

## PEWIEN PRZYPADEK ŚCISKANIA MIMOŚRODOWEGO W UJĘCIU NIELINIOWYM

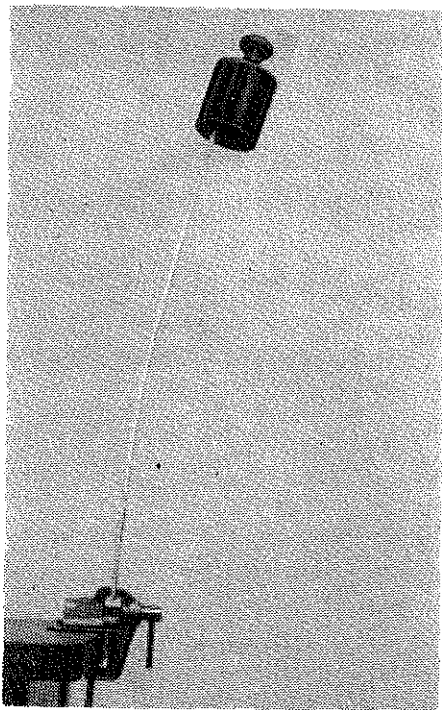
KRZYSZTOF SZUWAŃSKI (KRAKÓW)

### 1. Wstęp

Mimośrodowe ściskanie prętów smukłych bywa często w praktyce realizowane przez obciążenie pręta jednostronnie utwierdzonego ciężarem jakiegoś ciała, spoczywającego na jego swobodnym końcu. Laboratoryjny model takiego przypadku przedstawia rys. 1. Stosowany powszechnie schemat takiego obciążenia (rys. 2), w którym siła ściskająca umieszczona na pewnym mimośrodku  $\delta$  jest przyłożona wprost do swobodnego przekroju pręta, nie odpowiada tu rzeczywistości. W rozpatrywanym przypadku punkt przyłożenia siły ściskającej znajduje się w środku ciężkości ciała spoczywającego na pręcie, a zatem w odległości  $a$  od swobodnego przekroju pręta (rys. 3).

Odcinek  $a$ , praktycznie biorąc, nie będzie ulegał żadnym odkształceniom, można go więc uważać za część pręta idealnie sztywnej. Odcinek ten po ugięciu się pręta będzie powodował dodatkowe zwiększenie się mimośrodu. Tematem niniejszej pracy jest zbadanie wpływu odległości środka ciężkości ciała od swobodnego przekroju pręta (odcinek  $a$ ) na wartość siły krytycznej i skończone ugięcie tego pręta.

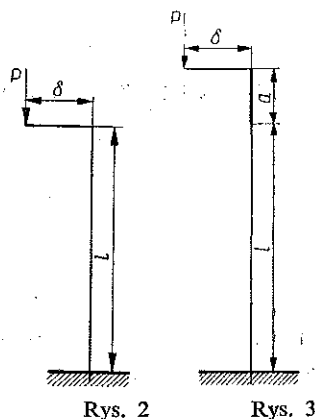
W literaturze najczęściej można spotkać rozwiązania zagadnienia mimośrodowego ściskania prętów w ujęciu liniowym dla przypadku przyłożenia siły bezpośrednio do końcowego przekroju. Rozwiązanie oparte na nieliniowym równaniu linii ugięcia podaje M. Życzkowski [3]. Wpływ obrotu końcowego przekroju pręta ujmuje praca [4] tego samego autora.



Rys. 1

Zagadnienie rozwiążemy przyjmując założenie, że odkształcenia są sprężyste. Ze względu na możliwość występowania dużych odkształceń nie będziemy korzystali ze zlinearyzowanego, lecz ze ścisłego równania linii ugięcia. Uwzględnimy również

wpływ obrotu swobodnego przekroju pręta na wielkość mimośrodów siły ściskającej. Warto tu zaznaczyć, że w miarę wzrostu odkształceń wpływ mimośrodu pierwotnego będzie stopniowo maleł, natomiast będzie wzrastał wpływ części sztywnej pręta  $a$ .



Rys. 2

Rys. 3

## 2. Wyprowadzenie równań określających strzałkę ugięcia

Równaniem wyjściowym jest ścisłe równanie linii ugięcia

$$(2.1) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

W układzie odniesienia przyjętym na rys. 4 można napisać wzór na krzywiznę pręta (F. S. JASIŃSKI [2]) w postaci

$$(2.2) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{y''}{\sqrt{1-(y')^2}}$$

w którym «prim» oznacza różniczkowanie względem łuku  $s$ :

$$(2.3) \quad y' = \frac{dy}{ds}, \quad y'' = \frac{d^2 y}{ds^2}$$

Moment zginający, pochodzący od siły  $P$ , wynosi

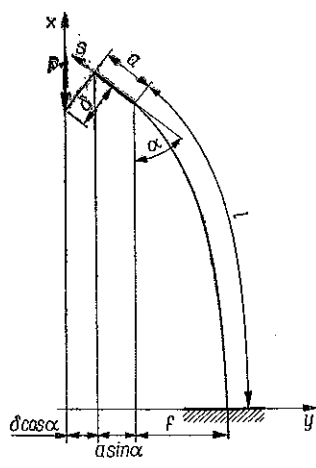
$$(2.4) \quad M = -Py;$$

po podstawieniu

$$(2.5) \quad \frac{P}{EI} = k^2$$

otrzymujemy równanie linii ugięcia:

$$(2.6) \quad \frac{y''}{\sqrt{1-(y')^2}} = -k^2 y$$



Rys. 4

Równanie to należy scałkować, przy czym mają być spełnione następujące warunki brzegowe:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} s=0, & \quad y=f+a \sin \alpha + \delta \cos \alpha, & y' &= 0; \\ s=1, & \quad y=a \sin \alpha + \delta \cos \alpha, & y' &= -\sin \alpha. \end{aligned}$$

Równanie (2.6) jest klasycznym równaniem skończonych ugięć pręta mimośrodkowo ściskanego, natomiast różnica występuje w sformułowaniu warunków brzegowych. Cztery warunki (2.7) określają dwie stałe całkowania, strzałkę ugięcia  $f$  i kąt ugięcia na swobodnym końcu  $\alpha$ .

Aby scałkować równanie (2.6) stosujemy podstawienie

$$(2.8) \quad y' = p(y), \quad y'' = pp'$$

i otrzymujemy

$$(2.9) \quad \sqrt{1-p^2} = \frac{k^2 y^2}{2} + C.$$

Z pierwszego warunku brzegowego (2.7) znajdziemy

$$(2.10) \quad C = 1 - \frac{k^2}{2} (f + a \sin \alpha + \delta \cos \alpha)^2,$$

a z drugiego warunku

$$(2.11) \quad \cos \alpha = 1 - \frac{k^2 f}{2} (f + 2a \sin \alpha + 2\delta \cos \alpha).$$

Po podstawieniu (2.10) do (2.9) mamy

$$(2.12) \quad \sqrt{1-p^2} = 1 - \frac{k^2}{2} [(f + a \sin \alpha + \delta \cos \alpha)^2 - y^2],$$

a po powtórnym scałkowaniu

$$(2.13) \quad p = \frac{dy}{ds} = \pm \sqrt{1 - \left\{ 1 - \frac{k^2}{2} [(f + a \sin \alpha + \delta \cos \alpha)^2 - y^2] \right\}^2}.$$

Wybieramy znak minus, ponieważ dla rosnącego  $s$  maleje  $y$ , czyli  $dy/ds < 0$ . Po uporządkowaniu równania (2.13) i rozdzieleniu zmiennych otrzymujemy

$$(2.14) \quad \frac{-dy}{\sqrt{[(f + a \sin \alpha + \delta \cos \alpha)^2 - y^2] \left\{ 1 - \frac{k^2}{4} [(f + a \sin \alpha + \delta \cos \alpha)^2 - y^2] \right\}}} = kds.$$

Całka, którą otrzymujemy po lewej stronie, jest całką eliptyczną, gdyż w mianowniku pod pierwiastkiem występuje wyrażenie czwartego stopnia ze względu na zmienną  $y$ . Sprowadzamy tę całkę do postaci normalnej wprowadzając nową zmienną  $\varphi$ :

$$(2.15) \quad \begin{aligned} y &= (f + a \sin \alpha + \delta \cos \alpha) \cos \varphi, \\ dy &= -(f + a \sin \alpha + \delta \cos \alpha) \sin \varphi d\varphi \end{aligned}$$

i otrzymujemy ostatecznie

$$(2.16) \quad \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{k^2}{4} (f + a \sin \alpha + \delta \cos \alpha)^2 \sin^2 \varphi}} = kds.$$

Wprowadzając zmienną  $\varphi$  do warunków brzegowych (2.7) znajdziemy

$$(2.17) \quad s=0, \quad \varphi=0; \quad s=1, \quad \varphi = \arccos \frac{a \sin \alpha + \delta \cos \alpha}{f + a \sin \alpha + \delta \cos \alpha}.$$

Po wykorzystaniu pierwszego z tych warunków można równanie (2.16) napisać następująco:

$$(2.18) \quad \int_0^{\phi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \frac{k^2}{4} (f + a \sin \alpha + \delta \cos \alpha)^2 \sin^2 \psi}} = ks,$$

gdzie  $\psi$  jest nową zmienną całkowania, a wyrażenie po lewej stronie jest całką eliptyczną niepełną pierwszego rodzaju.

Naszym zadaniem jest znalezienie związku między siłą ściskającą  $P$  a strzałką ugięcia na końcu pręta  $f$ . W tym celu musimy wykorzystać zależności na swobodnym końcu pręta, czyli dla  $s=1$ :

$$(2.19) \quad \int_0^{\arccos \frac{a \sin \alpha + \delta \cos \alpha}{f + a \sin \alpha + \delta \cos \alpha}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \frac{k^2}{4} (f + a \sin \alpha + \delta \cos \alpha)^2 \sin^2 \psi}} = kl.$$

Często stosowanym zapisem dla całki eliptycznej niepełnej pierwszego rodzaju jest następująca postać całki:

$$(2.20) \quad \int_0^{\phi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \zeta \sin^2 \psi}} = F(\phi, \zeta);$$

zatem równanie (2.19) można przedstawić w skróconej formie

$$(2.21) \quad F(\phi, \zeta) = kl,$$

gdzie

$$(2.22) \quad \begin{aligned} \phi &= \arccos \frac{a \sin \alpha + \delta \cos \alpha}{f + a \sin \alpha + \delta \cos \alpha}, \\ \zeta &= \arcsin \left[ \frac{k}{2} (f + a \sin \alpha + \delta \cos \alpha) \right]. \end{aligned}$$

### 3. Parametryzacja rozwiązania

Równanie (2.21) przedstawia w sposób niejawny związek między siłą ściskającą pręt a strzałką ugięcia. Ponieważ równanie to nie da się rozwickać, więc w dalszym ciągu pracy przedstawimy rozwiązania w postaci parametrycznej. Jako parametry

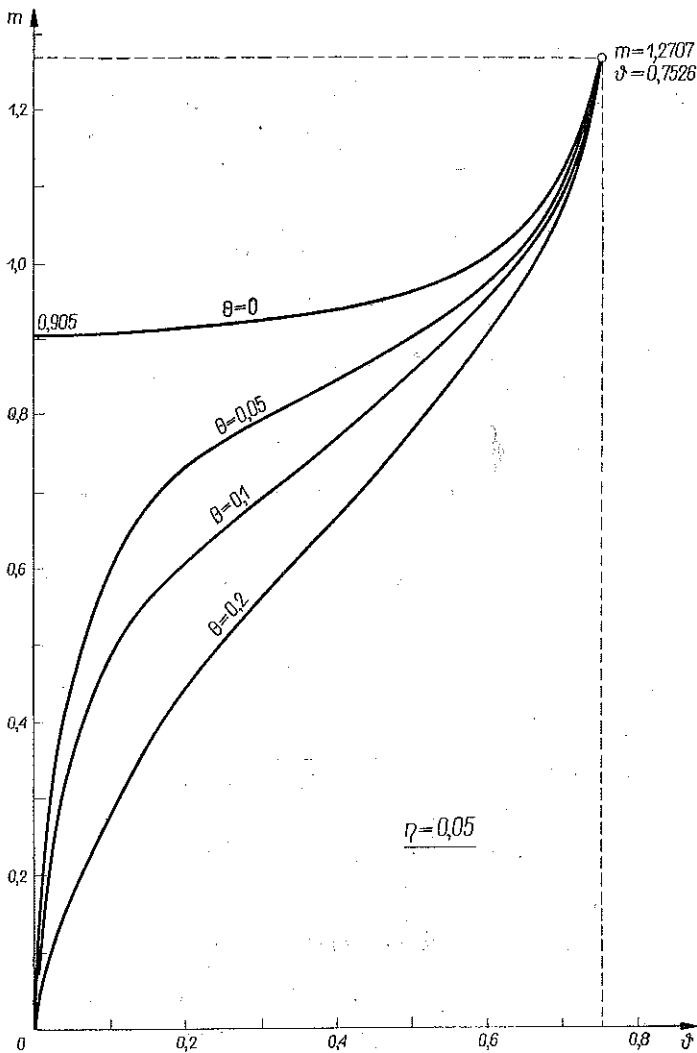
niezależne przyjmijmy argumenty całki eliptycznej  $\varphi$  i  $\zeta$ . Wykorzystując równania (2.11), (2.21) i (2.22) otrzymujemy

$$(3.1) \quad P = EI \frac{F^2(\varphi, \zeta)}{l^2}, \quad f = \frac{2l \sin \zeta (1 - \cos \varphi)}{F(\varphi, \zeta)},$$

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \zeta \sin^2 \varphi,$$

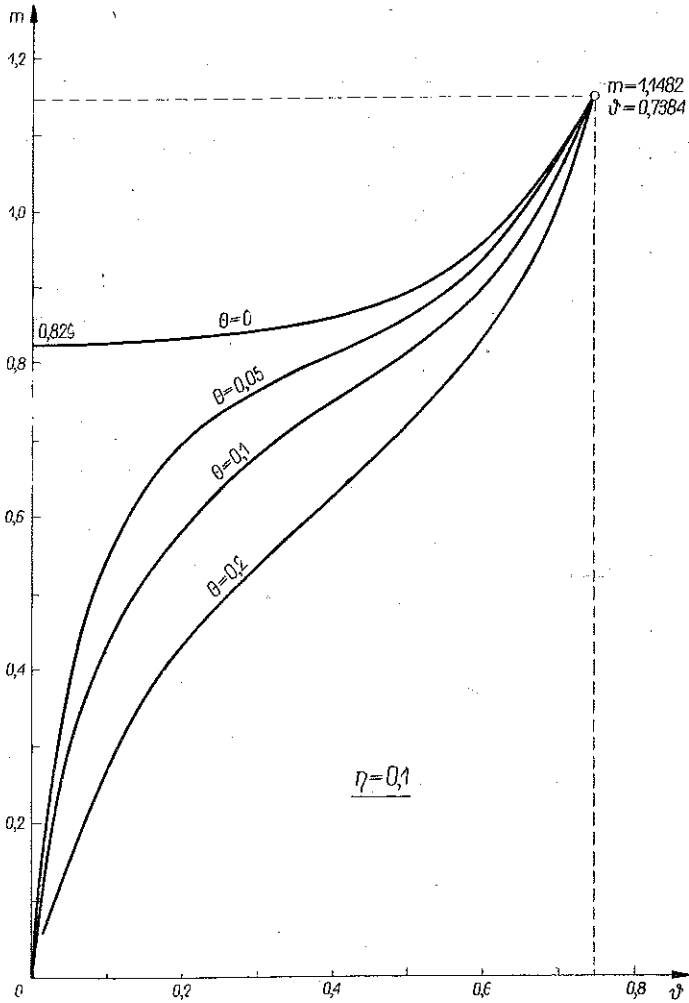
$$\delta = \frac{2l \sin \zeta \cos \varphi - 2aF(\varphi, \zeta) \sin \zeta \sin \varphi \sqrt{1 - \sin^2 \varphi \sin^2 \zeta}}{F(\varphi, \zeta) (1 - 2 \sin^2 \zeta \sin^2 \varphi)}$$

Powyższe związki pozwalają dla dowolnie dobranych parametrów  $\zeta$  i  $\varphi$  obliczyć odpowiadające sobie wzajemnie: siłę ściskającą, strzałkę ugięcia i mimośród, a także kąt obrotu swobodnego przekroju.



Rys. 5

Charakterystyczne jest, że długość części sztywnej  $a$  występuje tylko we wzorze na mimośród  $\delta$ . Oznacza to, że tej samej wartości siły ściskającej odpowiada ta sama strzałka ugięcia, co w przypadku przyłożenia siły na końcu pręta ale przy innym, nieco większym mimośrodku.



Rys. 6

Dla uproszczenia dalszych obliczeń wprowadzamy wielkości bezwymiarowe, przy czym wielkości o wymiarze długości  $f$ ,  $\delta$  i  $a$  odnosimy do długości początkowej pręta  $l$  (bez uwzględnienia części sztywnej), a wartość siły ściskającej do krytycznej siły eulerowskiej:

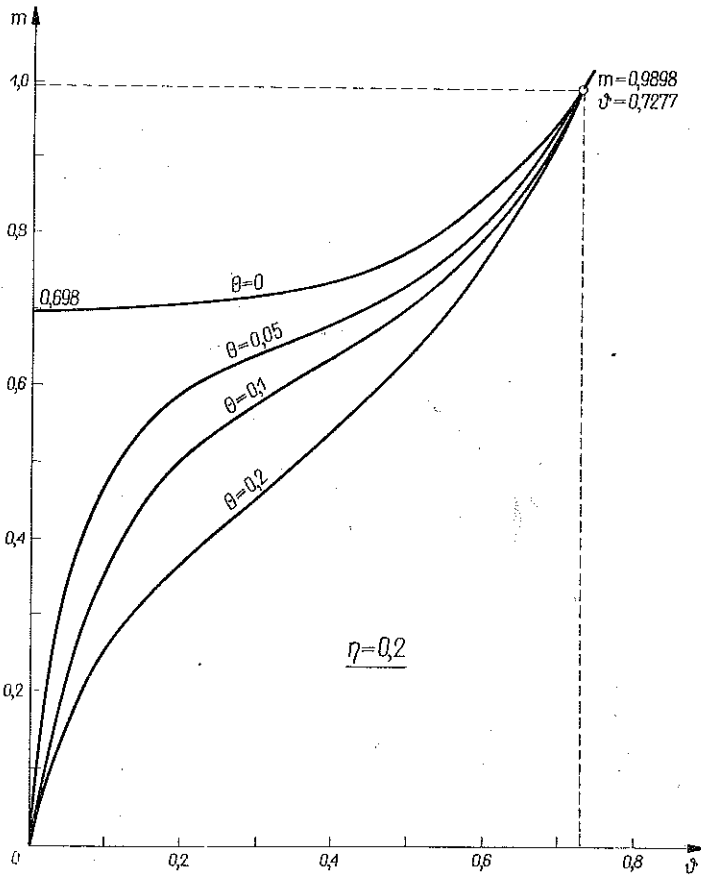
$$(3.2) \quad \vartheta = \frac{f}{l}, \quad \theta = \frac{\delta}{l}, \quad \eta = \frac{a}{l}, \quad m = \frac{P}{P_E}.$$

W tym przypadku rozwiązania dają się przedstawić w następującej formie (wzoru na  $\cos \alpha$  nie przepisujemy):

$$(3.3) \quad m = \frac{4}{\pi^2} F^2(\varphi, \zeta),$$

$$g = \frac{2 \sin \zeta (1 - \cos \varphi)}{F(\varphi, \zeta)},$$

$$\theta = \frac{2 \sin \zeta \cos \varphi}{(1 - 2 \sin^2 \zeta \sin^2 \varphi) F(\varphi, \zeta)} - \frac{2 \eta \sin \zeta \sin \varphi \sqrt{1 - \sin^2 \varphi \sin^2 \zeta}}{1 - 2 \sin^2 \varphi \sin^2 \zeta}$$

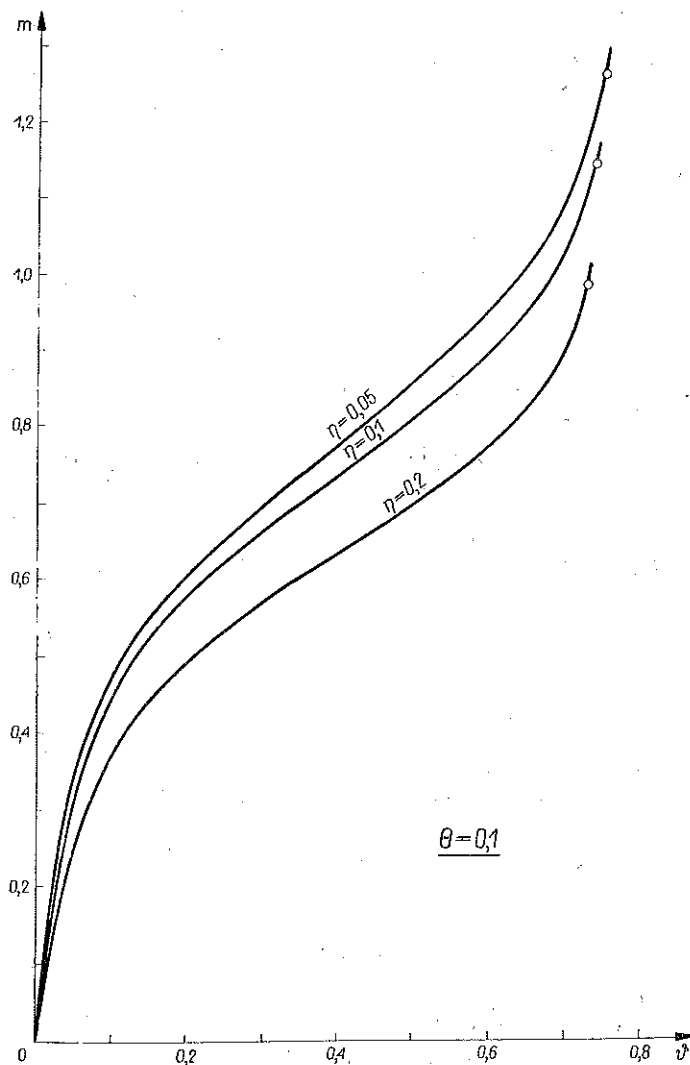


Rys. 7

Opierając się na powyższych związkach przeprowadzono obliczenia numeryczne, których wyniki zostały przedstawione na wykresach 5, 6 i 7, obrazujących zależności między siłą ściskającą a strzałką ugięcia przy różnych wielkościach mimośrodów. Obliczenia były prowadzone dla  $\eta=0,05; 0,1; 0,2$ .

Widać, że wszystkie linie (dla różnych wartości mimośrów) posiadają jeden wspólny punkt. Jest to zatem punkt, w którym niezależnie od wielkości mimośrodu

ta sama siła wywołuje takie samo ugięcie pręta. Odpowiada to obrotowi swobodnego końca pręta o kąt  $90^\circ$ , czyli przypadkowi, gdy  $\cos \alpha = 0$ . Punkt ten ze wzrostem  $\eta$  przesuwa się w dół i nieznacznie w lewo. Oznacza to, że im dalej znajduje się punkt przyłożenia siły od swobodnego przekroju pręta, tym mniejsza siła wywołuje jego obrót o  $90^\circ$ , przy czym odpowiadająca strzałka ugięcia jest również nieco mniejsza.



Rys. 8

Na wykresie 8 naniesione zostały linie stałego mimośrodów  $\theta = 0,1$  przy różnych wartościach  $\eta$ . Wzrost  $\eta$  powoduje wyraźne obniżenie krzywej  $\vartheta = f(m)$ , czyli to samo ugięcie jest ze wzrostem  $\eta$  wywoływane coraz mniejszą siłą.



## 4. Przypadek ściskania osiowego (wyboczenia)

Na wykresach 5, 6 i 7 naniesiona została również linia dla mimośrodów równego zeru, odpowiadająca przypadkowi osiowego ściskania pręta. Wymaga to rozpatrzenia przejścia granicznego do przypadku wyboczenia. Przystępując mimośród do zera z (3.3) otrzymujemy

$$(4.1) \quad \frac{2 \sin \zeta \cos \varphi}{(1 - 2 \sin^2 \zeta \sin^2 \varphi) F(\varphi, \zeta)} - \frac{2 \eta \sin \zeta \sin \varphi \sqrt{1 - \sin^2 \varphi \sin^2 \zeta}}{1 - 2 \sin^2 \zeta \sin^2 \varphi} = 0,$$

a po sprowadzeniu do wspólnego mianownika i przyrównaniu licznika do zera

$$(4.2) \quad \sin \zeta \cos \varphi - \eta F(\varphi, \zeta) \sin \zeta \sin \varphi \sqrt{1 - \sin^2 \varphi \sin^2 \zeta} = 0.$$

W rozważanym przypadku zakładając, że  $\sin \zeta$  nie osiąga wartości zera, znajdziemy równanie

$$\operatorname{ctg} \varphi - \eta F(\varphi, \zeta) \sqrt{1 - \sin^2 \varphi \sin^2 \zeta} = 0.$$

W chwili, kiedy dojdziemy do idealnie osiowego działania siły, nie tylko mimośród  $\theta$ , ale również strzałka ugięcia  $\vartheta$  oraz kąt obrotu swobodnego przykroju  $\alpha$  będą równe zeru; wynika stąd, że  $\sin \zeta$  musi też być równy zeru, zatem spełniony jest warunek

$$(4.3) \quad \operatorname{ctg} \varphi = \eta F(\varphi, \zeta).$$

Wtedy

$$(4.4) \quad F = \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \zeta \sin^2 \psi}} = \varphi, \quad \operatorname{ctg} F(\varphi, \zeta) = \eta F(\varphi, \zeta),$$

a z równania (3.3) wynika, że

$$(4.5) \quad F(\varphi, \zeta) = \frac{\pi}{2} \sqrt{m}.$$

Otrzymujemy zatem następujący związek między siłą powodującą wyboczenie pręta  $m$  a długością części sztywnej  $\eta$ :

$$(4.6) \quad \eta = \frac{\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} \sqrt{m}}{\frac{\pi}{2} \sqrt{m}}.$$

Równanie to określa siłę krytyczną  $m$  w sposób uwikłany. W przypadku  $\eta = 0$  oczywiście  $m = 1$ ;  $m$  dla  $\eta \neq 0$  jest odpowiednio mniejsze.

Wzór (4.6) można również wyprowadzić z ogólnego wzoru podanego przez A. N. DINNIKA. W pracy [1] podaje on wzór określający siłę krytyczną dla pręta złożonego z dwóch części o różnych momentach bezwładności:

$$(4.7) \quad P_{\text{kr}} = \left[ \frac{kU(\eta+1)}{\eta} \right]^2 \frac{EI}{(1+a)^2},$$

gdzie  $U$  jest pierwiastkiem równania

$$(4.8) \quad \operatorname{tg} U \operatorname{tg} \frac{kU}{\eta} = -\frac{1}{k},$$

a  $k$  jest stosunkiem momentów bezwładności przekrojów górnej i dolnej części pręta.

Wprowadzając bezwymiarową siłę krytyczną, zgodnie z równaniem (3.3) otrzymujemy z (4.7)

$$(4.9) \quad U = \pm \frac{\pi\eta}{2k} \sqrt{m},$$

a po podstawieniu do (4.8)

$$(4.10) \quad \operatorname{tg} \frac{\pi\eta\sqrt{m}}{2k} \operatorname{tg} \frac{\pi\sqrt{m}}{2} = \frac{1}{k}.$$

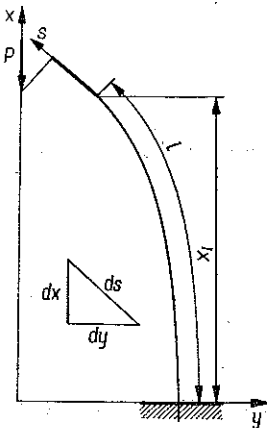
Przyjmując część górną pręta za idealnie sztywną, czyli zakładając, że  $k \rightarrow \infty$  można pierwszy z tangensów przyjąć za równy argumentowi. Otrzymujemy wówczas związek

$$(4.11) \quad \frac{\pi}{2} \sqrt{m} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \sqrt{m} = \frac{1}{\eta}$$

identyczny z wyprowadzonym uprzednio wzorem (4.6).

### 5. Obliczenie obniżenia końca pręta

Odległość swobodnego końca ugiętego pręta od osi  $y$ , na której znajduje się punkt zamocowania, jest określona za pomocą wzoru (rys. 9)



Rys. 9

$$(5.1) \quad x_1 = \int_0^{x_1} dx,$$

przy czym

$$(5.2) \quad dx = \sqrt{(ds)^2 - (dy)^2} = \frac{\sqrt{1 - (y')^2}}{|y'|} dy$$

oraz spełnione są następujące warunki brzegowe:

$$(5.3) \quad \begin{aligned} x=0, & \quad y=f+a \sin \alpha + \delta \cos \alpha; \\ x=x_1, & \quad y=a \sin \alpha + \delta \cos \alpha. \end{aligned}$$

Podstawiając za  $y'$  wyrażenie (2.13) otrzymujemy

$$(5.4) \quad x_1 = \int_{f+a \sin \alpha + \delta \cos \alpha}^{a \sin \alpha + \delta \cos \alpha} \frac{1 - \frac{k^2}{2} [(f+a \sin \alpha + \delta \cos \alpha)^2 - y^2]}{\sqrt{1 - \left\{ 1 - \frac{k^2}{2} [(f+a \sin \alpha + \delta \cos \alpha)^2 - y^2] \right\}^2}} dy.$$

Podobnie jak w przypadku obliczania ugięcia wprowadzamy nową zmienną  $\varphi$  zgodnie ze wzorami (2.15). Wzór (5.4) przekształca się wówczas do postaci

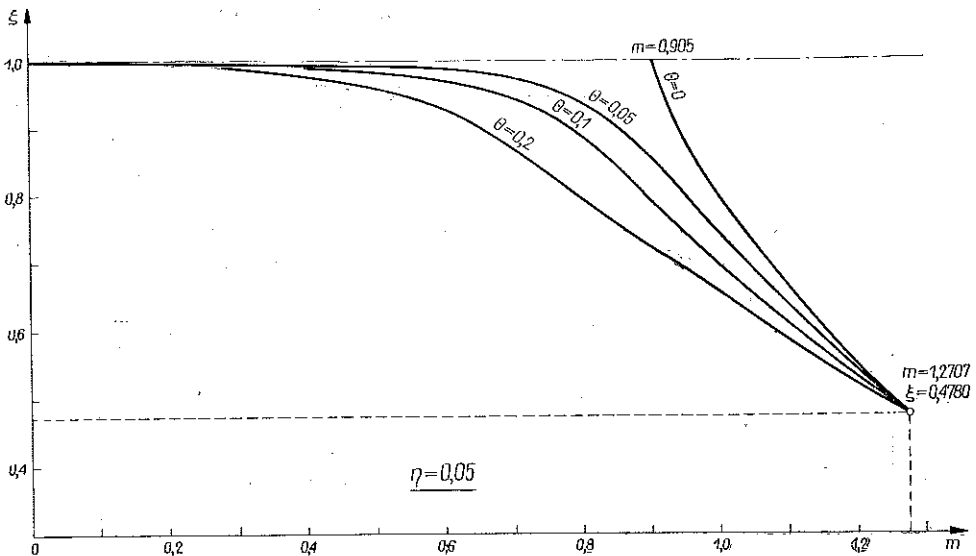
$$(5.5) \quad x_l = \int_0^{\arccos \frac{a \sin \alpha + \delta \cos \alpha}{f + a \sin \alpha + \delta \cos \alpha}} \frac{1 - \frac{k^2}{2} (f + a \sin \alpha + \delta \cos \alpha)^2 \sin^2 \varphi d\varphi}{k \sqrt{1 - \frac{k^2}{4} (f + a \sin \alpha + \delta \cos \alpha)^2 \sin^2 \varphi}}$$

Sprowadzamy tę całkę do postaci normalnej przez podstawienie (2.22) i rozbijamy na dwie następujące całki:

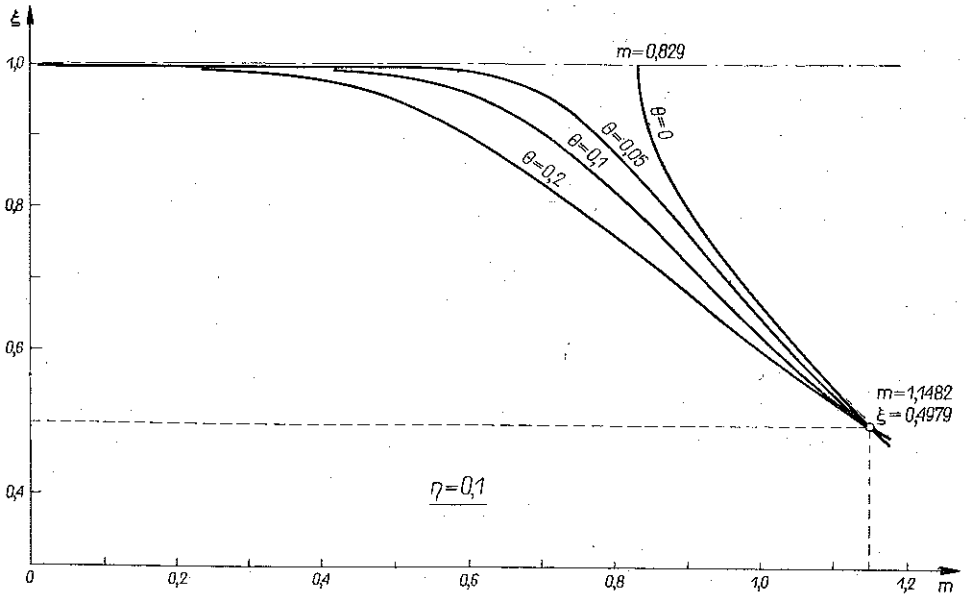
$$(5.6) \quad x_l = \frac{2}{k} \int_0^{\arccos \frac{a \sin \alpha + \delta \cos \alpha}{f + a \sin \alpha + \delta \cos \alpha}} \sqrt{1 - \sin^2 \zeta \sin^2 \varphi} d\varphi - \frac{1}{k} \int_0^{\arccos \frac{a \sin \alpha + \delta \cos \alpha}{f + a \sin \alpha + \delta \cos \alpha}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \zeta \sin^2 \varphi}}$$

Pierwsza z tych całek jest całką eliptyczną niepełną drugiego rodzaju  $E(\varphi, \zeta)$ , a druga — całką eliptyczną niepełną pierwszego rodzaju  $F(\varphi, \zeta)$ . A więc jest to całka, jaka występowała we wzorze na strzałkę ugięcia (2.19). Można zatem napisać krócej:

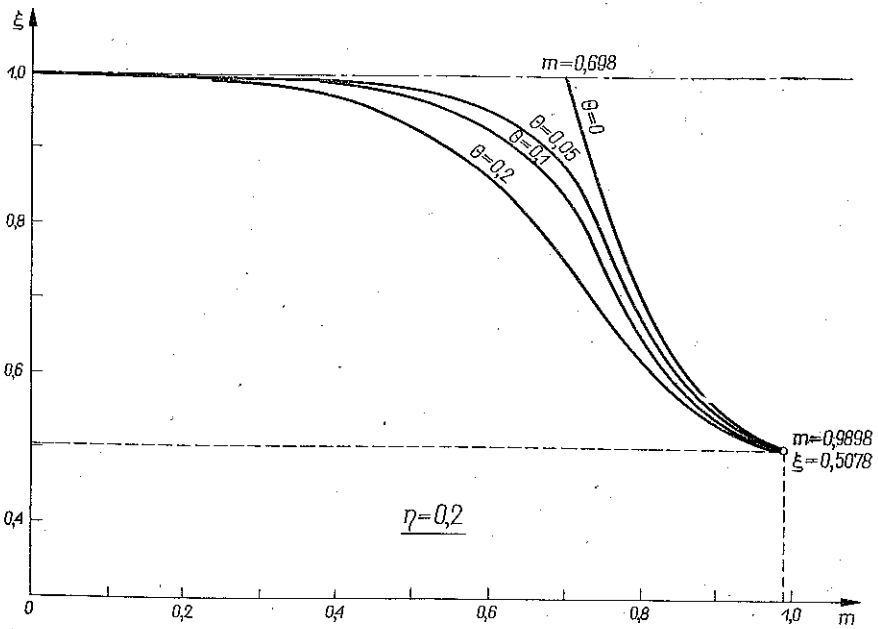
$$(5.7) \quad x_l = \frac{1}{k} [2E(\varphi, \zeta) - F(\varphi, \zeta)].$$



Rys. 10



Rys. 11.



Rys. 12.

Wprowadzając wielkości bezwymiarowe otrzymujemy

$$(5.8) \quad \xi = \frac{x_l}{l} = \frac{1}{kl} [2E(\varphi, \zeta) - F(\varphi, \zeta)],$$

przy czym wiadomo z (2.21), że

$$(5.9) \quad kl = F(\varphi, \zeta).$$

Zatem obniżenie niezamocowanego końca pręta będzie określone następującym wzorem:

$$(5.10) \quad \xi = \frac{2E(\varphi, \zeta)}{F(\varphi, \zeta)} - 1.$$

Zależność między  $\xi$  a bezwymiarową siłą ściskającą  $m$  dla różnych wielkości mimośrodów (w tym także dla  $\theta=0$ ) oraz dla różnych  $\eta$  została przedstawiona graficznie na wykresach 10, 11 i 12

#### 6. Wnioski końcowe

Wpływ przesunięcia punktu przyłożenia siły ściskającej z końcowego przekroju (o pewną odległość  $\eta$ ) jest dosyć istotny. Daje się on zaobserwować wyraźnie na wykresach  $m=f(\theta)$ , przedstawiających zależność siły ściskającej od strzałki ugięcia. Wykres ten ze wzrostem  $\eta$  przesuwa się dość znacznie w dół ku niższym wartościom siły ściskającej. Poważnie również maleje wartość siły krytycznej wyboczenia, która np. dla  $\eta=0,2$  wynosi tylko 0,698 siły krytycznej dla przypadku przyłożenia siły bezpośrednio do swobodnego przekroju.

#### Literatura cytowana w tekście

1. А. Н. Динник, *Продольный изгиб и кручение*, Изд. АН СССР, Москва 1955.
2. Ф. С. Ясинский, *Избранные работы по устойчивости сжатых стержней*, Гостехиздат, Москва-Ленинград 1952.
3. М. Życzkowski, *Ugięcie pręta ściskanego mimośrodowo pod działaniem siły krytycznej*, Rozpr. Inżyn., IV, Warszawa 1953.
4. М. Życzkowski, *Wpływ zmniejszania się mimośrodów na ugięcie prętów mimośrodowo ściskanych*, Rozpr. Inżyn., 3, 5 (1957), 399.

#### Резюме

#### НЕКОТОРЫЙ СЛУЧАЙ ЭКСЦЕНТРИЧЕСКОГО СЖАТИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ ПОСТАНОВКЕ

Рассматривается, часто встречаемый на практике, случай эксцентрического сжатия. Стержень одностронне закреплен и нагружен весом какого либо тела, находящегося на его свободном конце. Точка приложения силы сжатия расположена тогда над свободным сечением, на высоте  $a$  (равной расстоянию центра тяжести тела от свободного конца стержня).

Определяется влияние отрезка  $a$  на прогиб стержня на основе нелинейного уравнения линии прогиба, с учетом влияния оборота свободного сечения стержня. Результат получен

в форме неполного эллиптического интеграла, первого рода. Затем проводится параметризация решений и на основе параметризованных уравнений проводятся числовые расчеты, результаты которых представлены графически. Рассматривается случай граничного перехода к осевому сжатию и приводится, также, расчет приближения концов стержня.

### Summary

#### A CERTAIN CASE OF ECCENTRIC COMPRESSION IN NONLINEAR CONSIDERATION

In this paper is considered the frequently found case of eccentric compression — loading of a bar unilaterally fixed by the weight of a certain body resting on its free end. The point of application of the compressing force is then above the free cross-section at height  $a$  (equal to the distance of the centre of gravity of the body from the free end of the bar).

The influence of the segment  $a$  upon the bending of the bar are determined on the basis of the exact nonlinear equation of the bending line, consideration being given to the influence of the rotation of the free end of the bar. The result has been obtained in the form of an incomplete elliptical integral of the first kind. Subsequently, parametrization of the solutions numerical calculations are made, the results of which are presented graphically. The case of the limiting transition to axial compression is considered, and the approach of the ends of the bar is calculated.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 30 października 1969 r.*

---