ROZPRAWY INŻYNIERSKIE
2, 18 (1970)

STATECZNOŚĆ WSTĘPNIE SPRĘŻONEGO WALCA KOŁOWEGO

E. ZŁATANOWA, Z. WESOŁOWSKI (WARSZAWA)

Dotychczas rozwiązano cały szereg zagadnień stateczności elementów poddanych skończonym odkształceniom. Wszystkie te rozwiązania dotyczyły elementów, które znajdowały się w stanie naturalnym tj. wolnym od odkształcenia i naprężenia. Stan krytyczny dla takich elementów można było scharakteryzować podając odkształcenie krytyczne lub obciążenie krytyczne na brzegu.

Element rozważany w nieniejszej pracy jako całość nie jest w stanie naturalnym. Deformacja w tym elemencie odpowiada jednej spośród deformacji Volterry. Podane obliczenia dotyczą więc dyslokacji Volterry w prostym walcu kołowym. Jak pokażemy dalej, dyslokacja taka może być niestateczna nawet przy braku obciążenia zewnętrznego.

1. Walec z dyslokacją Volterry

Rozważamy prosty walec kołowy o długości $\mathring{h}$ i promieniu $\mathring{a}$ wykonany z nieściśliwego materiału sprężystego. Walec ten poddany jest wstępnemu skończonemu odkształceniu przez rozcięcie go półpłaszczyzną przechodzącą przez oś, dodanie (lub usunięcie) kliną o kącie rozwarcia φ, a następnie przywrócenie spójności materiału. Powstałe ciało oznaczymy przez B. Jeśli długość i promień powstałego walca są h i a, to parametry odkształcenia

$$\mu=a/\mathring{a}, \qquad \lambda=h/\mathring{h}, \qquad \kappa=2\pi/(2\pi-\varphi) \tag{1.1}$$

definiują wstępną deformację. Usunięciu materiału ($\varphi>0$) odpowiada $\kappa>1$, natomiast dodaniu materiału ($\varphi<0$) odpowiada $\kappa<1$. Ponieważ rozważany materiał jest niściśliwy parametry μ, λ i κ nie są niezależne, a związane zależnością wynikającą z porównania objętości przed i po odkształceniu:

$$\mathring{a}^2\mathring{h}\,\frac{2\pi-\varphi}{2\pi}=a^2h. \tag{1.2}$$

Wynika stąd zgodnie z (1.1)

$$\mu=\frac{1}{\sqrt{\kappa\lambda}}. \tag{1.3}$$

Z dalszych związków będziemy rugować parametr μ korzystając z (1.3). Parametry κ i λ uważamy za wzajemnie niezależne parametry zagadnienia.

Wprowadźmy walcowy układ współrzędnych ϑ^i i oznaczmy współrzędne typowego punktu przed odkształceniem przez $\mathring{r}, \mathring{\vartheta}, \mathring{z}$ a współrzędne po odkształceniu przez r, ϑ, z. Ze względu na jednorodność opisanego wyżej odkształcenia zachodzą związki

$$r=\mu\mathring{r}, \quad \vartheta=\kappa\mathring{\vartheta}, \quad z=\lambda\mathring{z}. \tag{1.4}$$

Zakładając teraz, że $\vartheta^i=(r, \vartheta, z)$ są współrzędnymi konwekcyjnymi, można wyznaczyć tensory metryczne ciała nieodkształconego $\mathring{g}_{ij}$ i odkształconego g_{ij} (wzory potrzebne w niniejszej części pracy podane są np. w [1]).

$$g_{ij}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & r^2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \quad g^{ij}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/r^2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{1.5}$$

i na podstawie (1.3)

$$\mathring{g}_{ij}=\begin{bmatrix}\kappa\lambda & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{\lambda}{\kappa}r^2 & 0\\ 0 & 0 & 1/\lambda^2\end{bmatrix}, \quad \mathring{g}^{ij}=\begin{bmatrix}1/\kappa\lambda & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{\kappa}{\lambda r^2} & 0\\ 0 & 0 & \lambda^2\end{bmatrix}. \tag{1.6}$$

Tensory (1.5) i (1.6) określają całkowicie stan odkształcenia ciała B. Niezmienniki stanu odkształcenia I_k równe są odpowiednio

$$I_1=\frac{1}{\kappa\lambda}+\frac{\kappa}{\lambda}+\lambda^2, \quad I_2=\kappa\lambda+\frac{\lambda}{\kappa}+\frac{1}{\lambda^2}, \quad I_3=1. \tag{1.7}$$

Wykorzystując znane wzory [1] wyznaczamy teraz tensor naprężenia:

$$\begin{aligned}
\tau^{11}&=\Phi_1\frac{1}{\kappa\lambda}+\Phi_2\left(\frac{1}{\lambda^2}+\frac{\lambda}{\kappa}\right)+p,\\
r^2\tau^{22}&=\Phi_1\frac{\kappa}{\lambda}+\Phi_2\left(\frac{1}{\lambda^2}+\lambda\kappa\right)+p,\\
\tau^{33}&=\Phi_1\lambda^2+\Phi_2\left(\frac{\lambda}{\kappa}+\kappa\lambda\right)+p,\\
\tau^{12}&=\tau^{23}=\tau^{31}=0,
\end{aligned} \tag{1.8}$$

gdzie p jest dowolną funkcją skalarową, a Φ_k są podwojonymi pochodnymi potencjału sprężystości W względem niezmienników stanu odkształcenia I_k. Ponieważ zgodnie z (1.7) niezmienniki I_k sa niezależne od ϑ^i, więc również funkcje Φ_k są niezależne od ϑ^i. Funkcja p może być znaleziona z warunku brzegowego

$$\tau^{11}=0 \text{ na } r=a \tag{1.9}$$

i równań równowagi

$$\nabla_i\tau^{ij}=\tau^{ij}{}_{,i}+\Gamma^j_{ir}\tau^{ir}+\Gamma^r_{ri}\tau^{ij}=0, \tag{1.10}$$

gdzie Γ^i_{jk} są symbolami Christoffela dla walcowego układu współrzędnych.

Ze związków (1.8) i (1.10) wynika, że p jest jedynie funkcją zmiennej r, spełniającą równanie różniczkowe

$$\frac{dp}{dr}+\frac{1}{r}(\Phi_1+\lambda^2\Phi_2)\left(\frac{1}{\kappa\lambda}-\frac{\kappa}{\lambda}\right)=0, \tag{1.11}$$

skąd wynika

$$p=-(\Phi_1+\lambda^2\Phi_2)\left(\frac{1}{\kappa\lambda}-\frac{\kappa}{\lambda}\right)\ln\frac{r}{a}-C, \tag{1.12}$$

gdzie C jest stałą całkowania.

Podstawiając teraz (1.12) do $(1.8)_1$ i uwzględniając (1.9) otrzymuje się

$$C=\Phi_1\frac{1}{\kappa\lambda}+\Phi_2\left(\frac{1}{\lambda^2}+\frac{\lambda}{\kappa}\right) \tag{1.13}$$

i ostatecznie

$$p=-(\Phi_1+\lambda^2\Phi_2)\left(\frac{1}{\kappa\lambda}-\frac{\kappa}{\lambda}\right)\ln\frac{r}{a} \tag{1.14}$$

oraz

$$\begin{aligned}\tau^{11}&=-(\Phi_1+\lambda^2\Phi_2)\left(\frac{1}{\kappa\lambda}-\frac{\kappa}{\lambda}\right)\ln r/a,\\ r^2\tau^{22}&=\tau^{11}+(\Phi_1+\lambda^2\Phi_2)\left(\frac{\kappa}{\lambda}-\frac{1}{\kappa\lambda}\right),\\ \tau^{33}&=\tau^{11}+\left(\Phi_1+\frac{\kappa}{\lambda}\Phi_2\right)\left(\lambda^2-\frac{1}{\kappa\lambda}\right).\end{aligned} \tag{1.15}$$

Jak wynika z (1.15), naprężenie τ^{ij} ma w punkcie $r=0$ osobliwość. Osobliwości tej nie byłoby, gdyby przyjąć, że rozpatruje się nie pełny walec, a rurę o wewnętrznej średnicy $\eta>0$, nasuniętą na nieściśliwy rdzeń o takiej samej średnicy, podobnie, jak to robi się w teorii dyslokacji. Dla uproszczenia obliczeń nie będziemy jednak rozpatrywali tutaj takiej sytuacji. Stosunek energii rdzenia do energii całkowitej wynosi dokładnie η^2/a^2 (jednorodny stan odkształcenia!), więc przy małych η jest pomijalnie mały. W związku z tym można twierdzić, że rozwiązanie uzyskane dla pełnego walca jest rozwiązaniem dla rury o nieskończenie małej średnicy wewnętrznej.

Jak wynika z (1.15), $\tau\equiv 0$ tylko dla $\eta=1$. Ciało B jako całość nie ma stanu naturalnego. Stan naturalny można osiągnąć jedynie naruszając spójność materiału.

Całkowita siła osiowa, jaką przenosi walec, wynosi

$$Q=2\pi\int_0^a\tau^{33}r\,dr, \tag{1.16}$$

co po podstawieniu $(1.15)_3$ prowadzi do wzoru

$$Q = \pi a^2 \left[\Phi_1 \left(\lambda^2 - \frac{1}{2\kappa\lambda} - \frac{\kappa}{\lambda} \right) + \Phi_2 \left(\frac{\kappa\lambda}{2} - \frac{1}{\lambda^2} + \frac{\lambda}{2\kappa} \right) \right]. \tag{1.17}$$

Siła ta jest równa zeru dla

$$\kappa = \frac{\dfrac{\Phi_2}{\Phi_1} - \lambda^4 \pm \sqrt{\left(\dfrac{\Phi_2}{\Phi_1} - \lambda^4\right)^2 - \lambda^2 \left(\dfrac{\Phi_2}{\Phi_1}\lambda^2 - 1\right)^2}}{\lambda\left(\lambda^2 \dfrac{\Phi_2}{\Phi_1} - 1\right)}.$$

2. Równania stateczności

Nałóżmy na opisany wstępnie odkształcony walec B pole małych przemieszczeń $\varepsilon\mathbf{w}$. Pole to wywołuje dodatkowe odkształcenia i dodatkowe naprężenie, których liniowe części oznaczamy znakiem «prim». Ogólne wzory dotyczące takiego odkształcenia podane są np. w [1 i 2]. Tutaj podamy tylko ostateczne rezultaty dla rozpatrywanego walca oznaczając kowariantne współrzędne wektora $\mathbf{w}$ przez u, v, w. Mianowicie mamy

$$g'_{ij} = \begin{bmatrix} 2u_r & v_r + u_\vartheta - 2v/r & u_z + w_r \\ v_r + u_\vartheta - 2v/r & 2(v_\vartheta + ru) & v_z + w_\vartheta \\ u_z + w_r & v_z + w_\vartheta & 2w_z \end{bmatrix}; \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} I_1' &= \frac{2}{\kappa\lambda} u_r + \frac{2}{r^2}\frac{\kappa}{\lambda}(v_\vartheta + ru) + 2\lambda^2 w_z, \\ I_2' &= -2\kappa\lambda u_r - \frac{2}{\lambda^2}\frac{\lambda}{\kappa}(v_\vartheta + ru) - 2\frac{1}{\lambda^2} w_z, \\ I_3' &= 2\left(u_r + \frac{v_\vartheta}{r^2} + \frac{u}{r} + w_z\right) = 0; \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} \tau'^{11} = {} & 2u_r \left[\frac{1}{\kappa^2\lambda^2} A - \left(\frac{k}{\lambda} + \lambda^2 \right) B + \left(\frac{1}{\kappa\lambda^3} + \frac{1}{\kappa^2} - 1 \right) F - p \right] + \\ & + \frac{2}{r^2}(v_\vartheta + ru) \left[\frac{1}{\lambda^2} A - \left(\frac{1}{\kappa\lambda} + \frac{\lambda^2}{\kappa^2} \right) B + \left(1 + \frac{\kappa}{\lambda^3} - \frac{1}{\kappa^2} \right) F + \frac{1}{\lambda^2}\Phi_2 \right] + \\ & + 2w_z \left[\frac{\lambda}{\kappa} A - \left(\frac{1}{\lambda^4} + \frac{1}{\kappa\lambda} \right) B + \left(\frac{\lambda^3}{\kappa} + 1 - \frac{1}{\kappa\lambda^3} \right) F + \frac{\lambda}{\kappa}\Phi_2 \right] + p', \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} r^2\tau'^{22} = {} & 2u_r \left[\frac{1}{\lambda^2} A - \left(\frac{\kappa}{\lambda} + \kappa^2\lambda^2 \right) B + \left(\frac{1}{\kappa\lambda^3} - \kappa^2 + 1 \right) F + \frac{1}{\lambda^2}\Phi_2 \right] + \\ & + \frac{2}{r^2}(v_\vartheta + ru) \left[\frac{\kappa^2}{\lambda^2} A - \left(\frac{1}{\kappa\lambda} + \lambda^2 \right) B + \left(\frac{\kappa}{\lambda^3} + \kappa^2 - 1 \right) F - p \right] + \\ & + 2w_z \left[\lambda\kappa A - \left(\frac{1}{\lambda^4} + \frac{\kappa}{\lambda} \right) B + \left(1 + \kappa\lambda^3 - \frac{\kappa}{\lambda^3} \right) F + \kappa\lambda\Phi_2 \right] + p', \end{aligned}$$

$$\tau'^{33} = 2u_r\left[\frac{\lambda}{\kappa}A-(\lambda^2+\kappa^2\lambda^2)B+\left(1+\frac{1}{\kappa^2}-\kappa\lambda^3\right)F+\frac{\lambda}{\kappa}\Phi_2\right]+$$

$$+\frac{2}{r^2}(v_\vartheta+ru)\left[\kappa\lambda A-\left(\frac{\lambda^2}{\kappa^2}+\lambda^2\right)B+\left(1+\kappa^2-\frac{\lambda^3}{\kappa}\right)F+\lambda\kappa\Phi_2\right]+$$

(2.3) [c.d.]

$$+2w_z\left[\lambda^4 A-\left(\frac{1}{\kappa\lambda}+\frac{\kappa}{\lambda}\right)B+\left(\frac{\lambda^3}{\kappa}+\kappa\lambda^3-1\right)F-p\right]+p',$$

$$\tau'^{31} = -\left(\frac{\lambda}{\kappa}\Phi_2+p\right)(u_z+w_r),$$

$$r^2\tau'^{23} = -(\kappa\lambda\Phi_2+p)(v_z+w_\vartheta),$$

$$r^2\tau'^{12} = -\left(\frac{1}{\lambda^2}\Phi_2+p\right)(v_r+u_\vartheta-2v/r),$$

gdzie

$$A=2\frac{\partial^2 w}{\partial I_1^2},\quad B=2\frac{\partial^2 w}{\partial I_2^2},\quad F=2\frac{\partial^2 w}{\partial I_1\partial I_2}. \tag{2.4}$$

Równanie $(2.2)_3$ jest równaniem nieściśliwości.

Ponieważ niezmienniki I_k są stałe, więc również funkcje A, B i F są stałe w całym walcu. Należy teraz wyznaczyć przyrosty Γ'^{i}_{jk} symboli Christoffela Γ^{i}_{jk} i podstawić (1.14), (1.15) i (2.3) do równań równowagi dla małych dodatkowych odkształceń:

$$\nabla_i\tau'^{ij}+\Gamma'^{j}_{ir}\tau^{ir}+\Gamma'^{r}_{rs}\tau^{sj}=0. \tag{2.5}$$

Odpowiednie obliczenia prowadzą do wzorów:

$$\Gamma'^{1}_{11}=u_{rr},\quad \Gamma'^{1}_{22}=u_{\vartheta\vartheta}+ru_r-2\frac{v_\vartheta}{r}-u,\quad \Gamma'_{33}=u_{zz},$$

$$\Gamma'^{1}_{31}=u_{rz},\quad \Gamma'^{1}_{23}=u_{\vartheta z}-\frac{1}{r}v_z,\quad \Gamma'^{1}_{12}=u_{r\vartheta}-\frac{v_r}{r}-\frac{u_\vartheta}{r}+2\frac{v}{r^2}r,$$

$$\Gamma'^{2}_{11}=\frac{1}{r^2}\left(v_{rr}-\frac{2}{r}v_r+\frac{2}{r^2}v\right),\quad \Gamma'^{2}_{22}=\frac{1}{r^2}(v_{\vartheta\vartheta}+2ru_\vartheta+rv_r-2v),$$

(2.6)

$$\Gamma'^{2}_{33}=\frac{1}{r^2}v_{zz},$$

$$\Gamma'^{2}_{31}=\frac{1}{r^2}\left(v_{rz}-\frac{1}{r}v_z\right),\quad \Gamma'^{2}_{23}=\frac{1}{r^2}(v_{\vartheta z}+ru_z),$$

$$\Gamma'^{2}_{12}=\frac{1}{r^2}\left(v_{r\vartheta}-2\frac{v_\vartheta}{r}+ru_r-u\right),$$

$$\Gamma'^{3}_{11}=w_{rr},\quad \Gamma'^{3}_{22}=w_{\vartheta\vartheta}+rw_r,\quad \Gamma'^{3}_{33}=w_{zz},$$

$$\Gamma'^{3}_{31}=w_{rz},\quad \Gamma'^{3}_{23}=w_{z\vartheta},\quad \Gamma'^{3}_{12}=w_{r\vartheta}-\frac{w_\vartheta}{r};$$

$$
\begin{aligned}
(2.7)\quad & 2u_{rr}\left[\frac{1}{\kappa^2\lambda^2}A-\left(\frac{\kappa}{\lambda}+\lambda^2\right)B+\left(\frac{1}{\kappa\lambda^3}+\frac{1}{\kappa^2}-1\right)F+\frac{1}{\kappa\lambda}\Phi_1+\left(\frac{1}{\lambda^2}+\frac{\lambda}{\kappa}\right)\Phi_2\right]+\\
&+\frac{u_r}{r}\left[\frac{2}{\kappa^2\lambda^2}A-2\left(\frac{1}{\kappa\lambda}+\lambda^2+\frac{\lambda^2}{\kappa^2}-\kappa^2\lambda^2\right)B+2\left(\frac{\kappa}{\lambda^3}+\kappa^2-1\right)F+\right.\\
&\left.+\left(3\frac{1}{\kappa\lambda}-\frac{\kappa}{\lambda}\right)\Phi_1+\left(3\frac{\lambda}{\kappa}+\frac{2}{\lambda^2}-\lambda\kappa\right)\Phi_2\right]-\frac{u}{r^2}\left[2\frac{\kappa^2}{\lambda^2}A-2\left(\frac{1}{\kappa\lambda}+\lambda^2\right)B+\right.\\
&\left.+2\left(\frac{\kappa}{\lambda^3}+\kappa^2-1\right)F+\left(\frac{1}{\kappa\lambda}+\frac{\kappa}{\lambda}\right)\Phi_1+\left(\frac{2}{\lambda^2}+\frac{\lambda}{\kappa}+\lambda\kappa\right)\Phi_2\right]+\\
&+\kappa\left(\frac{1}{\lambda}\Phi_1+\lambda\Phi_2\right)\frac{u_{\vartheta\vartheta}}{r^2}+u_{zz}\lambda\left(\lambda\Phi_1+\kappa\Phi_2\right)+\frac{v_{r\vartheta}}{r^2}\left[\frac{2}{\lambda^2}A-2\left(\frac{1}{\kappa\lambda}+\frac{\lambda^2}{\kappa^2}\right)B+\right.\\
&\left.+2\left(1+\frac{\kappa}{\lambda^3}-\frac{1}{\kappa^2}\right)F+\frac{1}{\kappa\lambda}\Phi_1+\left(\frac{2}{\lambda^2}+\frac{\lambda}{\kappa}\right)\Phi_2\right]-2\frac{v_\vartheta}{r^3}\left[\left(\frac{\kappa^2}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}\right)A-\right.\\
&\left.-\left(\frac{2}{\kappa\lambda}+\lambda^2+\frac{\lambda^2}{\kappa^2}\right)B+\left(2\frac{\kappa}{\lambda^3}-\frac{1}{\kappa^2}+\kappa^2\right)F+\left(\frac{1}{\kappa\lambda}+\frac{\kappa}{\lambda}\right)\Phi_1+\left(\frac{2}{\lambda^2}+\frac{\lambda}{\kappa}+\lambda\kappa\right)\Phi_2\right]+\\
&+w_{rz}\left[2\frac{\lambda}{\kappa}A-2\left(\frac{1}{\lambda^4}+\frac{1}{\kappa\lambda}\right)B+2\left(\lambda^3+1-\frac{1}{\kappa\lambda^3}\right)F+\frac{1}{\kappa\lambda}\Phi_1+\left(\frac{1}{\lambda^2}+2\frac{\lambda}{\kappa}\right)\Phi_2\right]+\\
&+2\frac{w_z}{r}\left(\frac{1}{\kappa}-\kappa\right)\left[\lambda A-\frac{1}{\lambda}B+\left(\lambda^3-\frac{1}{\lambda^3}\right)F+\lambda\Phi_2\right]+p_r'=0;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2.8)\quad & u_{r\vartheta}\left[\frac{2}{\lambda^2}A-2\left(\frac{\kappa}{\lambda}+\kappa^2\lambda^2\right)B+2\left(\frac{1}{\kappa\lambda^3}-\kappa^2+1\right)F+\frac{\kappa}{\lambda}\Phi_1+\left(2\frac{1}{\lambda^2}+\lambda\kappa\right)\Phi_2\right]+\\
&+\frac{u_\vartheta}{r}\left[2\frac{\kappa^2}{\lambda^2}A-2\left(\frac{1}{\kappa\lambda}+\lambda^2\right)B+2\left(\frac{\kappa}{\lambda^3}+\kappa^2-1\right)F+\left(2\frac{\kappa}{\lambda}+\frac{1}{\kappa\lambda}\right)\Phi_1+\right.\\
&\left.+\left(\frac{2}{\lambda^2}+2\lambda\kappa+\frac{\lambda}{\kappa}\right)\Phi_2\right]+\left(v_{rr}-\frac{1}{r}v_r\right)\frac{1}{\kappa\lambda}\left(\Phi_1+\lambda^2\Phi_2\right)+v_{zz}\left(\lambda^2\Phi_1+\frac{\lambda}{\kappa}\Phi_2\right)+\\
&+2\frac{v_{\vartheta\vartheta}}{r^2}\left[\frac{\kappa^2}{\lambda^2}A-\left(\frac{1}{\kappa\lambda}+\lambda^2\right)B+\left(\frac{\kappa}{\lambda^3}+\kappa^2-1\right)F+\frac{\kappa}{\lambda}\Phi_1+\left(\frac{1}{\lambda^2}+\lambda\kappa\right)\Phi_2\right]+\\
&+2w_{\vartheta z}\left[\lambda\kappa A-\left(\frac{1}{\lambda^4}+\frac{\kappa}{\lambda}\right)B+\left(1+\kappa\lambda^3-\frac{\kappa}{\lambda^3}\right)F+\frac{1}{2}\frac{\kappa}{\lambda}\Phi_1+\left(\kappa\lambda+\frac{1}{2\lambda^2}\right)\Phi_2\right]+p_\vartheta'=0;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2.9)\quad & u_{rz}\left[2\frac{\lambda}{\kappa}A-2(\lambda^2+\kappa^2\lambda^2)B+2\left(1+\frac{1}{\kappa^2}-\kappa\lambda^3\right)F+\lambda^2\Phi_1+\left(2\frac{\lambda}{\kappa}+\kappa\lambda\right)\Phi^2\right]+\\
&+\frac{u_z}{r}\left[2\kappa\lambda A-2\left(\frac{\lambda^2}{\kappa^2}+\lambda^2\right)B+2\left(1+\kappa^2-\frac{\lambda^3}{\kappa}\right)F+\left(\frac{1}{\kappa\lambda}-\frac{\kappa}{\lambda}+\lambda^2\right)\Phi_1+\right.\\
&\left.+\left(\frac{\lambda}{\kappa}+2\lambda\kappa\right)\Phi_2\right]+\frac{v_{\vartheta z}}{r^2}\left[2\kappa\lambda A-2\left(\frac{\lambda^2}{\kappa^2}+\lambda^2\right)B+2\left(1+\kappa^2-\frac{\lambda^2}{\kappa}\right)F+\lambda^2\Phi_1+\right.
\end{aligned}
$$

$$+\left(\frac{\lambda}{\kappa}+2\kappa\lambda\right)\Phi_2\Big]+w_{rr}\left(\frac{1}{\kappa\lambda}\Phi_1+\frac{1}{\lambda^2}\Phi_2\right)+\frac{w_r}{r}\left(\frac{1}{\kappa\lambda}\Phi_1+\frac{1}{\lambda^2}\Phi_2\right)+$$

$$+\frac{w_{\vartheta\vartheta}}{r^2}\left(\frac{\kappa}{\lambda}\Phi_1+\frac{1}{\lambda^2}\Phi_2\right)+2w_{zz}\Big[\lambda^4 A-\left(\frac{1}{\kappa\lambda}+\frac{\kappa}{\lambda}\right)B+$$

$$+\left(\frac{\lambda^3}{\kappa}+\kappa\lambda^3-1\right)F+\lambda^2\Phi_1+\left(\frac{\lambda}{\kappa}+\kappa\lambda\right)\Phi_2\Big]+p'_z=0.$$

Równania $(2.2)_3$, (2.7)-(2.9) tworzą układ czterech równań różniczkowych z niewiadomymi u, v, w oraz p'. Wraz z odpowiednimi warunkami brzegowymi układ ten tworzy jednorodne zagadnienie brzegowe. Jeśli zagadnienie to jest samosprzężone, to jak pokazano w [3], istnienie nietrywialnych rozwiązań jest warunkiem osiągnięcia równowagi obojętnej, a więc straty stateczności.

W niniejszej pracy ograniczymy się do przypadku, gdy $w=0$, $\partial/\partial z=0$ i tylko dla tego przypadku podamy odpowiednie warunki brzegowe oraz znajdziemy warunek utraty stateczności. Rozważenie przypadku ogólnego jest znacznie bardziej skomplikowane. Jak się zdaje, daje się ono rozwiązać jedynie za pomocą metod cyfrowych, w związku z czym zostawiamy je do odrębnej publikacji.

3. Płaskie odkształcenia

W rozpatrywanym przypadku $w=0$, $\partial/\partial z=0$ z układu równań $(2.2)_3$, (2.7)-(2.9) można wyrugować funkcje v oraz p' otrzymując jedno równanie na funkcję $u\,(r\vartheta)$:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}+6\frac{1}{r}\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}+5\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\frac{1}{r^3}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^4}u-\Big[2\frac{1}{\kappa\lambda}(1-\kappa^2)\frac{A+2\lambda^4 B+2\lambda^2 F}{\Phi_1+\lambda^2\Phi_2}+ \tag{3.1}$$

$$+\kappa^2+1\Big]\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^4 u}{\partial r^2\partial\vartheta^2}+\frac{1}{r^3}\frac{\partial^3 u}{\partial r\,\partial\vartheta^2}\right)-(1-\kappa^2)\frac{1}{r^4}\frac{\partial^2 u}{\partial\vartheta^2}+\kappa^2\frac{\partial^4 u}{\partial\vartheta^4}=0$$

oraz następujące równania dla funkcji v oraz p':

$$\frac{\partial v}{\partial\vartheta}=-\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}+ru\right), \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial r\,\partial\vartheta}=\left(r^2\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}+6r\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}+5\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}u\right)\frac{1}{\kappa\lambda}(\Phi_1+\lambda^2\Phi_2)+$$

$$+2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^4 u}{\partial^2 r\,\partial^2\vartheta}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial^3 u}{\partial r\,\partial^2\vartheta}-2\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\vartheta^2}\right)\Big[\frac{\kappa^2}{\lambda^2}A-\left(\frac{1}{\kappa\lambda}+\lambda^2\right)B+\left(\frac{\kappa}{\lambda^3}+\kappa^2-1\right)F+$$

$$+\frac{\kappa}{\lambda}\Phi_1+\left(\frac{1}{\lambda^2}+\lambda\kappa\right)\Phi_2\Big]-\frac{\partial^3 u}{\partial r^2\partial\vartheta}\Big[\frac{2}{\lambda^2}A-2\left(\frac{\kappa}{\lambda}+\kappa^2\lambda^2\right)B+2\left(\frac{1}{\kappa\lambda^3}-\kappa^2+1\right)F+$$

$$+\frac{\kappa}{\lambda}\Phi_1+\left(\lambda\kappa+\frac{2}{\lambda^2}\right)\Phi_2\Big]-\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\vartheta}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\right)\Big[2\frac{\kappa^2}{\lambda^2}A-2\left(\frac{1}{\kappa\lambda}+\lambda^2\right)B+$$

$$+2\left(\frac{\kappa}{\lambda^3}+\kappa^2-1\right)F+\left(2\frac{\kappa}{\lambda}+\frac{1}{\kappa\lambda}\right)\Phi_1+\left(\frac{2}{\lambda^2}+2\lambda\kappa+\frac{\lambda}{\kappa}\right)\Phi_2.$$

Żądamy, aby na powierzchni $r=a$ walec był wolny od obciążenia, skąd wynika

$$\tau'^{1k}=0 \quad \text{dla} \quad r=a. \tag{3.3}$$

Jest to jedyny warunek brzegowy. Należy jednak pamiętać, że przemieszczenia muszą być ciągłymi funkcjami zmiennej ϑ. Warunki (3.3) można wyrazić przez u, ϑ oraz p' korzystając ze związków (2.3).

Przejdziemy teraz do znalezienia rozwiązania ogólnego. Poszukujemy go metodą Fouriera badając funkcję [4]

$$u(r,\vartheta)=\alpha(r)Q(\vartheta). \tag{3.4}$$

Łatwo sprawdzić, że

$$Q(\vartheta)=\sin n\vartheta \quad \text{lub} \quad Q(\vartheta)=\cos n\vartheta, \tag{3.5}$$

gdzie n jest dowolną liczbą naturalną (ciągłość przemieszczeń względem ϑ!). Podstawiając teraz (3.4) i (3.5) do (3.1) otrzymuje się niezależnie od tego, czy wzięto funkcję $\sin n\vartheta$ czy $\cos n\vartheta$, zwyczajne równanie różniczkowe

$$\begin{aligned} r^4\frac{d^4\alpha}{dr^4}+6r^3\frac{d^3\alpha}{dr^3}+5r^2\frac{d^2\alpha}{dr^2}-r\frac{d\alpha}{dr}+\alpha- \\ -2bn^2\left(r^2\frac{d^2\alpha}{dr^2}+r\frac{d\alpha}{dr}\right)-n^2(1+\kappa^2)\alpha+n^4\kappa^2\alpha=0, \end{aligned} \tag{3.6}$$

gdzie

$$b=\frac{1}{\kappa\lambda}(1-\kappa^2)^2\frac{A+2\lambda^4B+2\lambda^2F}{\Phi_1+\lambda^2\Phi^2}+\frac{1}{2}(1+\kappa^2). \tag{3.7}$$

Podstawienie (3.4) i (3.5) do warunków brzegowych (3.3) prowadzi do równań

$$\begin{aligned} \alpha'(r)\left[\frac{2}{\kappa^2}(1-\kappa^2)\left(\frac{1}{\lambda^2}A+2\lambda^2B+2F\right)+(2+\kappa^2)\left(\frac{1}{\kappa\lambda}\Phi_1+\frac{\lambda}{\kappa}\Phi_2\right)\right]- \\ -\frac{1}{r}\alpha(r)\left(\frac{1}{\kappa\lambda}\Phi_1+\frac{\lambda}{\kappa}\Phi_2\right)-\frac{1}{n^2}\left[r^2\alpha'''(r)+4r\alpha''(r)+\alpha'(r)-\right. \\ \left.-\frac{1}{r}\alpha(r)\right]\left(\frac{1}{\kappa\lambda}\Phi_1+\frac{\lambda}{\kappa}\Phi_2\right)=0, \\ n\alpha(r)+\frac{1}{n}[r^2\alpha''(r)-r\alpha'(r)+\alpha(r)]=0. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Można pokazać, że zagadnienie brzegowe (3.6) i (3.8) jest samosprzężone. Istnienie nietrywialnych rozwiązań jest warunkiem utraty stateczności zgodnie z [3]. Rozpatrywany problem zredukował się więc do poszukiwania wartości własnych zagadnienia brzegowego.

Równanie (3.6) jest równaniem Eulera, rozwiązaniem ogólnym jest więc funkcja

$$\alpha_n=C_{n1}r^{q_1}+C_{n2}r^{q_2}, \tag{3.9}$$

gdzie q_i są rozwiązaniami równania charakterystycznego

$$q^4-2(1+n^2b)q^2-n^2(1+\kappa^2)+n^4\kappa^2+1=0, \tag{3.10}$$

a C_n stałymi całkowania. Ponieważ dla $r=0$ u jest organiczone, więc w przypadku, gdy q_i są rzeczywiste, mamy

$$C_{n3}=C_{n4}=0. \tag{3.11}$$

W przypadku zespolonych q_i obowiązują podobne związki, których tutaj nie przytaczamy.

Podstawienie (3.10) do warunków brzegowych (3.8) prowadzi do układu dwóch równań algebraicznych na stałe C_{n1} i C_{n2}:

$$\begin{gathered} C_{n1}a^{q_1-1}\{n^2[q_1(2b+1)-1]-(q_1-1)^3\}+ \\ +C_{n2}a^{q_2-1}\{n^2[q_2(2b+1)-1]-(q_2-1)^3\}=0, \\ C_{n1}a^{q_1}(n^2+1-q_1^2)+C_{n2}a^{q_2}(n^2+1-q_2^2)=0. \end{gathered} \tag{3.12}$$

Warunkiem istnienia rozwiązań niezerowych jest znikanie wyznacznika charakterystycznego tego układu równań:

$$\begin{gathered} \{n^2[q_1(2b+1)-1]-(q_1-1)^3\}(n^2+1-q_2^2)- \\ -\{n^2[q_2(2b+1)-1]-(q_2-1)^3\}(n^2+1-q_1^2)=0. \end{gathered} \tag{3.13}$$

Równanie (3.13) jest poszukiwanym warunkiem utraty stateczności.

Podamy tutaj postać, do jakiej redukuje się warunek utraty stateczności (3.13) w przypadku materiału Mooney'a, dla którego Φ_1 i Φ_2 są stałymi niezależnymi od I_K, a $A=B=F=0$. Dla tego materiału

$$q_1=[(n+1)(\kappa n+1)]^{1/2}, \qquad q_2=[(n-1)(\kappa n-1)]^{1/2} \tag{3.14}$$

i warunek utraty stateczności ma postać:

$$\begin{gathered} (n+1)(1-\kappa)\{n^2[(\kappa^2+2)\sqrt{(1+n)(n\kappa-1)}-1]-[\sqrt{(1+n)(n\kappa+1)}-1]^3\}- \\ -[n(1-\kappa)-(1+\kappa)]\{n^2[(\kappa^2+2)\sqrt{(n-1)(n\kappa-1)}-1]-[\sqrt{(n-1)(n\kappa+1)}-1]^3\}=0. \end{gathered} \tag{3.15}$$

Numeryczna analiza (3.15) przy $n=2$ prowadzi do $\kappa=2{,}7$. Jest to krytyczne odkształcenie walca. Przy innych n krytyczne odkształcenie znajduje się dalej od stanu naturalnego, określonego równością $\kappa=1$ (np. dla $n=3$ mamy $\kappa=2{,}9$). Walec z dyslokacją Volterry może więc znajdować się w stanie krytycznym.

Literatura cytowana w tekście

1. A. E. Green, W. Zerna, *Theoretical Elasticity*, Oxford 1954.
2. A. E. Green, R. S. Rivlin, R. T. Scield, *General theory of small elastic deformations superposed on finite elastic deformations*, Proc. Roy. Soc., **A 211** (1952).
3. Guo Zhong-heng, W. Urbanowski, *Stability of non-conservative systems in the theory of elasticity of finite deformations*, Arch. Mech. Stos., 2, **15** (1963).
4. Г. П. Толстов, *Ряды Фурье*, Москва 1951.

Резюме

УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОГО КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА

Рассматривается прямой круговой цилиндр, подверженный конечной деформации, путем вырезки или добавления клина, с произвольным углом и восстановления связности материала. Исследуется устойчивость образовавшегося, таким образом предварительно, напряженного цилиндра, применяя метод малых деформаций, наложенных на конечные деформации. Ограничиваясь случаем, когда добавочная деформация является плоской, дается условие потери устойчивости. Определяется критическая деформация для материала Мунея.

Summary

STABILITY OF A PRE-COMPRESSED CIRCULAR CYLINDER

A simple circular cylinder is deformed in a finite way by the adding or cutting out of a wedge with an arbitrary angular aperture and by restoring the cohesion of the material.

The stability of the cylinder so formed is investigated by using the method of small deformations superposed on the finite deformations. The condition of loss of stability is given with a limitation to the case when the additional deformation is plane. The critical deformation is calculated for Mooney's material.

ZAKŁAD TEORII OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca została złożona w Redakcji dnia 26 listopada 1969 r.