzaju modelu reologicznego. Poszukiwać będziemy zależności rozkładu naprężeń około szczeliny od obciążenia, czasu i drogi obciążenia. Ponadto w ogólnym przypadku, który poniżej zostanie rozpatrzony, płynięcie plastyczne w obszarze koncentracji naprężeń będzie także zależne od czasu. Przyjmijmy, że charakter zmienności granicy plastyczności w czasie określony jest równaniem Crocheta

$$(1.1) \quad Y(t) = A + B \exp(-C\chi),$$

gdzie A , B i C są stałymi materiałowymi, χ jest zależne od historii obciążenia. Podobnie jak i CROCHET wybierzemy następującą reprezentację:

$$(1.2) \quad \chi = [(\varepsilon_{ij}^V - \varepsilon_{ij}^E)(\dot{\varepsilon}_{ij}^V - \dot{\varepsilon}_{ij}^E)]^{1/2},$$

gdzie wskaźniki V oraz E oznaczają lepko-sprężyste oraz czysto-sprężyste składowe odkształceń. Równanie (1.1) definiuje granicę plastyczności Y jako funkcję monotonicznie malejącą wraz z χ . Oznacza to, że szybsze obciążanie odpowiada wyższym wartościom ciśnienia płynięcia (zgodnie z danymi doświadczalnymi; por. HELLER, STOLL i FREUDENTHAL [8]).

Równanie (1.2) wskazuje również, że początkowe odkształcenie ośrodka jest typu idealnie sprężysto-plastycznego, ponieważ dla $\chi=0$ obserwujemy uplastycznienie wzdłuż początkowej strefy plastycznej, której długość określa jedynie wielkość obciążenia oraz początkowa granica plastyczności $Y(0) = A + B$. Zmniejszaniu Y przy stałym obciążeniu (nie dość dużym, aby spowodować zniszczenie) odpowiada wydłużanie i poszerzanie strefy plastycznej. Towarzyszy temu także wzrost przemieszczeń w wierzchołku szczeliny, w głębi strefy plastycznej. To stadium powstawania pęknięcia może być porównane do stadium tworzenia się pseudo-pęknięcia (craze), jak zaobserwował KAMBOUR [9].

Celem niniejszej analizy jest ustalenie zależności między wytrzymałością materiału, historią obciążenia, czasem, temperaturą, a także szybkością odkształceń. Te właśnie parametry określają zniszczenie pełzające w polimerach.

W granicach przypadku, gdy efekty plastyczne w wierzchołku szczeliny można pominąć (ciało kruche) oraz dla jednej tylko wartości czasu (gdy opóźnienie lepkie równa się zeru) — otrzymujemy z naszej teorii teorię Griffitha. Możliwy jest też inny przypadek graniczny, gdy obszar odkształceń plastycznych posiada stałą długość, małą w porównaniu z długością szczeliny; otrzymujemy wówczas modyfikację Irwina-Orowana. Zasadnicza różnica między wymienionymi tu przypadkami a naszą teorią polega na uwzględnieniu czasu jako parametru decydującego o zniszczeniu.

2. Rozkład naprężeń i odkształceń. Granica plastyczności jako funkcja czasu

Problem szczeliny rozprzestrzeniającej się w lepko-sprężystym ośrodku lub też szczeliny o stałej długości lecz poddanej zmieniającym się w czasie obciążeniom nie może być rozwiązany za pomocą istniejących metod teorii ciał lepko-sprężystych, tzn. za pomocą analogii sprężysto-lepko-sprężystej. Obydwa wymienione zagadnienia prowadzą do mieszanego problemu brzegowego z warunkami brzegowymi

zależnymi od czasu, a zatem do przypadku, gdy transformacje całkowe względem czasu nie mogą być wykonane.

Jednakże w przypadku, gdy wszystkie wielkości zależne od czasu rosną monotonicznie, możemy zastosować «uogólnioną zasadę analogii» GRAHAMA [7].

Według modelu, który tutaj proponujemy, szczelina osiowo-symetryczna jest otoczona wąską strefą plastyczną typu Dugdale'a, a otaczający materiał zachowuje się jak liniowy lepkosprężysty ośrodek opisany następującymi równaniami:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} s_{ij} &= \int_{-\infty}^t G_1(t-\tau) \frac{\partial e_{ij}(\tau)}{\partial \tau} d\tau, \\ s &= \int_{-\infty}^t G_2(t-\tau) \frac{\partial e(\tau)}{\partial \tau} d\tau, \end{aligned}$$

gdzie $G_1(t)$ i $G_2(t)$ są modułami relaksacyjnymi przy ściskaniu oraz izotropowym ściskaniu, s_{ij} i e_{ij} są dewiatorami naprężenia i odkształcenia oraz $\delta_{ij} s$ i $\delta_{ij} e$ tensorami kulistymi odpowiednio dla stanu naprężenia i odkształcenia. Można z łatwością wykazać, że wzór GRAHAMA [7] na przemieszczenie w płaszczyźnie szczeliny

$$(2.2) \quad \begin{aligned} u_z(\rho, t) &= \frac{2}{\pi} K(0) \int_{\rho}^{a(t)} \frac{dv}{(v^2 - \rho^2)^{1/2}} \int_0^v \frac{sp(s, t) ds}{(v^2 - s^2)^{1/2}} + \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_0^t K(\tau) \operatorname{Re} \left\{ \int_{\rho}^{a(t-\tau)} \frac{dv}{(v^2 - \rho^2)^{1/2}} \int_0^v \frac{sp(s, t-\tau) ds}{(v^2 - s^2)^{1/2}} \right\} d\tau \end{aligned}$$

może być napisany prościej w następującej postaci:

$$(2.3) \quad u_z(\rho, t) = u_z^0(\rho, t) + \int_0^t \frac{\dot{K}(\tau)}{K(0)} u_z^0(\rho, t-\tau) d\tau.$$

Tutaj $u_z^0(\rho, t)$ jest rozwiązaniem sprężystym tego samego problemu brzegowego (skojarzone rozwiązanie sprężyste), $p(\rho, t)$ ciśnieniem przyłożonym do powierzchni szczeliny, do której włączamy także obszar plastyczny, $\rho = r/a$ jest bezwymiarową współrzędną radialną (pozostałymi współrzędnymi są z i θ) oraz $a(t)$ zewnętrznym promieniem strefy plastycznej (jest on większy lub też w granicy równy długości szczeliny $l(t)$). Na koniec funkcja $K(t)$ jest zdefiniowana [7] w sposób następujący:

$$(2.4) \quad K(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2(2G_1^*(s) + G_2^*(s))}{s^2(G_1^*(s) + 2G_2^*(s)) G_1^*(s)}, s \rightarrow t \right],$$

gdzie $G_1^*(s)$ i $G_2^*(s)$ są transformatami Laplace'a modułów relaksacyjnych oraz \mathcal{L}^{-1} oznacza odwrotną transformację Laplace'a. Równanie (2.3) odnosi się do dowolnego liniowego materiału lepkosprężystego, którego własności są określone za pomocą funkcji (2.4). Wzory tego samego typu, jak można wykazać, są prawdziwe dla wszystkich składowych pola przemieszczeń oraz odkształceń, a naprężenia wokół szczeliny są takie same, jak w problemie sprężystym.

Przy dodatkowym założeniu, że współczynnik Poissona jest niezależny od czasu, moduły G_1 i G_2 są od siebie zależne w prosty sposób: $G_1 = (1-2\nu) G_2 / (1+\nu)$. Wówczas równanie (2.4) przyjmuje postać [7]

$$(2.5) \quad K(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2(1-\nu)}{s^2 G_1^*(s)}, s \rightarrow t \right]$$

lub

$$(2.6) \quad K(t) = \begin{cases} (1-\nu) D_S(t), \\ 2(1-\nu) D_T(t), \end{cases}$$

gdzie $D(t)$ jest podatnością na pełzanie, mierzoną przy ścinaniu D_S lub też przy rozciąganiu D_T . W dalszym ciągu będziemy posługiwać się jedynie funkcją D_T . Dla uproszczenia opuścimy tu indeks T .

Nasz model szczeliny różni się nieco od modelu zaproponowanego przez GOODIERA i FIELDA [6] dla przypadku dwuwymiarowego oraz przez OLESIAKA i WNUKA [14] dla przypadku trójwymiarowego, zwłaszcza w dwóch aspektach. Po pierwsze przyjmujemy tutaj, że granica plastyczności będzie funkcją czasu $Y = Y(t)$ zgodnie z (1.1). Funkcja ta nie jest znana *a priori* i zostanie ona określona po rozwiązaniu odpowiedniego problemu brzegowego w liniowej lepko-sprężystości. Gdy składowe tensorów σ_{ij}^n oraz ε_{ij}^E będą znane, niezmiennik χ będzie skonstruowany tak, jak tego wymagają równania (1.1) i (1.2). Po drugie zasadnicza różnica polega na innej formie równań konstytucyjnych ośrodka otaczającego szczelinę: ośrodek jest tutaj «wrażliwy» na procesy zależne od czasu w odróżnieniu od poprzednich przypadków.

Zgodnie z CROCHETEM [5] granica plastyczności jest określona przez wielkość proporcjonalną do intensywności odkształceń w najbardziej odkształconym elemencie, mianowicie

$$\chi = [(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0)(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0)]^{1/2},$$

gdzie ε_{ij} i ε_{ij}^0 oznaczają lepko-sprężyste oraz sprężyste składowe odkształcenia, obliczone w najbardziej odkształconym punkcie obszaru sprężystego. W naszym przypadku punkt ten pokrywa się z zewnętrznym brzegiem strefy plastycznej $r=a$.

Po natychmiastowym uplastycznieniu, które określa początkową długość strefy plastycznej, proces uplastycznienia trwa nadal: wyobrażamy sobie, że proces ten może być w przybliżeniu przedstawiony przez funkcję schodkową (rys. 1). Równocześnie długość strefy plastycznej rośnie z upływem czasu. W rzeczywistości prawdziwy rozkład naprężeń σ_z jest ciągły (rys. 1b). Ten wykres z kolei zostanie uproszczony i zastąpiony przez pojedynczą linię prostą, narysowaną na średniej wysokości, tj. średniej pomiędzy początkową granicą plastyczności Y_0 oraz chwilową granicą plastyczności $Y(t)$, obliczoną w punkcie $r=a$:

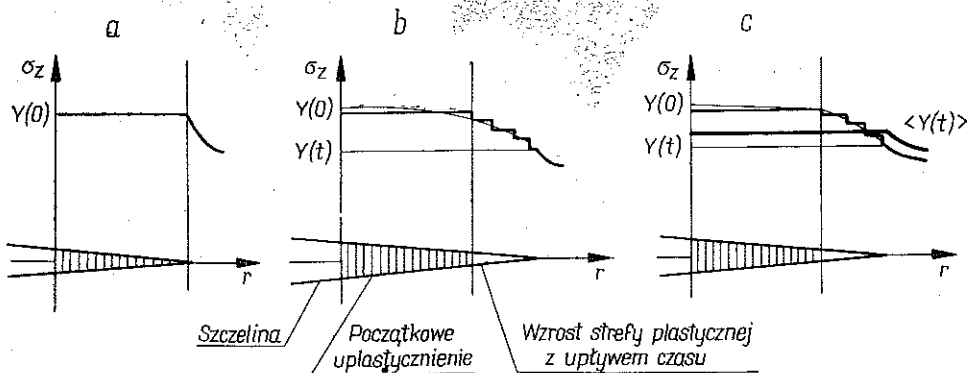
$$(2.7) \quad \langle Y(t) \rangle = \frac{1}{2} (Y_0 + Y(t)).$$

Oczywiście, średnia $\langle Y \rangle$ jest funkcją czasu, dotychczas nieznaną.

Taki rozkład naprężeń około szczeliny w ośrodku lepko-sprężystym, zgodnie z uogólnioną zasadą Grahama, jest taki sam, jaki powstałby w ośrodku sprężystym, obciążonym w identyczny sposób. A zatem, korzystając z wyników pracy OLESIAKA i WNUKA [14], mamy

$$\begin{aligned}\sigma_z &= -p(t), \\ \sigma_r &= 0, \\ \sigma_\theta &= -(1+2\nu)p(t) \quad \text{dla} \quad 0 \leq \rho < m;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \langle Y \rangle, \\ \sigma_r &= \kappa p(t) \left(\frac{m}{\rho} \right)^2 - \kappa \langle Y \rangle \left[1 - \left(\frac{m}{\rho} \right)^2 \right] + \langle Y \rangle, \\ \sigma_\theta &= 2\nu \langle Y \rangle - \kappa p(t) \left(\frac{m}{\rho} \right)^2 + \kappa \langle Y \rangle \left[1 - \left(\frac{m}{\rho} \right)^2 \right] \quad \text{dla} \quad m \leq \rho \leq 1, \\ \sigma_z &= \frac{2 \langle Y \rangle}{\pi} \left[(1+\lambda) \sin^{-1} \left(\frac{1-m^2}{\rho^2-m^2} \right)^{1/2} - \lambda \sin^{-1} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right], \\ (2.8) \quad \sigma_r &= \frac{2 \langle Y \rangle}{\pi} \left\{ \left[(1+\lambda) \left(1 + \kappa \left(\frac{m}{\rho} \right)^2 \right) - \kappa \right] \sin^{-1} \left(\frac{1-m^2}{\rho^2-m^2} \right)^{1/2} + \kappa \lambda \sin^{-1} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[(\rho(1+\lambda))^{-1} \left(\frac{\rho^2-1}{\rho^2-m^2} \right)^{1/2} \right] - \lambda \sin^{-1} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right\}, \\ \sigma_\theta &= \frac{2 \langle Y \rangle}{\pi} \left\{ \left[(1+\lambda) \left(2\nu - \kappa \left(\frac{m}{\rho} \right)^2 \right) + \kappa \right] \sin^{-1} \left(\frac{1-m^2}{\rho^2-m^2} \right)^{1/2} - 2\nu \lambda \sin^{-1} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{1}{\rho} \right) - \kappa \lambda \sin^{-1} \left[(\rho(1+\lambda))^{-1} \left(\frac{\rho^2-1}{\rho^2-m^2} \right)^{1/2} \right] \right\}, \quad \text{dla} \quad \rho \geq 1.\end{aligned}$$



Rys. 1. Tworzenie się strefy plastycznej i rozkład naprężeń σ_z wewnątrz tej strefy

Ten rozkład odnosi się do przypadku 1, tj. gdy obciążenie $p=p(t)$ działa na powierzchni szczeliny; w przypadku 2, tj. gdy naprężenie rozciągające przyłożone jest w nieskończoności, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \sigma_z &= 0, \\
 \sigma_r &= p(t)(\kappa - 1), \\
 \sigma_\theta &= -p(t)(2\nu + \kappa) \quad \text{dla } 0 \leq \rho < m; \\
 \sigma_z &= \langle Y \rangle, \\
 \sigma_r &= \langle Y \rangle \left[(1 - \lambda)(1 - \kappa) + \kappa \left(\frac{m}{\rho} \right)^2 \right], \\
 (2.9) \quad \sigma_\theta &= \langle Y \rangle \left[(1 - \lambda)(2\nu + \kappa) - \kappa \left(\frac{m}{\rho} \right)^2 \right], \quad \text{dla } m \leq \rho \leq 1; \\
 \sigma_z &= \frac{2\langle Y \rangle}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} \lambda - \lambda \sin^{-1} \left(\frac{1}{\rho} \right) + \sin^{-1} \left(\frac{1 - m^2}{\rho^2 - m^2} \right)^{1/2} \right], \\
 \sigma_r &= \frac{2\langle Y \rangle}{\pi} \left\{ \left[1 - \kappa + \kappa \left(\frac{m}{\rho} \right)^2 \right] \sin^{-1} \left(\frac{1 - m^2}{\rho^2 - m^2} \right)^{1/2} - (1 - \kappa) \lambda \sin^{-1} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right\}, \\
 \sigma_\theta &= \frac{2\langle Y \rangle}{\pi} \left\{ \left[2\nu + \kappa - \kappa \left(\frac{m}{\rho} \right)^2 \right] \sin^{-1} \left(\frac{1 - m^2}{\rho^2 - m^2} \right)^{1/2} - (2\nu + \kappa) \lambda \sin^{-1} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right\}, \\
 &\quad \text{dla } \rho \geq 1.
 \end{aligned}$$

Stosunek $\lambda = p/\langle Y \rangle$ jest tutaj funkcją czasu, ponieważ zarówno p jak i Y są zależne od czasu. Widać więc, że naprężenia są także funkcjami czasu. Pozostałe oznaczenia $\kappa = (1 - 2\nu)(1 + \nu)/2$, $m = l/a$, gdzie l jest długością szczeliny oraz a jest zewnętrznym promieniem strefy plastycznej. Wszystkie naprężenia są podane dla trzech różnych obszarów: wzdłuż powierzchni szczeliny $0 \leq \rho < m$, wewnątrz strefy plastycznej $m \leq \rho \leq 1$ oraz na zewnątrz tej strefy $\rho \geq 1$. Łatwo zauważyć, że naprężenia są funkcjami nieciągłymi w punkcie $\rho = m$.

Bezwymiarowa długość strefy plastycznej m^{-1} jest zależna od bezwymiarowego obciążenia λ w ten sposób, że jest spełniony warunek skończoności naprężeń [14]:

$$(2.10) \quad m^{-1} = \begin{cases} \frac{(1 + 2\lambda)^{1/2}}{1 + \lambda}, \\ (1 - \lambda^2)^{-1/2}. \end{cases}$$

Numery w nawiasach poza równaniami oznaczają odpowiedni schemat obciążenia: będziemy używać tego systemu oznaczeń również w pozostałych równaniach.

W punkcie $\rho = 1$, tj. na końcu strefy plastycznej, mamy

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \sigma_z &= \langle Y \rangle, \quad \sigma_r = \langle Y \rangle \left[1 + \kappa \frac{\lambda + \lambda^2}{(1 + \lambda)^2} \right], \\
 (2.11) \quad \sigma_\theta &= \langle Y \rangle \left[2\nu - \kappa \frac{\lambda + \lambda^2}{(1 + \lambda)^2} \right]; \\
 (2) \quad \sigma_z &= \langle Y \rangle, \quad \sigma_r = \langle Y \rangle [1 + (\kappa - 1) \lambda - \kappa \lambda^2], \\
 \sigma_\theta &= \langle Y \rangle [2\nu - (2\nu + \kappa) \lambda + \kappa \lambda^2]
 \end{aligned}$$

oraz sprężyste pole odkształcenia:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \varepsilon_z^0 &= \frac{\langle Y \rangle}{E} 2\kappa, & \varepsilon_r^0 &= \frac{\langle Y \rangle}{E} 2\kappa \left[(1+\nu) \frac{\lambda+\lambda^2}{2(1+\lambda)^2} + 1 \right], \\
 \varepsilon_\theta^0 &= -\frac{\langle Y \rangle}{E} (1+\nu) 2\kappa \frac{\lambda+\lambda^2}{(1+\lambda)^2}; \\
 (2) \quad \varepsilon_z^0 &= \frac{\langle Y \rangle}{E} [2\kappa + (1-2\kappa)\lambda], & \varepsilon_r^0 &= \frac{\langle Y \rangle}{E} \{2\kappa + [-\nu + \kappa(\nu-1)]\lambda - \\
 & & & -\kappa(1+\nu)\lambda^2\}, \\
 \varepsilon_\theta^0 &= \frac{\langle Y \rangle}{E} \{-[\nu + (1+\nu)\kappa] + \kappa(1+\nu)\lambda^2\}.
 \end{aligned}
 \tag{2.12}$$

Dalsza analiza prowadząca do określenia funkcji $Y(t)$ będzie przeprowadzona przy założeniu, że stosunek przyłożonego obciążenia do granicy plastyczności jest niewielki ($\lambda \ll 1$). Wówczas powyższe równania, upraszczają się do postaci

$$\begin{aligned}
 (2.13) \quad \sigma_z &= \langle Y \rangle, & \sigma_r &= \langle Y \rangle, & \sigma_\theta &= 2\nu \langle Y \rangle; \\
 \varepsilon_z^0 &= \frac{\langle Y \rangle}{E} 2\kappa, & \varepsilon_r^0 &= \frac{\langle Y \rangle}{E} 2\kappa, & \varepsilon_\theta^0 &= 0.
 \end{aligned}$$

Te wartości naprężeń i odkształceń w punkcie $\rho=1$ są wspólne dla obydwu schematów obciążenia (małe wyższego rzędu zostały pominięte). Odkształcenia lepko-sprężyste w wierzchołku strefy plastycznej wynoszą zatem

$$(2.14) \quad \varepsilon_r = \varepsilon_z = \frac{\langle Y(t) \rangle}{E} 2\kappa + \frac{2\kappa}{E} \int_0^t \frac{\dot{K}(\tau)}{K(0)} \langle Y(t-\tau) \rangle d\tau, \quad \varepsilon_\theta = 0.$$

Łącząc (2.14) z (2.13) możemy skonstruować funkcję χ . Po pierwsze zauważamy, że funkcja $\chi = [(e_{ij} - e_{ij}^0)(e_{ij} - e_{ij}^0)]^{1/2}$ może być przedstawiona w postaci

$$(2.15) \quad \chi = \left[(e_{ij} - e_{ij}^0)(e_{ij} - e_{ij}^0) + \frac{1}{3}(e_{ii} - e_{ii}^0)^2 \right]^{1/2}$$

lub też po podstawieniu $\varepsilon_\theta - \varepsilon_\theta^0 = 0$ w postaci następującej:

$$\begin{aligned}
 (2.16) \quad (e_{ij} - e_{ij}^0)(e_{ij} - e_{ij}^0) &= \frac{2}{3} [(e_z - \varepsilon_z^0)^2 + (e_r - \varepsilon_r^0)^2 - (e_r - \varepsilon_r^0)(e_z - \varepsilon_z^0)], \\
 \frac{1}{3}(e_{ii} - e_{ii}^0)^2 &= \frac{1}{3} [(e_z - \varepsilon_z^0) + (e_r - \varepsilon_r^0)]^2.
 \end{aligned}$$

Tak więc mamy

$$(2.17) \quad \chi = [(e_z - \varepsilon_z^0)^2 + (e_r - \varepsilon_r^0)^2]^{1/2}.$$

Na koniec, biorąc pod uwagę (2.13) i (2.14), otrzymujemy

$$(2.18) \quad \chi = \frac{2\sqrt{2}\kappa}{E} \int_0^t \frac{\dot{K}(\tau)}{K(0)} \langle Y(t-\tau) \rangle d\tau.$$

Przystąpimy obecnie do wyznaczenia funkcji $\langle Y(t) \rangle$. Przypomnijmy równanie Crocheta: $Y(t) = A + B \exp(-Ct)$, gdzie A , B i C są stałymi materiałowymi, oraz skorzystajmy z definicji średniej: $2 \langle Y \rangle = Y_0 + Y(t)$. Wystarczy to doprowadzenia równania całkowego na nieznaną funkcję $Y(t)$, mianowicie

$$(2.19) \quad Y(t) = A + B \exp \left\{ -\frac{\sqrt{2}\kappa C}{E} \left[(A+B) \left(\frac{K(t)}{K(0)} - 1 \right) + \int_0^t \frac{\dot{K}(\tau)}{K(0)} Y(t-\tau) d\tau \right] \right\}$$

Przez kolejne dwukrotne różniczkowanie sprowadzamy to równanie do równoważnego mu równania różniczkowego

$$(2.20) \quad \frac{2}{\alpha} \frac{-\ddot{Y}(Y-A) + \dot{Y}^2}{(Y-A)^2} = 2(A+B) \frac{\dot{K}(t)}{K(0)} + \frac{\dot{K}(t)}{K(0)} Y$$

lub też do równania o bardziej zwartej postaci

$$(2.21) \quad -\ddot{y}y + \dot{y}^2 = y^2 [P(t)\dot{y} + Q(t)],$$

gdzie

$$(2.22) \quad \begin{aligned} y(t) &= Y(t) - A, & \alpha &= 2\sqrt{2}\kappa C/E, \\ P(t) &= \frac{\alpha}{2} \frac{\dot{K}(t)}{K(0)}, & Q(t) &= \alpha(A+B) \frac{\dot{K}(t)}{K(0)}. \end{aligned}$$

Aby zilustrować zachowanie się funkcji $Y(t)$, rozpatrzmy przypadek szczególny ciała Maxwella, gdy $P = \alpha/2\tau_0$, $Q = 0$. Równanie (2.21) upraszcza się wówczas:

$$(2.23) \quad \ddot{y}y - \dot{y}^2 = -\frac{\alpha}{2\tau_0} y^2 \dot{y}.$$

Podobnie dla trzy-parametrowego modelu (sprężyna E_1 połączona w szereg z elementem Voigta E_2 , τ_2) mamy $P = \frac{\alpha b}{2} \exp(-t/\tau_2)$, $Q = [-\alpha b(A+B)/\tau_2] \exp(-t/\tau_2)$ i wówczas równanie (2.21) przybiera postać

$$(2.24) \quad e^{t/\tau_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{y}}{y} \right) = -\frac{\alpha b}{2} \dot{y} + \frac{\alpha b}{\tau_2} (A+B),$$

gdzie $b = E_1/E_2$, τ_0 i τ_2 oznaczają odpowiednio czas relaksacji dla ciała Maxwella oraz Voigta. Pierwsze z ostatnich dwóch równań może być łatwo scałkowane:

$$(2.25) \quad Y(t) = (2A+B) \left\{ 1 - \frac{B}{2(A+B)} \exp \left[-\frac{\alpha}{2\tau_0} (2A+B)t \right] \right\}^{-1} - (A+B).$$

Wynik ten otrzymaliśmy przez sprowadzenie równania (2.23) do równania różniczkowego pierwszego stopnia korzystając z tożsamości $(\ddot{y}y - \dot{y}^2)/y^2 = \frac{d}{dt} (\dot{y}/y)$ oraz eliminując dwie stałe całkowania z następujących warunków brzegowych:

$$(2.26) \quad \begin{aligned} Y(0) &= A+B, \\ \dot{Y}(0) &= -\alpha B(A+B) \frac{\dot{K}(0)}{K(0)}. \end{aligned}$$

Widać z równania (2.25), że początkowa granica plastyczności $Y(0)$ jest równa $A+B$, a dla długich czasów zmierza ona do $Y(\infty)=A$. Podstawienie (2.25) do formuły definiującej średnie ciśnienie płynięcia daje

$$(2.27) \quad \langle Y(t) \rangle = Y_0 / \psi(t), \quad \psi(t) = 1 + \beta [1 - \exp(-ct/\tau_0)],$$

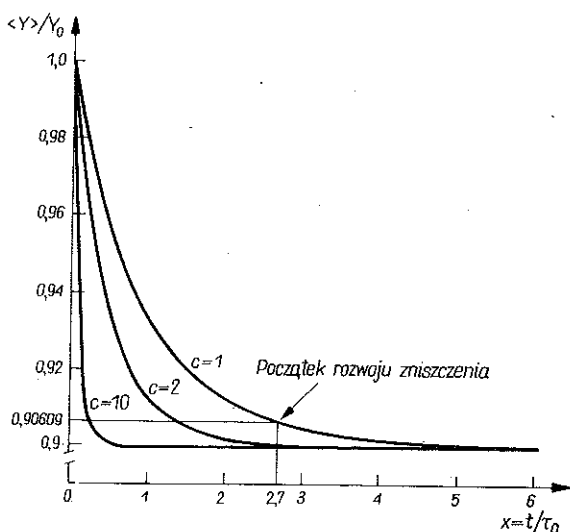
gdzie

$$(2.28) \quad \beta = \frac{B}{2A+B},$$

$$c = \sqrt{2\kappa C(2A+B)/E}.$$

Warto zauważyć, że dla materiału nieściśliwego $c=0$, a zatem średnia granica plastyczności $\langle Y \rangle$ zgodnie z naszym modelem nie zależy od czasu.

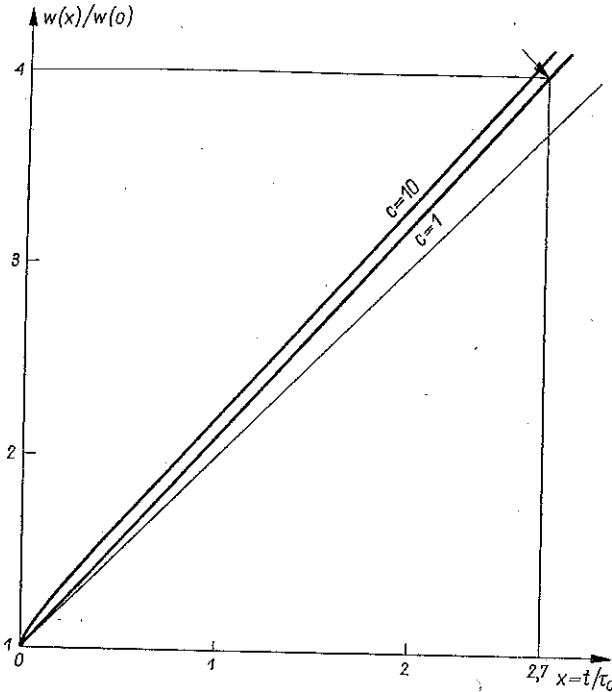
Przedyskutujemy krótko efekty związane z zależnością od czasu granicy plastyczności dla modelu Maxwella, a także wskażemy na wpływ tej granicy na rozkład naprężeń oraz przemieszczeń w płaszczyźnie szczeliny.



Rys. 2. Obniżenie granicy plastyczności w czasie poprzedzającym zniszczenie (strzałka wskazuje czas krytyczny wg przykładu liczbowego, podanego w tekście)

Naprężenia w wierzchołku obszaru plastycznego ($\rho=1$) maleją z upływem czasu po przyłożeniu stałego obciążenia w ten sam sposób jak $\langle Y \rangle$. Ilustruje to rys. 2. Widać, że prędkość «plastycznej relaksacji» zależy silnie od wartości stałych A , B i C występujących w równaniu Crocheta. Aby mieć ocenę choćby przybliżoną, przyjmijmy wartości tych stałych z doświadczeń HELLERA, STOLLA i FREUDENTHALA [8], wykonanych na wypełnionych polimerach, które znalazły zastosowanie do modelowania paliwa stałego dla rakiet. Jeśli podstawimy $A=100$ psi, $B=25$ psi oraz $C=400$, to $B/A=0,25$, $\beta=0,111$ oraz $c \approx 400 Y(0)/E$. Ta ostatnia stała może przyjmować wartości z przedziału (1,40) zależnie od wartości stosunku początkowej

granicy plastyczności do modułu Younga. Czynniki $\sqrt{2} (1+\nu) (1-2\nu) (1+B/2A)$ wynosi około 1 dla $\nu=0,3$ oraz $B/A=0,25$. Choć wykresy z rys. 2 wskazują, że wpływ współczynnika c na prędkość relaksacji plastycznej jest znaczny, pokażemy, że ten sam współczynnik nieznacznie wpływa na przemieszczenia w wierzchołku szczeliny.



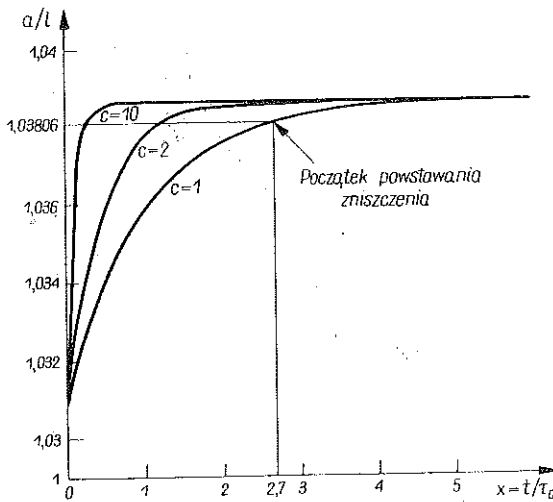
Rys. 3. Wzrost przemieszczeń w wierzchołku szczeliny w czasie poprzedzającym zniszczenie (linie grube odpowiadają zmiennej c z upływem czasu granicy plastyczności; linia cienka odpowiada założeniu stałej granicy plastyczności)

To z kolei spowoduje znikome zmiany kształtu krzywej opóźnionego zniszczenia, związane z wartością parametru c . Rzeczywiście, wykresy na rys. 3 dla $c=1$ oraz $c=10$ różnią się bardzo niewiele. Obydwa były uzyskane przy obciążeniu «schodkowym» (stała siła przyłożona w chwili $t=0^+$); ilustrują one wzrost przemieszczeń w wierzchołku szczeliny, zanim nastąpi pęknięcie. Wydłużenie strefy plastycznej, jak pokazano na rys. 4, zależy od parametru c w bardziej wyraźny sposób, a krzywe określające opóźnione zniszczenie praktycznie nie «odczuwają» zmian c : krzywa dla $c=10$ na rys. 5 nie została narysowana, ponieważ jest ona niemal identyczna z krzywą otrzymaną dla $c=1$ (krzywa 2 na rys. 5).

Na wszystkich wykresach (rys. 3, 4 i 5) linie cienkie ilustrują wyniki, gdyby przyjęć $Y(t) \equiv Y_0$. Choć różnice nie są znaczne, to jednak należy pamiętać o tym, że dla odmiennych warunków fizycznych, tj. dla innych wartości stosunku stałych B/A (gdy materiał jest bardziej czuły na procesy zależne od czasu), różnice te mogą być istotne.

Aby wyprowadzić równania odpowiadające wykresom na rys. 3, 4 i 5, rozważymy najpierw przemieszczenie w wierzchołku szczeliny. Dla niewielkich bezwymiarowych obciążeń $\lambda = p(t)/Y$ (por. OLESIAK i WNUK [14]) przemieszczenie to jest jednakowe dla obydwu schematów obciążenia i wynosi

$$(2.29) \quad u_z^0(1, t) = w^0(t) = \frac{4(1-\nu^2)l}{\pi E_g} \langle Y \rangle \frac{\lambda^2}{2} + O(\lambda^4).$$



Rys. 4. Wydłużenie strefy plastycznej w czasie poprzedzającym zniszczenie (strzałka wskazuje wartość dla przykładu liczbowego zamieszczonego w tekście)

Tak więc dla obciążenia schodkowego $p(t) = p_0 H(t)$ (gdzie $H(t)$ jest funkcją Heaviside'a), dla $\langle Y(t) \rangle$ określonego równaniem (2.27) oraz stałej długości szczeliny $l = l_0$ otrzymujemy

$$(2.30) \quad w^0(t) = \frac{2(1-\nu^2)l_0 p_0^2}{\pi E_g Y_0} H(t) \psi(t)$$

oraz lepko-sprężyste przemieszczenia, zgodnie z uogólnioną zasadą Grahama (dla $t \geq 0$):

$$(2.31) \quad w(t) = w(0) \left[\psi(t) + \int_0^t \frac{\dot{K}(\tau)}{K(0)} \psi(t-\tau) d\tau \right].$$

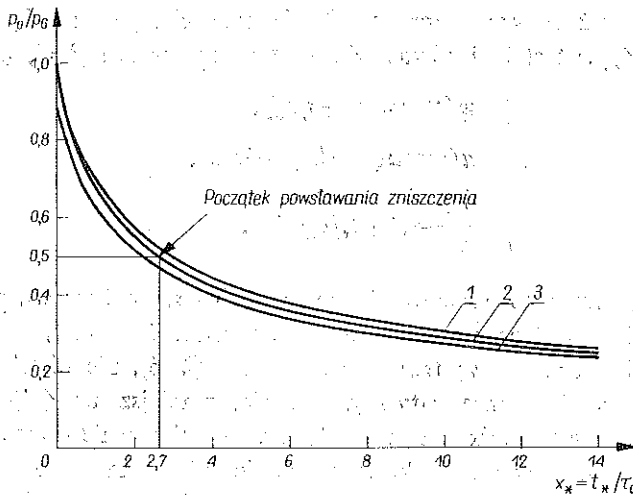
Tutaj $w(0) = 2(1-\nu^2)l_0 p_0^2 / \pi E_g Y_0$, E_g jest modułem odkształcenia natychmiastowego, a Y_0 oznacza początkową granicę plastyczności. Podstawiając $\psi(t)$ z równania (2.27) oraz przyjmując $K(t)/K(0) = 1/\tau_0$ (ciało Maxwella) i całkując, otrzymujemy

$$(2.32) \quad \frac{w(t)}{w(0)} = 1 + (1+\beta) \frac{t}{\tau_0} + \left(1 - \frac{1}{c}\right) \beta [1 - \exp(-ct/\tau_0)].$$

Wykres tej funkcji podajemy na rys. 3. Podobnie długość strefy plastycznej określona za pomocą wzoru (2.8) dla małych λ

$$(2.33) \quad a \approx l_0 [1 + \lambda^2/2] = l_0 \left[1 + \frac{\lambda_0^2}{2} \psi^2(t) H(t) \right], \quad \lambda_0 = p_0/Y_0$$

będzie wzrastać z upływem czasu jak pokazano to na rys. 4 (przyjęto tam $\lambda_0 = 1/4$).



Rys. 5. Krzywe opóźnionego zniszczenia przy zależnej od czasu granicy plastyczności (krzywa 2) oraz przy stałej granicy plastyczności: $\langle Y \rangle = Y_0$ krzywa 1, $\langle Y \rangle = Y_\infty$ krzywa 3

Opóźnione zniszczenie wystąpi po czasie $t = t_*$, dla którego przemieszczenie $w(t)$ osiąga krytyczną wartość w^* . Stałą materiałową w^* możemy związać z krytycznym naprężeniem Griffitha p_G ; mianowicie widać, że stosunek

$$(2.34) \quad \frac{w^*}{w(0)} = \frac{\pi E_g Y_0 w^*}{2(1-\nu^2) l_0 p_0^2}$$

równy jest kwadratowi obciążenia krytycznego, podzielonemu przez kwadrat przyłożonego obciążenia. Energia powierzchniowa γ , występująca we wzorze Griffitha, może mieć w naszym ujęciu nieco szersze znaczenie fizyczne: równa się ona plastycznej dysypacji $\gamma = Y_0 w^*$, o ile $\lambda \ll 1$; dla tych wszystkich przypadków, gdzie dysypacja energii przeważa nad pracą przeciw siłom kohezji (dla materiałów ciągliwych lub też choćby quasi-kruchych plastyczna dysypacja jest około 1000-krotnie większa od pracy kohezji). Jedynie w granicznym przypadku, gdy $Y_0 \rightarrow E$, tzn. gdy efekty plastyczne zanikają i mogą być pominięte, wielkość γ odzyskuje swój pierwotny sens energii powierzchniowej. Wówczas γ jest równa iloczynowi modułu Younga przez przemieszczenie krytyczne w^* , które z kolei jest rzędu odległości międzycząsteczkowych.

Biorąc powyższe pod uwagę mamy

$$(2.35) \quad \frac{p_0}{p_G} = \left\{ 1 + (1 + \beta) \frac{t_*}{\tau_0} + \left(1 - \frac{1}{c} \right) \beta [1 - \exp(-ct_*/\tau_0)] \right\}^{-1/2}.$$

Jest to związek o zasadniczym znaczeniu: określa on wytrzymałość materiału jako funkcję stałych materiałowych oraz czasu trwania obciążenia. Ilustruje tę zależność krzywa 2 na rys. 5.

Wszystkie powyższe wzory upraszczają się znacznie, jeśli przyjąć, że granica plastyczności $\langle Y \rangle$ jest stała i równa Y_0 . W tym przypadku $\beta = 0$, $\psi(t) \equiv 1$ oraz

$$(2.36) \quad \begin{aligned} w(t) &= w_0 [1 + t/\tau_0], \\ a(t) &= a(0) = l_0 [1 + \lambda_0^2/2], \\ \frac{p_0}{p_G} &= (1 + t_*/\tau_0)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Równania te posłużyły do narysowania linii cienkich na wykresach, rys. 3, 4 i 5.

Porównując krzywe 1 oraz 2 na rys. 5 zauważamy, że krzywa 1, otrzymana przy stałej granicy plastyczności wg trzeciego z równań (2.36), nie określa czasu krytycznego t_* w sposób konserwatywny. Istotnie, zmniejszanie $\langle Y \rangle$ przyspiesza procesy czasowe u wierzchołka szczeliny. Tak więc zniszczenie opóźnione wystąpi szybciej, niż by to było w przypadku stałej granicy plastyczności. Aby zatem mieć ocenę po stronie bezpiecznej, a równocześnie zachować możliwie najprostszą formę równania określającego czas krytyczny, proponujemy, aby przyjmować stałą $\langle Y \rangle$ równą niższej wartości od granicy początkowej, mianowicie $\langle Y \rangle = Y(\infty)$. Przy takim założeniu otrzymujemy

$$(2.37) \quad \frac{p_0}{p_G} = \left[\frac{Y(\infty)}{Y(0)} \right]^{1/2} (1 + t_*/\tau_0)^{-1/2}$$

zamiast wzoru (2.36). Daje to kres dolny dla krzywych opisujących opóźnione zniszczenie, tak jak to pokazano na rys. 5 (krzywa 3 odpowiada stosunkowi $Y(\infty)/Y(0) = 100/125$).

Na koniec rozważmy prosty przykład liczbowy. Dla danych

$$p_0/p_G = 1/2, \quad p_0/Y_0 = 1/4, \quad c = 1, \quad \beta = 0,111$$

znajdujemy z równania (2.33) czas krytyczny $t_* = 2,7\tau_0$. Dla tej wartości t_* równanie (2.25) daje zmniejszenie granicy plastyczności od początkowej wartości Y_0 do 0,90450 Y_0 w chwili krytycznej; w tym samym czasie długość strefy plastycznej wzrasta od 1,03125 l_0 do 1,03806 l_0 .

Okazuje się zatem, w tym przypadku szczególnym, że dziesięcioprocentowe zmniejszenie granicy plastyczności powoduje nieznaczne zmiany wielkości posiadających istotne praktyczne znaczenie. Długość strefy plastycznej w chwili krytycznej jest około 0,7% większy od długości początkowej. Również czas krytyczny, obliczony z prostego równania (2.36)₃, ($t_* = 3\tau_0$), oraz czas obliczony z (2.3) różnią

się nieznacznie. Dla innego polimeru jednakże i dla większych czasów krytycznych różnice te mogą być istotne.

Powyższy przykład zachęca nas do uczynienia następnego kroku, to jest przyjęcia $\langle Y \rangle = \text{const}$. Założenie takie uprości znacznie dalsze rozważania i pozwoli na wyprowadzenie wzoru analogicznego do (2.35), lecz nie wykluczającego dużych odkształceń plastycznych, poprzedzających zniszczenie. Przypadki zniszczenia przy płaskim stanie naprężenia oraz odkształcenia zostaną również przedyskutowane.

3. Opóźnione zniszczenie. Lepko-sprężyste przemieszczenia w wierzchołku szczeliny

Punktem wyjścia dla wyprowadzenia podstawowego równania, określającego zniszczenie opóźnione, jest znajomość przemieszczeń w wierzchołku szczeliny jako funkcji czasu. W szczególności przemieszczenie to dla modelu Dugdale'a, dostosowanego do przypadku szczeliny osiowo-symetrycznej przez OLESIAKA i WNUKA [14], ma postać

$$(3.1) \quad u_2^0(1, t) = w^0(t) = \frac{4(1-\nu^2)l_0\langle Y \rangle}{\pi E_G} \begin{cases} 1 + \lambda - (1 + 2\lambda)^{1/2} & (1), \\ 1 - (1 - \lambda^2)^{1/2} & (2). \end{cases}$$

Podstawienie powyższe do równania (2.3) daje obydwie składowe przemieszczenia: sprężysto-plastyczne (natychmiastowe) oraz lepkie (opóźnione), mianowicie

$$(3.2) \quad w(t) = \frac{2Y_0^2 w^*}{p_G^2 \psi(t)} \begin{cases} 1 + \lambda(t) - [1 + 2\lambda(t)]^{1/2} + \int_0^t \frac{\dot{K}(\tau)}{K(0)} [1 + \lambda(t-\tau) - \\ - (1 + 2\lambda(t-\tau))^{1/2}] d\tau, \\ 1 - (1 - \lambda^2(t))^{1/2} + \int_0^t \frac{\dot{K}(\tau)}{K(0)} [1 - \lambda^2(t-\tau)]^{1/2} d\tau. \end{cases}$$

gdzie

$$(3.3) \quad \begin{aligned} p_G &= [\pi E_G \gamma / 2(1 - \nu^2) l_0]^{1/2}, & \gamma &= Y_0 \omega^*, \\ \psi(t) &= Y_0 / \langle Y \rangle, & \lambda &= p(t) / \langle Y(t) \rangle. \end{aligned}$$

Równanie to jest ogólnie prawdziwe, tj. pozostaje spełnione dla jakiegokolwiek ciała lepko-sprężystego, którego reologiczne własności są określone przez funkcję $K(t)$; równocześnie uplastycznienie w wierzchołku szczeliny może zmieniać się w czasie ($\psi(t)$) oraz przyłożone obciążenie $p(t)$ jest dowolną monotonicznie rosnącą funkcją czasu. Założymy następnie stałość granicy plastyczności $\langle Y \rangle = Y_0 (\psi \equiv 1)$. Obliczając $w(t)$ w chwili $t = t_*$, otrzymujemy wzór wiążący wytrzymałość materiału z czasem trwania obciążenia:

$$(3.4) \quad \Phi_0 = \begin{cases} 1 + \lambda(t_*) - (1 + 2\lambda(t_*))^{1/2} + \int_0^{t_*} \frac{\dot{K}(\tau)}{K(0)} [1 + \lambda(t_* - \tau) - (1 + 2\lambda(t_* - \tau))^{1/2}] d\tau, \\ 1 - (1 - \lambda^2(t_*))^{1/2} + \int_0^{t_*} \frac{\dot{K}(\tau)}{K(0)} [1 - (1 - \lambda^2(t_* - \tau))^{1/2}] d\tau, \end{cases}$$

gdzie $\Phi_0 = l_*/l_0$ lub też $\Phi_0 = p_G^2/2Y_0^2$ oraz $\lambda = p(t)/Y_0$. Z tego wynika, że parametr Φ_0 może posiadać dwie interpretacje: (1) stosunku długości charakterystycznej $l_* = E_g w^*/4(1-\nu^2) Y_0$, przy czym w^* może być uważana za stałą materiałową; (2) połowy kwadratu stosunku obciążenia krytycznego Griffitha do granicy plastyczności.

Dla obciążenia schodkowego $p(t) = p_0 H(t)$ z (3.4) otrzymujemy

$$(3.5) \quad \Phi_0 \frac{K(0)}{K(t_*)} = \begin{cases} 1 + \lambda_0 - \sqrt{1 + 2\lambda_0}, \\ 1 - \sqrt{1 - \lambda_0^2}, \end{cases}$$

gdzie $\lambda_0 = p_0/Y_0$. Po rozwiązaniu ostatnich dwóch równań względem λ_0 otrzymujemy

$$(3.6) \quad \lambda_0 = \Phi_0 \frac{K(0)}{K(t_*)} + \left[2\Phi_0 \frac{K(0)}{K(t_*)} \right]^{1/2}$$

dla przypadku 1 oraz

$$(3.7) \quad \lambda_0 = \begin{cases} \left\{ \Phi_0 \frac{K(0)}{K(t_*)} \left[2 - \Phi_0 \frac{K(0)}{K(t_*)} \right] \right\}^{1/2} & \text{dla } \Phi_0 \leq 1, \\ \left\{ \frac{K(0)}{K(t_*)} \left[2 - \frac{K(0)}{K(t_*)} \right] \right\}^{1/2} & \text{dla } \Phi_0 \geq 1, \end{cases}$$

dla przypadku 2. Jest to wynik końcowy, wiążący wytrzymałość z czasem trwania obciążenia. Przypomnijmy przyjęte założenia: ośrodek jest lepko-sprężysto-plastyczny, osiowa symetria szczeliny, obciążenie o stałej wartości przyłożone w czasie $t=0^+$ na powierzchni szczeliny (przypadek 1) lub też w nieskończoności (przypadek 2). O granicy plastyczności założyliśmy, że jest niezależna od czasu, równa wartości początkowej. Nie nakładamy natomiast żadnych ograniczeń na wielkość strefy plastycznej około szczeliny.

Łatwo dostrzec, że obciążenie krytyczne, jakie byłoby niezbędne do spowodowania natychmiastowego zniszczenia, tj. dla $t_* = 0$, wynosi

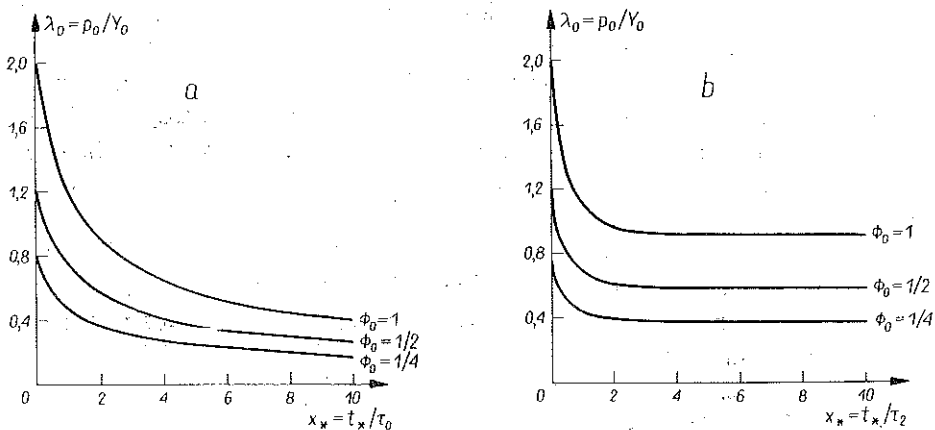
$$\lambda_0(t_* = 0) = \Phi_0 + \sqrt{2\Phi_0} \quad (1)$$

$$(3.8) \quad \lambda_0(t_* = 0) = \begin{cases} [\Phi_0(2 - \Phi_0)]^{1/2} & \text{dla } \Phi_0 \leq 1, \\ 1 & \text{dla } \Phi_0 \geq 1. \end{cases} \quad (2)$$

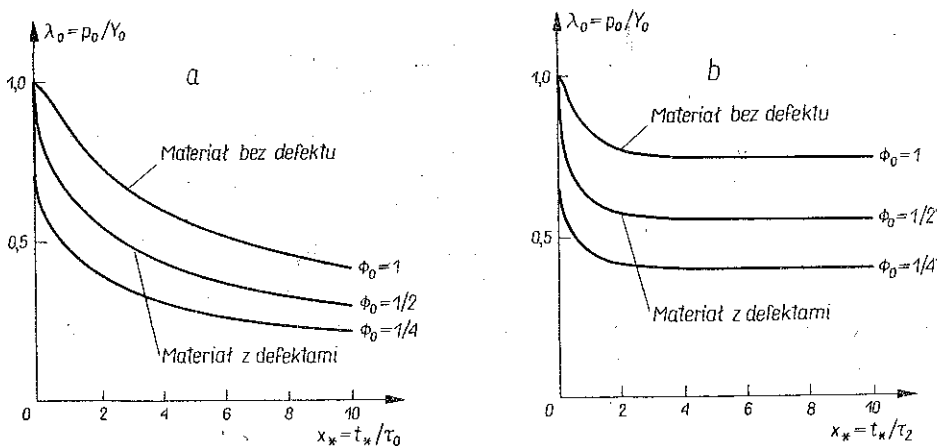
Wynik ten jest identyczny z rezultatami analizy sprężysto-plastycznej OLESIAKA i WNUKA [14]. Przy obciążeniach mniejszych od $\lambda_0(t_* = 0)$ zniszczenie jest także możliwe, lecz wystąpi ono z pewnym opóźnieniem $t = t_*$. Aby zilustrować powyższy wynik (3.7) ogólnie prawdziwy, przyjmijmy, że ośrodek w otoczeniu szczeliny opisany jest przez model Maxwella, a następnie że zachowuje się on jak model trójparametrowy. Podstawiamy zatem odpowiednio $K(t_*)/K(0) = 1 + t_*/\tau_0$ oraz $K(t_*)/K(0) = 1 + E_1/E_2(1 - \exp(-t_*/\tau))$ do równania (3.7). Otrzymane stąd krzywe opóźnionego zniszczenia są pokazane na rys. 6 (przypadek 1) oraz na rys. 7 (przy-

padek 2). Widoczne jest, że najmniejsze obciążenie, przy którym zniszczenie jest możliwe, wynosi zero dla modelu Maxwella, a dla modelu trójparametrowego

$$(3.9) \quad \lambda_{\min} = \lambda_0(\infty) = \begin{cases} \frac{\Phi_0}{1+E_1/E_2} + \left(\frac{2\Phi_0}{1+E_1/E_2}\right)^{1/2}, & (1) \\ \left\{ \frac{\Phi_0}{1+E_1/E_2} \left[2 - \frac{\Phi_0}{1+E_1/E_2} \right] \right\}^{1/2}. & (2) \end{cases}$$



Rys. 6. Krzywe opóźnionego zniszczenia (ciśnienie działające na powierzchni szczeliny):
a - ciało Maxwella, b - model trójparametrowy ($E_1/E_2 = 2$)



Rys. 7. Krzywe opóźnionego zniszczenia (ciśnienie działające z dala od szczeliny):
a - ciało Maxwella, b - model trójparametrowy ($E_1/E_2 = 2$)

Równania te określają położenie asymptoty poziomej na wykresach (rys. 6b oraz rys. 7b). Dla obciążeń poniżej λ_{\min} zniszczenie nie wystąpi.

Parametr $\Phi_0 = l_*/l_0$ obrazuje wpływ początkowej długości szczeliny na obciążenie krytyczne. Widać to na rys. 6 oraz rys. 7: wyższa wartość Φ_0 (mniejsza dłu-

gość szczeliny) powoduje przesunięcie krzywych zniszczenia przelazającego w górę, co odpowiada większym wartościom obciążeń krytycznych przy tych samych czasach krytycznych. Szczególnie interesujący jest wynik zobrazowany krzywą $\Phi_0=1$ dla przypadku 2 (rys. 7). Krzywa ta odnosi się do długości szczeliny $l_0=l_*$ oraz dla wszystkich długości mniejszych od niej. Oznacza to, że krzywa $\Phi_0=1$ jest prawdziwa także dla ciała bezdefektowego lub też dla ciała z mikro-defektami. Stąd wyciągamy wniosek, że dla bardzo małych długości szczelin (rzędu l_* lub mniejszych) ciśnienie krytyczne przestaje być zależne od długości szczeliny (w przeciwieństwie do wyniku Griffitha). Ciśnienie powodujące pęknięcie posiada wówczas wartość skończoną, która dla dwóch przypadków tutaj rozpatrywanych (dla modelu Maxwella oraz dla modelu trój-parametrowego) daje się odczytać wprost z krzywej $\Phi_0=1$ (rys. 7). Taki wniosek wydaje się potwierdzać hipotezę Berry'ego [2] o istnieniu w materiale «wad wrodzonych», które są charakterystyczne dla danego polimeru i które bądź istnieją w ośrodku, bądź też mogą powstawać po przyłożeniu obciążenia.

Wydaje się, że niniejszy wynik dobrze opisuje wcześniejsze dane doświadczalne dotyczące wytrzymałości szkła (TAYLOR [20]), BAKER i PRESTON [1]), o ile stałe reologiczne w naszych równaniach są odpowiednio dobrane. Obserwujemy też zgodność dla pewnego przedziału czasu naszej teorii [równania (3.7)] z badaniami nad wytrzymałością gumy (polybutyl methacrylate) przeprowadzanymi przez BUECHEGO [3].

Dla większych długości szczeliny (tj. $l_0 \gg l_*$) lub też alternatywnie, gdy przyłożone obciążenie stanowi jedynie małą część ciśnienia płynięcia ($\lambda \ll 1$), wszystkie powyżej napisane równania upraszczają się. Równanie (3.4) przybiera postać

$$(3.10) \quad 2\Phi_0 = \lambda^2(t_*) + \int_0^{t_*} \frac{\dot{K}(\tau)}{K(0)} \lambda^2(t_* - \tau) d\tau$$

wspólną dla obydwu schematów obciążenia. Stąd przy dowolnej historii obciążenia $p(t) = p_0 \varphi(t)$, określamy zależność wytrzymałości od czasu:

$$(3.11) \quad \frac{p_0}{p_G} = \left[\varphi^2(t_*) + \int_0^{t_*} \frac{\dot{K}(\tau)}{K(0)} \varphi^2(t_* - \tau) d\tau \right]^{-1/2}.$$

Minimalne obciążenie, poniżej którego zniszczenie nie jest możliwe, określa równanie (3.11) przy następującym przyjęciu:

$$(3.12) \quad p_{\min} = p_G \left[\varphi^2(\infty) + \lim_{t_* \rightarrow \infty} \int_0^{t_*} \frac{\dot{K}(\tau)}{K(0)} \varphi^2(t_* - \tau) d\tau \right]^{-1/2}.$$

Rozważmy obecnie przykład zastosowania równania (3.11) dla obciążenia liniowo wzrastającego w czasie oraz dla ośrodka zachowującego się jak ciało Maxwella. Podstawiając $\dot{K}(t)/K(0) = 1/\tau_0$ oraz $p(t) = p_0 vt$, otrzymujemy

$$(3.13) \quad \frac{p(t_*)}{p_G} = (1 + t_*/3\tau_0)^{-1/2}.$$

Przy tej samej historii i dla modelu trójparametrowego (tj. $\dot{K}(t)/K(0) = \frac{E_1}{E_2 \tau_2} \exp \times \left(-\frac{t}{\tau_2}\right)$) otrzymamy

$$(3.14) \quad \frac{p(t_*)}{p_G} = \left\{ 1 + \frac{E_1}{E_2} \left[1 + 2 \left(\frac{\tau_2}{t_*} \right)^2 (1 - \exp(-t_*/\tau_2)) - 2 \left(\frac{\tau_2}{t_*} \right) \right] \right\}^{-1/2}$$

Łatwo sprawdzić, że jeśli czas opóźnienia wynosi zero (natychmiastowe zniszczenie), to obciążenia krytyczne, wynikające z równań (3.13) oraz (3.14), są równe obciążeniu Griffitha. Istotnie, dla małych czasów opóźnienia obydwa równania upraszczają się odpowiednio do postaci

$$(3.15) \quad p(t_*) \approx p_G [1 - t_*/6\tau_0],$$

$$p(t_*) \approx p_G \left[1 - \frac{E_1}{E_2} t_*/6\tau_0 \right].$$

Powyższe przykłady są jedynie ilustracją teorii, która odnosi się do dowolnych historii obciążenia $\varphi(t)$ monotonicznie rosnących w czasie oraz dla jakichkolwiek własności reologicznych $K(t)$. Równanie (3.11) po podstawieniu odpowiednich danych oraz wykonaniu całkowania daje podstawowy związek między wielkością przyłożonego obciążenia a czasem krytycznym dla polimerów, w których stosunek ciśnienia Griffitha do granicy plastyczności jest mały.

Warto zauważyć, że wzór (3.11) przyjmuje szczególnie prostą postać, gdy $p(t) = p_0 H(t)$. Tak więc dla obciążenia schodkowego otrzymujemy

$$(3.16) \quad \frac{p_0}{p_G} = \left[1 + \int_0^{t_*} \frac{\dot{K}(\tau)}{K(0)} d\tau \right]^{-1/2}$$

lub jeszcze krócej

$$(3.17) \quad \frac{p_0}{p_G} = \left[\frac{K(0)}{K(t_*)} \right]^{1/2}$$

Stąd wynika maksymalna wartość obciążenia niszczącego $p_0 = p_G$, gdy $t = t_*$, jak być powinno. Także najmniejsze obciążenie niszczące może być obliczone z równania (3.17). Wystarczy w tym celu przypomnieć równanie (2.6) oraz przyjąć, że t_* zmierza do nieskończoności. Otrzymujemy

$$(3.18) \quad p_{\min} = p_G \left(\frac{E_e}{E_g} \right)^{1/2},$$

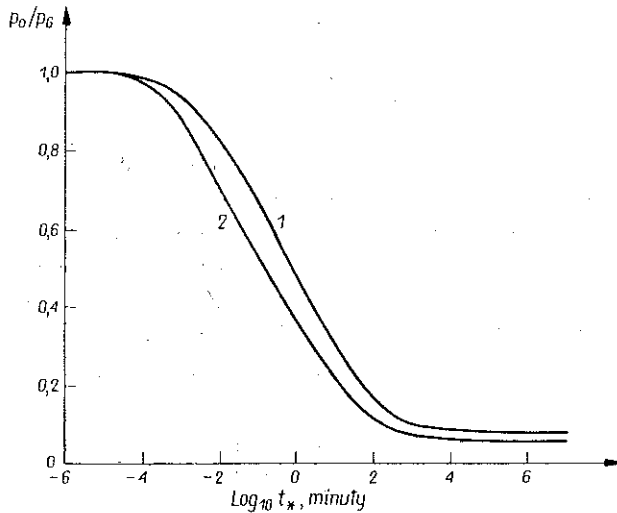
gdzie E_e oraz E_g oznaczają odpowiednio moduły odkształcenia po czasie nieskończone długim oraz odkształcenia natychmiastowego. Równania (3.17) oraz (3.18) pomimo swej prostej budowy posiadają szeroki zakres zastosowań. W istocie te same równania, jak to pokażemy, odnoszą się do stanów dwuwymiarowych.

Aby to wykazać, zauważmy przede wszystkim, że równanie (3.11) jest niezależne od geometrii problemu, tzn. odnosi się zarówno do problemu osiowo symetrycznego jak i do stanów dwuwymiarowych (płaski stan naprężenia lub płaski stan odkształcenia). Dla dowodu rozpatrzmy wynik GOODIERA i FRIELDA

[6], otrzymany przy użyciu modelu Dugdale'a. Wynik ten (przez podobne rozumowanie jak na początku niniejszego punktu) możemy napisać w postaci

$$(3.19) \quad \frac{\pi^2}{4} \Phi_0 = \ln \left[\sec \frac{\pi}{2} \lambda(t_*) \right] + \int_0^{t_*} \frac{\dot{K}(\tau)}{K(0)} \ln \left[\sec \frac{\pi}{2} \lambda(t_* - \tau) \right] d\tau.$$

Jest to analog równania (3.4) i odnosi się do płaskiego stanu naprężenia lub płaskiego stanu odkształcenia, o ile poprawnie podstawimy $\Phi_0 = p_G^2 / 2Y_0^2$, tzn. o ile będziemy pamiętali, że obciążenie krytyczne p_G posiada inną wartość w obydwu przypadkach. Mamy mianowicie $\Phi_0 = w^* E_g / 4l_0 Y_0$ dla płaskiego stanu naprężenia oraz $\Phi_0 = w^* E_g / 4(1 - \nu^2) l_0 Y_0$ dla płaskiego stanu odkształcenia.



Rys. 8. Krzywe opóźnionego zniszczenia dla tworzywa solithane w temperaturze pokojowej:

1- wg autora, 2- wg wzoru Williamsa [22] dla defektu kulistego

Następnie po przyjęciu $p(t) = p_0 H(t)$ równanie (3.18) daje

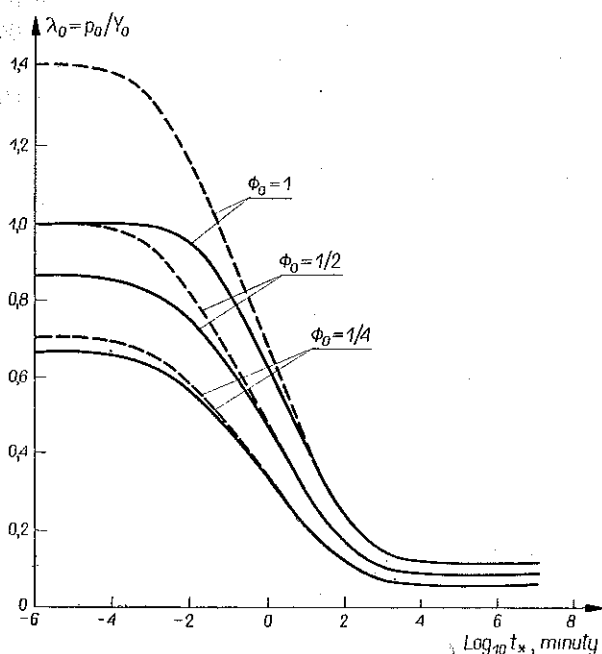
$$(3.20) \quad \lambda_0 = \frac{2}{\pi} \sec^{-1} \exp \left[-\Phi_0 \frac{K(0)}{K(t_*)} \right].$$

Jest to wynik analogiczny do równania (3.7), które dotyczyło szczeliny osiowo-symetrycznej. W końcu zakładając $\Phi_0 \rightarrow 0$, tj. wyłączając małe szczeliny, stwierdzamy, że równanie (3.18) upraszcza się do postaci (3.11) wyprowadzonej uprzednio. Łatwo to zauważyć, gdy wyrażenie $\ln \sec(\pi/2) \lambda(t)$ rozwiniemy w szereg potęgowy:

$$\ln \sec \frac{\pi}{2} \lambda(t) = \frac{\lambda^2(t)}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 + \dots$$

oraz gdy zauważymy, że $\lambda / \sqrt{2\Phi_0} = (p_0/p_G) \varphi(t)$. Oczywiście przyjęliśmy także i tutaj, że $\gamma = Y_0 w^*$, co jest prawdziwe dla małych λ . Wzory (3.14) oraz (3.15), wyprowadzone dla przypadku obciążenia liniowo wzrastającego z upływem czasu, będą więc prawdziwe także dla dwuwymiarowych stanów. To samo dotyczy wzoru (3.17),

który chociaż jest najprostszy spośród wszystkich równań tutaj wyprowadzonych, zachowuje bardzo ogólny zakres zastosowań. Równanie to, wiążące wytrzymałość materiału i czas trwania obciążenia, będziemy nazywać uniwersalnym, a wynikające stąd krzywe zniszczenia opóźnionego będziemy nazywać uniwersalnymi krzywymi zniszczenia w materiałach lepko-sprężystych.



Rys. 9

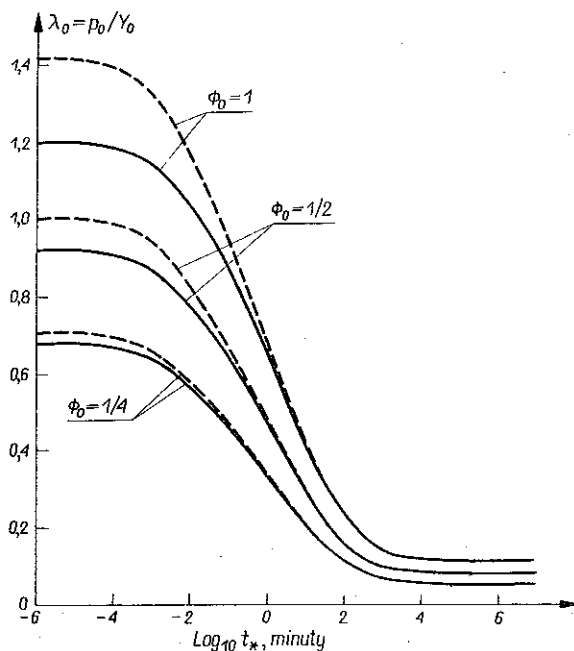
Krzywe opóźnionego zniszczenia spowodowanego przez szczelinę osiowo-symetryczną (obciążenie przyłożone z dala od szczeliny) dla tworzywa „solithane” przy uwzględnieniu wpływu deformacji plastycznej (linie ciągłe) oraz bez uwzględnienia tego wpływu (linie przerywane).

Równanie (3.17) zostało użyte, aby przewidzieć zniszczenie opóźnione tworzywa o nazwie «solithane», dla którego istnieją doświadczalne dane reologiczne, otrzymane w laboratoriach Kalifornijskiego Instytutu Technologicznego przez KNAUSSA [10]. Wykres sporządzony na podstawie tych danych i odpowiadający wzorowi (3.17) przedstawia krzywa 1 na rys. 8 (podatność na pełzanie mierzona przy różnych temperaturach jest tu sprowadzona do temperatury 20°C). Krzywa 2 na tym samym rysunku przedstawia wynik wg. wzoru WILLIAMSZA [22], który, rzecz godna uwagi, został wyprowadzony dla zupełnie innej geometrii (kulisty defekt) i innego schematu obciążenia (ciśnienie hydrostatyczne), jak również na innej drodze (kryterium energetyczne). Równanie Williama, po uzgodnieniu symboliki, ma postać

$$\frac{p_0}{p_G} = \left[\frac{K(0)}{2K(t_*) - K(0)} \right]^{1/2}$$

Podobieństwo obydwu krzywych jest uderzające.

Wykresy na rys. 9 i rys. 10 przedstawiają odpowiednio krzywe opóźnionego zniszczenia w przypadku trójwymiarowych i dwuwymiarowych szczelin, gdy obciążenie jest przyłożone w nieskończoności (przypadek 2). Żadnych ograniczeń dotyczących rozmiarów strefy plastycznej nie nakłada się. Układ krzywych na rys. 9 wynika z formuły (3.7), podczas gdy rys. 10 jest sporządzony na podstawie wzoru (3.19) po podstawieniu wartości $K(0)/K(t_*)$, zmierzonych dla tworzywa «solithane». Linie przerywane na obydwu rysunkach opisują zniszczenie opóźnione zgodnie ze wzorem uniwersalnym (3.17), który jest prawdziwy dla małych λ_0 . Tym razem



Rys. 10. Krzywe opóźnionego zniszczenia spowodowanego przez szczelinę w płaskim stanie (naprężenia lub odkształcenia) dla tworzywa solithane przy uwzględnieniu wpływu plastycznej deformacji (linie ciągłe) oraz bez uwzględnienia tego wpływu (linie przerywane)

mamy aż trzy krzywe uniwersalne na każdym rysunku, ponieważ wzdłuż osi rzędnych przyjęto odmienną skalę: $\lambda_0 = p_0/Y_0$ zamiast p_0/p_G , przy czym zachodzi związek między obydwoma wielkościami $\lambda_0 = (p_0/p_G)\sqrt{2\Phi_0}$. W istocie ciągłe i przerywane krzywe są do siebie zbliżone dla niewielkich Φ_0 , jak tego oczekiwaliśmy.

Autor pragnie wyrazić swą wdzięczność Profesorowi W. G. KNAUSSOWI z Wydziału Lotniczego Kalifornijskiego Instytutu Technologicznego, który zasugerował omawiany tu temat oraz przeprowadził z autorem wiele dyskusji nad problemami pojawiającymi się w trakcie pisania pracy.

Literatura cytowana w tekście

1. T. C. BAKER, F. W. PRESTON, *Fatigue of glass under static load*, J. Appl. Phys., **17** (1946), 170.
2. J. P. BERRY, *Fracture processes in polymeric materials*, J. Polymer Sci., **50** (1961), 153.
3. F. BUECHE, *Tensile strength of plastics above the glass temperature*, J. Appl. Phys., **9**, 26 (1955), 1133.
4. L. C. CESSNA, S. S. STERNSTEIN, *Viscoelasticity and plasticity considerations in the fracture of glasslike high polymers, fundamental phenomena in the materials sciences*, Plenum Press, **4** (1967), 45.
5. M. J. CROCHET, *Symmetric deformations of viscoelastic-plastic cylinders*, J. Appl. Mech., **2**, 33 (1966), 327.
6. J. N. GOODIER, F. A. FIELD, *Plastic energy dissipation in crack propagation*, Fracture of solids, Proc. Int. Conf. in Maple Valley, Interscience Publishers, 1962, 103.
7. S. A. C. GRAHAM, *Two extending crack problems in linear viscoelasticity theory*, Report No. PSR-47/3, North Carolina State University, 1966.
8. R. A. HELLER, R. D. STOLL, A. M. FREUDENTHAL, *An Elastic-Plastic Behaviour of a Filled Elastomer*, Columbia University Report, June 1962.
9. R. P. KAMBOUR, *The role of crazing in the mechanism of fracture of glassy polymers*, Report No. 67-C-085, General Electric, March 1967.
10. W. G. KNAUSS, *The time-dependent fracture of viscoelastic materials*, Proceedings, First International Conference on Fracture, **2** (1965), 1139.
11. J. R. LOW, Jr., *Microstructural aspects of fracture*, Fracture of Solids, Metallurgical Society Conferences, Maple Valley, Washington, August 21-24, 1962, **20**, John Wiley and Sons, New York, 197-236.
12. S. A. F. MURREL, *The theory of the propagation of elliptical Griffith cracks under various conditions of plane strain or plane stress*, Brit. J. Appl. Phys., **15** (1964), 1195.
13. H. K. MUELLER, W. G. KNAUSS, *The Mechanical Characterization of Solithane 113 in the Swollen and Unswollen State*, GALCIT SM 67-8, California Institute of Technology, December 1967.
14. Z. OLESIAK, M. P. WNUK, *Plastic energy dissipation due to a penny-shaped crack*, Int. Journal of Fracture Mechanics, **4**, 4 (1968), 383. Polish Complete Text: Rozpr. Inż. **3**, **14** (1966), 441.
15. M. POLANYI, *Über die Natur des Zerreißvorganges*, Z. Physik, **7** (1921), 323. And: *Über eine Art Gitterstörung die einen Kristall plastisch machen könnte*, ibid., **89** (1934), 660.
16. J. R. RICE, *An Explanation of the Fracture Mechanics Energy Balance from the Point of View of Continuum Mechanics*, Int. Conf. Fracture, Sendai, Japan, 1965.
17. R. A. SCHAPERY, *Irreversible Thermodynamics and Variational Principles with Applications to Viscoelasticity*, California Institute of Technology, ARL 62-418, August 1962.
18. R. A. SCHAPERY, M. L. WILLIAMS, *On the Acceleration of Cracks in Viscoelastic Media*, GALCIT SM 62-39, California Institute of Technology, September 1962.
19. T. L. SMITH, *Dependence of the ultimate properties of a G-R-S rubber on strain rate and temperature*, J. Polymer Sci. **32** (1958), 99.
20. N. W. TAYLOR, *Mechanism of fracture of glass and similar brittle solids*, J. Appl. Phys., **18** (1947), 943.
21. M. L. WILLIAMS, *The fracture of viscoelastic material*, Fracture of Solids, Proceedings Int. Conf. in Maple Valley, 1962, Interscience Publishers, 1963.
22. M. L. WILLIAMS, *Fracture in Viscoelastic Media*, Report Presented at the Ilkon Corp. Symposium, 1966.
23. M. P. WNUK, *Nature of fracture in relation to total potential energy*, Brit. J. Appl. Physics, Ser. 2, **1** (1968) 217-236.

Резюме

ПОЛЗУЧЕЕ РАЗРУШЕНИЕ В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

В работе обсуждаются, зависящие от времени и пути нагрузки процессы, имеющие место в соседстве края осесимметрической трещины до появления щели. Для того, чтобы понять нелинейное поведение пластмасс в областях больших напряжений и для того, чтобы описать реологические свойства материала вокруг щели, строится модель, для которой удовлетворяются следующим предположениям, как существования узких пластических зон типа Дагдала; и что материал находящийся вдали щели ведет себя как линейно вязко-упругая среда.

Согласно этой модели, предел пластичности изменяется во времени, так как это внушает уравнение Кроше. Это обозначает более высокое давление течения при более скорой нагрузке и наоборот. Благодаря такой постановке вопроса возможно описание первой фазы деформаций, предшествующих фазе возникновения «стазе», т. е. области, в которой появляются необратимые изменения механических и оптических свойств. Эта область возникает вокруг края щели.

Рассматривается несколько случаев ползучего разрушения при разных историях нагрузки. В особенности выводится универсальное уравнение $p_0/p_G = [K(0)/K(t_*)]^{1/2}$, которое ставит в зависимость прочность материала p_0 от длительности нагрузки t_* при загрузении постоянной силой. Характеристические свойства материалов и длина трещины определяет критическое напряжение Гриффита p_G , а функция $K(t)$ описывает реологические свойства материала. Это уравнение справедливо так для трехмерной, как и двухмерной задачи, если отношение нагрузки к первоначальному пределу пластичности небольшое. Обращает внимание подобие, между универсальным уравнением и уравнением, выведенным Уильямсом для сферического эффекта при гидростатической нагрузке.

В предельном случае, обе теории разрушения, т. е. Гриффита и Ирвина-Орована, вытекают из представленной здесь теории.

Summary

CREEP FAILURE IN ELASTO-VISCO-PLASTIC MEDIA

In the paper are considered processes dependent on the time and path of load, which take place in the vicinity of the edge of an axially-symmetrical fissure before the occurrence of cracking. In order to obtain an idea of the nonlinear behaviour of plastics in the regions of large stresses and to describe the rheological properties of the material around the fissure we postulate a model which assumes the existence of narrow plastic zones of the Dugdale type, while we assume that the material far from the fissure behaves as a linear visco-elastic medium.

In accordance with this model, the limit of plasticity varies with time, as is suggested by Crochet's equation. This signifies a higher flow pressure with a more rapid load, and conversely. In view of such an assumption, it is possible to describe the first phase of deformations preceding the destruction — namely, the forming of a «craze», i.e. a region in which irreversible changes of the mechanical properties and of optical properties occur. This region is formed around the edge of the fissure.

Several cases of creeping destruction are considered with different load histories. In particular, the universal equation $p_0/p_G = [K(0)/K(t_*)]^{1/2}$ is introduced which relates the material strength p_0 on the time of duration of the load t_* . The characteristic material properties and the length of the fissure are determined by the critical Griffith stress p_G , whereas the function $K(t)$ describes the rheological features of plastic. This equation holds for both the three and two-dimensional problems if the ratio of the load to the initial yield stress is small. Attention is drawn to the considerable similarity between the universal equation and that derived by Williams for the spherical defect under hydrostatic fension.

In the limiting case, both the theories of fracture — i.e., Griffith's and Irwin-Orowan's — results from the theory presented here.

SOUTH DAKOTA STATE UNIVERSITY

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 stycznia 1970 r.