

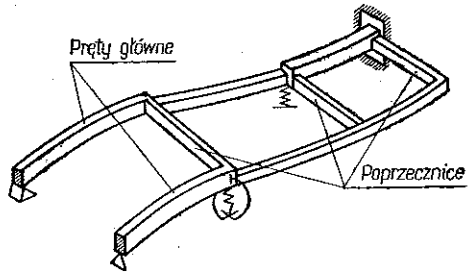
MACIERZOWA ANALIZA STATYCZNA PŁASKICH RUSZTÓW KOŁOWYCH

GUSTAW RAKOWSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

Tematem niniejszej pracy jest zastosowanie metody macierzy przeniesienia do analizy statycznej rusztów kołowych. Obliczenie tego rodzaju układów można przeprowadzić także metodami klasycznymi [1]. Celowość zastosowania metody macierzowej wynika z faktu, że dzięki usystematyzowanemu i zblokowanemu tokowi rachunku stwarza ona dogodne warunki dla użycia współczesnych środków techniki obliczeniowej.

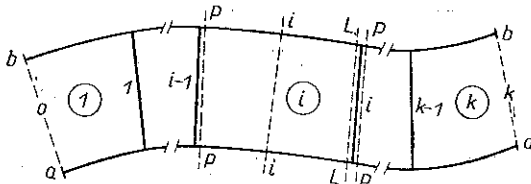
Przedmiotem rozważań będzie ruszt pokazany na rys. 1. Wyprowadzone związki i zależności można jednak rozszerzyć na układy o większej liczbie prętów głównych.



Rys. 1

2. Istota zagadnienia

Metoda macierzy przeniesienia została omówiona w poprzednich pracach autora, np. [2]. Występujące tam pojęcia zostaną obecnie rozszerzone i dostosowane do układu pokazanego schematycznie na rys. 2.



Rys. 2

Składowymi wektora stanu Z_i będą siły wewnętrzne i przemieszczenia prętów głównych a oraz b , występujące w przekroju i przęsta i -tego.

Tak więc będziemy mieli

$$(2.1) \quad Z_i = \begin{bmatrix} Z_a \\ Z_b \end{bmatrix}_i = \{v, \varphi, \vartheta, M_s, M_n, Q\}_a \quad v, \varphi, \vartheta, M_s, M_n, Q\}_b$$

gdzie v oznacza ugięcie, φ kąt obrotu przekroju, ϑ kąt skręcenia przekroju, M , moment skręcający, M_n moment zginający oraz Q siłę poprzeczną.

Macierz przęśła i -tego F_i o wymiarze 12×12 będzie wyrażała zależność pomiędzy wektorami stanu w przekrojach na lewo od poprzecznic i oraz na prawo od poprzecznic $i-1$ (rys. 2),

$$(2.2) \quad Z_i^L = F_i Z_{i-1}^P$$

Dla macierzy uzależniającej wektory stanu w przekrojach po obu stronach poprzecznic i zachowamy nazwę macierzy węzła, czyli

$$(2.3) \quad Z_i^P = H_i Z_i^L$$

Podany w pracy [2] proces uzależniający wektory stanu w przekrojach skrajnych z pominięciem wektorów w przekrojach pośrednich można zastosować także w rozpatrywanym przypadku. Tak więc otrzymamy

$$(2.4) \quad \begin{aligned} Z_k^L &= F_k H_{k-1} F_{k-1} \dots H_i F_i \dots H_1 F_1 H_0 Z_0^L, \\ Z_k^P &= H_k F_k H_{k-1} F_{k-1} \dots H_i F_i \dots H_1 F_1 H_0 Z_0^L, \end{aligned}$$

gdzie Z_0^L oznacza wektor stanu o wymiarze 6×1 , którego składowymi są niewiadome, różne od zera siły i przemieszczenia w przekroju na lewo od węzłów o , a H_0 macierz węzła o wymiarze 12×6 w przekroju początkowym.

Niewiadome składowe wektora Z_0^L można wyznaczyć z warunków brzegowych w przekroju skrajnym k .

Znajomość Z_0^L oraz poszczególnych macierzy F_i i H_i pozwala na podstawie (2.4) obliczać siły i przemieszczenia w dowolnym przekroju prętów głównych rusztu.

3. Macierz przęśła i macierz węzła

W przypadku rusztu z dwoma prętami głównymi można, stosując rozszerzoną formę macierzową, przedstawić związek (2.2) w następującej postaci:

$$(3.1) \quad \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ \hline Z_a \\ \hline Z_b \\ \hline 1 \end{bmatrix}_i^L = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 1 \\ \hline F_a & 0 & f_a \\ \hline 0 & F_b & f_b \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ \hline Z_a \\ \hline Z_b \\ \hline 1 \end{bmatrix}_{i-1}^P,$$

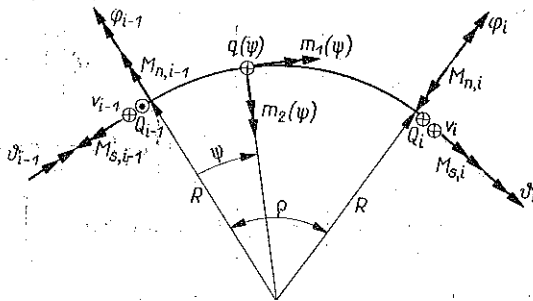
gdzie symbole F_a, F_b oznaczają macierze 6×6 , wyrażające zależność pomiędzy siłami i przemieszczeniami w przekrojach $i-1$ oraz i prętów a i b ; f_a, f_b — wektory 6×1 wyrażające wpływ obciążenia zewnętrznego na siły wewnętrzne i przemieszczenia prętów a i b w przekroju i .

Macierze F_a i F_b mają analogiczną budowę. W dalszym ciągu dla ich oznaczenia będziemy używali symbolu F , natomiast dla f_a i f_b symbolu f .

Aby zbudować macierz F , rozpatrzmy odcinek pręta kołowego zakrzywionego w planie, obciążonego jak to podano na rys. 3. Zakładamy, że przekrój poprzeczny tego odcinka jest stały, zwarty lub zamknięty jednospójny. Chodzi o ustalenie zależności pomiędzy siłami i przemieszczeniami w przekrojach skrajnych $i, i-1$.

Wykorzystamy w tym celu rozwiązanie równania różniczkowego osi odkształconej, podane w pracy [3], s. 285-291. Traktując występujące tam parametry początkowe jako składowe wektora Z_{i-1} , otrzymujemy

$$(3.2) \quad \begin{bmatrix} v \\ \varphi \\ \vartheta \\ M_s \\ M_n \\ Q \\ 1 \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{16} & f_1 \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{26} & f_2 \\ f_{31} & f_{32} & \dots & f_{36} & f_3 \\ f_{41} & f_{42} & \dots & f_{46} & f_4 \\ f_{51} & f_{52} & \dots & f_{56} & f_5 \\ f_{61} & f_{62} & \dots & f_{66} & f_6 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \varphi \\ \vartheta \\ M_s \\ M_n \\ Q \\ 1 \end{bmatrix}_{i-1}$$



Rys. 3

Występujące w tym wzorze symbole mają następujące znaczenie:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} f_{11} &= 1, & f_{12} &= R \sin \rho, & f_{13} &= \pm R(1 - \cos \rho), \\ f_{14} &= \pm \frac{R^2(1 + \mu)}{2EJ} (\sin \rho - \rho \cos \rho), \\ f_{15} &= \frac{R^2}{EJ} \left[-\frac{1}{2} \rho \sin \rho + \mu \left(1 - \cos \rho - \frac{1}{2} \rho \sin \rho \right) \right], \\ f_{16} &= -\frac{R^3}{EJ} \left[\frac{1}{2} (\sin \rho - \rho \cos \rho) - \mu \left(\rho + \frac{1}{2} \rho \cos \rho - \frac{3}{2} \sin \rho \right) \right], \\ f_{21} &= 0, & f_{22} &= \cos \rho, & f_{23} &= \pm \sin \rho, & f_{24} &= \pm \frac{R(1 + \mu)}{2EJ} \rho \sin \rho, \\ f_{25} &= \frac{R}{2EJ} [-\sin \rho - \rho \cos \rho + \mu (\sin \rho - \rho \cos \rho)], \\ f_{26} &= -\frac{R^3}{EJ} \left[\frac{1}{2} \rho \sin \rho - \mu \left(1 - \cos \rho - \frac{1}{2} \rho \sin \rho \right) \right], \\ f_{31} &= 0, & f_{32} &= \mp \sin \rho, & f_{33} &= \cos \rho, \\ f_{34} &= \frac{R}{2EJ} [-\sin \rho + \rho \cos \rho + \mu (\sin \rho + \rho \cos \rho)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3.3) \quad [c,d] \quad f_{35} &= \pm \frac{R(1+\mu)}{2EJ} \rho \sin \rho, \quad f_{36} = \mp \frac{R^2(1+\mu)}{2EJ} (-\sin \rho + \rho \cos \rho), \\
 f_{41} &= f_{42} = f_{43} = 0, \quad f_{44} = \cos \rho, \quad f_{45} = \pm \sin \rho, \\
 f_{46} &= \pm R(1 - \cos \rho), \\
 f_{51} &= f_{52} = f_{53} = 0, \quad f_{54} = \mp \sin \rho, \quad f_{55} = \cos \rho, \\
 f_{56} &= R \sin \rho, \\
 f_{61} &= f_{62} = f_{63} = f_{64} = f_{65} = 0, \quad f_{66} = 1, \\
 f_1 &= \frac{R^3}{EJ} \left\{ m_2(0) \left[\frac{1}{2} (\sin \rho - \rho \cos \rho) - \mu \left(\rho + \frac{1}{2} \rho \cos \rho - \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. - \frac{3}{2} \sin \rho \right) \right] - (1+\mu) g(0) \left[1 - \cos \rho - \frac{1}{2} \rho \sin \rho \right] - \right. \\
 &\quad \left. - (1+\mu) (g'(0)) \left[\rho \left(1 + \frac{1}{2} \rho \cos \rho \right) - \frac{3}{2} \sin \rho \right] \right\} + \\
 &\quad + \int_0^\rho f(\psi) \left\{ (\rho - \psi) \left[1 + \frac{1}{2} \cos(\rho - \psi) \right] - \frac{3}{2} \sin(\rho - \psi) \right\} d\psi, \\
 f_2 &= \frac{R^2}{EJ} \left\{ m_2(0) \left[\frac{1}{2} \rho \sin \rho - \mu \left(1 - \cos \rho - \frac{1}{2} \rho \sin \rho \right) \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1+\mu}{2} g(0) (\sin \rho - \rho \cos \rho) - (1-\mu) g'(0) \left(1 - \cos \rho - \frac{1}{2} \rho \sin \rho \right) \right\} + \\
 &\quad + \frac{1}{R} \int_0^\rho f(\psi) \left[1 - \cos(\rho - \psi) - \frac{1}{2} (\rho - \psi) \sin(\rho - \psi) \right] d\psi, \\
 f_3 &= \frac{R^2}{2EJ} \left\{ \pm (1+\mu) m_2(0) (\rho \cos \rho - \sin \rho) - \right. \\
 &\quad \left. - g_1(0) (2 \cos \rho + \rho \sin \rho + \mu \rho \sin \rho) - \right. \\
 &\quad \left. - g_1'(0) [3 \sin \rho - \rho \cos \rho + \mu (\sin \rho - \rho \cos \rho)] + 2g_1(\rho) \right\} + \\
 &\quad + \frac{1}{2R(1+\mu)} \int_0^\rho f_1(\psi) \left\{ 3 \sin(\rho - \psi) - (\rho - \psi) \cos(\rho - \psi) + \right. \\
 &\quad \left. + \mu [\sin(\rho - \psi) - (\rho - \psi) \cos(\rho - \psi)] \right\} d\psi, \\
 f_4 &= R \int_0^\rho \left\{ \mp Rq(\psi) [1 - \cos(\rho - \psi)] - m_1(\psi) \cos(\rho - \psi) \mp m_2(\psi) \sin(\rho - \psi) \right\} d\psi, \\
 f_5 &= R \int_0^\rho \left\{ [-Rq(\psi) \pm m_1(\psi)] \sin(\rho - \psi) - m_2(\psi) \cos(\rho - \psi) \right\} d\psi, \\
 f_6 &= -R \int_0^\rho q(\psi) d\psi
 \end{aligned}$$

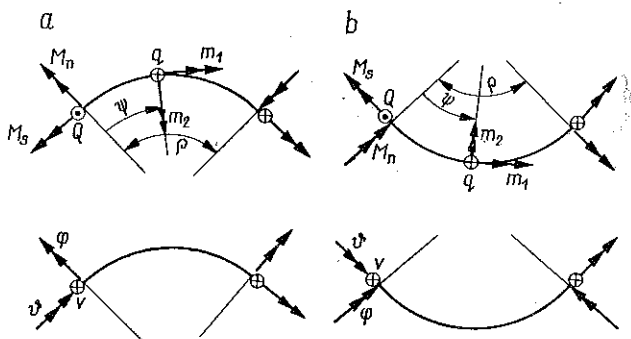
oraz

$$\begin{aligned}
 f(\psi) &= \frac{R^3}{GJ_s} \left\{ -q(\psi) R - m'_2(\psi) - \left(1 + \frac{1}{\mu} \right) g''(\psi) \right\}, \\
 g(\psi) &= \frac{1}{1+\mu} [-q(\psi) R - m'_2(\psi)] \pm m_1(\psi), \\
 (3.4) \quad f_1(\psi) &= \frac{R^3}{GJ_s} \left[\mp q(\psi) R \mp m'_2(\psi) - \left(1 + \frac{1}{\mu} \right) g''_1(\psi) \right], \\
 g_1(\psi) &= \frac{1}{1+\mu} [\mp q(\psi) R \mp m'_2(\psi)] + m_1(\psi), \\
 \mu &= \frac{EJ}{GJ_s}, \quad ()' = \frac{d()}{d\psi},
 \end{aligned}$$

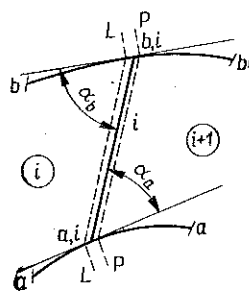
gdzie GJ_s oznacza sztywność przekroju na skręcanie według Saint-Venanta.

Jeżeli jakiś składnik wzorów (3.3) i (3.4) ma znak podwójny, to znak górny odnosi się do przypadku pokazanego na rys. 4a, dolny do przypadku na rys. 4b. Znak pojedynczy odnosi się do obu przypadków.

Należy w tym miejscu zaznaczyć, że macierz F dla pręta kołowego obciążonego liniowo zmiennym obciążeniem q i m_1 podał PETERSEN w pracy [4].



Rys. 4



Rys. 5

Jak już wspomniano, macierz węzła H_i wyraża zależność pomiędzy wektorami stanu w przekrojach po obu stronach poprzecznic i (rys. 5). Dla uzyskania tej zależności należy:

- a) ułożyć równania równowagi węzłów a, i oraz b, i ;
- b) wykorzystać warunek zgodności przemieszczeń tych węzłów.

Po wykonaniu wskazanych działań i przy założeniu, że w obu węzłach znajduje się skupione obciążenie zewnętrzne oraz sprężyste ograniczenia obrotów i przesunięcia, otrzymujemy

$$(3.5) \quad \begin{bmatrix} v \\ \varphi \\ \vartheta \\ M_s \\ M_n \\ Q \\ v^a \\ \varphi \\ \vartheta \\ M_s \\ M_n \\ Q \\ 1^b \end{bmatrix}^P = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1,12} & h_1 \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2,12} & h_2 \\ h_{31} & h_{32} & \dots & h_{3,12} & h_3 \\ h_{41} & h_{42} & \dots & h_{4,12} & h_4 \\ h_{51} & h_{52} & \dots & h_{5,12} & h_5 \\ h_{61} & h_{62} & \dots & h_{6,12} & h_6 \\ \hline h_{71} & h_{72} & \dots & h_{7,12} & h_7 \\ h_{81} & h_{82} & \dots & h_{8,12} & h_8 \\ h_{91} & h_{92} & \dots & h_{9,12} & h_9 \\ h_{10,1} & h_{10,2} & \dots & h_{10,12} & h_{10} \\ h_{11,1} & h_{11,2} & \dots & h_{11,12} & h_{11} \\ h_{12,1} & h_{12,2} & \dots & h_{12,12} & h_{12} \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \varphi \\ \vartheta \\ M_s \\ M_n \\ Q \\ v^a \\ \varphi \\ \vartheta \\ M_s \\ M_n \\ Q \\ 1^b \end{bmatrix}^L,$$

gdzie poszczególne elementy macierzy określone są następująco:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} h_{11} &= h_{22} = \dots = h_{ii} = \dots = h_{12,12} = 1, \\ h_{41} &= -\frac{6EJ}{l^2} \sin \alpha_a, \quad h_{42} = \left(\frac{GJ_s}{l} - \frac{4EJ}{l} \right) \sin \alpha_a \cos \alpha_a, \\ h_{43} &= \frac{GJ_s}{l} \cos^2 \alpha_a + \frac{4EJ}{l} \sin^2 \alpha_a + C_{\vartheta, a}, \\ h_{47} &= \frac{6EJ}{l^2} \sin \alpha_a, \quad h_{48} = -\left(\frac{2EJ}{l} \cos \alpha_b \sin \alpha_a + \frac{GJ_s}{l} \sin \alpha_b \cos \alpha_a \right), \\ h_{49} &= \frac{2EJ}{l} \sin \alpha_b \sin \alpha_a - \frac{GJ_s}{l} \cos \alpha_b \cos \alpha_a, \\ h_{51} &= -\frac{6EJ}{l^2} \cos \alpha_a, \quad h_{52} = -\left(\frac{4EJ}{l} \cos^2 \alpha_a + \frac{GJ_s}{l} \sin^2 \alpha_a + C_{\varphi, a} \right), \\ h_{53} &= \left(\frac{4EJ}{l} - \frac{GJ_s}{l} \right) \sin \alpha_a \cos \alpha_a, \quad h_{57} = \frac{6EJ}{l^2} \cos \alpha_a, \\ h_{58} &= -\frac{2EJ}{l} \cos \alpha_a \cos \alpha_b + \frac{GJ_s}{l} \sin \alpha_a \sin \alpha_b, \\ h_{59} &= \frac{2EJ}{l} \cos \alpha_a \sin \alpha_b + \frac{GJ_s}{l} \cos \alpha_b \sin \alpha_a, \\ h_{61} &= \frac{12EJ}{l^3} + C_{v, a}, \quad h_{62} = \frac{6EJ}{l^2} \cos \alpha_a, \\ h_{63} &= -\frac{6EJ}{l^2} \sin \alpha_a, \quad h_{67} = -\frac{12EJ}{l^3}, \quad h_{68} = \frac{6EJ}{l^2} \cos \alpha_b, \end{aligned}$$

(3.6) [c,d]
$$h_{69} = -\frac{6EJ}{l^2} \sin \alpha_b,$$

$$h_{10,1} = -\frac{6EJ}{l^2} \sin \alpha_b, \quad h_{10,2} = -\left(\frac{2EJ}{l} \cos \alpha_a \sin \alpha_b + \frac{GJ_s}{l} \sin \alpha_a \cos \alpha_b\right),$$

$$h_{10,3} = \frac{2EJ}{l} \sin \alpha_a \sin \alpha_b - \frac{GJ_s}{l} \cos \alpha_a \cos \alpha_b,$$

$$h_{10,7} = \frac{6EJ}{l^2} \sin \alpha_b, \quad h_{10,8} = \left(\frac{GJ_s}{l} - \frac{4EJ}{l}\right) \sin \alpha_b \cos \alpha_b,$$

$$h_{10,9} = \frac{GJ_s}{l} \cos^2 \alpha_b + \frac{4EJ}{l} \sin^2 \alpha_b + C_{\theta, b},$$

$$h_{11,1} = -\frac{6EJ}{l^2} \cos \alpha_b, \quad h_{11,2} = -\frac{2EJ}{l} \cos \alpha_a \cos \alpha_b + \frac{GJ_s}{l} \sin \alpha_a \sin \alpha_b,$$

$$h_{11,3} = \frac{2EJ}{l} \sin \alpha_a \cos \alpha_b + \frac{GJ_s}{l} \cos \alpha_a \sin \alpha_b,$$

$$h_{11,7} = \frac{6EJ}{l^2} \cos \alpha_b, \quad h_{11,8} = -\left(\frac{4EJ}{l} \cos^2 \alpha_b + \frac{GJ_s}{l} \sin^2 \alpha_b + C_{\varphi, b}\right),$$

$$h_{11,9} = \left(\frac{4EJ}{l} - \frac{GJ_s}{l}\right) \sin \alpha_b \cos \alpha_b,$$

$$h_{12,1} = -\frac{12EJ}{l^3}, \quad h_{12,2} = -\frac{6EJ}{l^2} \cos \alpha_a, \quad h_{12,3} = \frac{6EJ}{l^2} \sin \alpha_a,$$

$$h_{12,7} = \frac{12EJ}{l^3} + C_{v, b}, \quad h_{12,8} = -\frac{6EJ}{l^2} \cos \alpha_b, \quad h_{12,9} = \frac{6EJ}{l^2} \sin \alpha_b,$$

$$h_4 = -M''_{s,a} \cos \alpha_a - M''_{n,a} \sin \alpha_a - M_{s,a},$$

$$h_5 = M''_{s,a} \sin \alpha_a - M''_{n,a} \cos \alpha_a - M_{n,a},$$

$$h_6 = Q''_a - P_a,$$

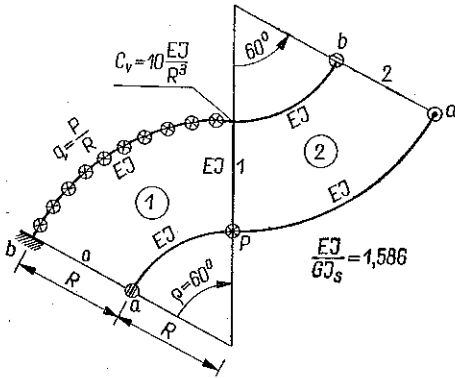
$$h_{10} = M''_{s,b} \cos \alpha_b + M''_{n,b} \sin \alpha_b - M_{s,b},$$

$$h_{11} = M''_{n,b} \cos \alpha_b - M''_{s,b} \sin \alpha_b - M_{n,b},$$

$$h_{12} = -Q''_b - P_b,$$

przy czym symbole $M''_{s,a}$, $M''_{n,a}$, ..., Q''_b oznaczają siły wewnętrzne od obciążenia zewnętrznego w przekrojach skrajnych poprzecznic, traktowanej jako belka obustronnie zamocowana, $M_{s,a}$, $M_{n,a}$, ..., P_b obciążenie zewnętrzne węzłów, $C_{v,a}$, $C_{\varphi,a}$, ..., $C_{\theta,b}$ charakterystyki sprężystych ograniczeń obrotów i przemieszczeń węzłów oraz EJ , GJ_s sztywność na zginanie i skręcanie przekroju poprzecznic.

Nie podane we wzorach (3.6) elementy $h_{i,j}$ oraz h_i macierzy (3.5) są równe zero. Sposób budowania brakującego składnika procesu eliminacji (2.4), mianowicie macierzy H_0 , pokażemy na przykładzie liczbowym.



Rys. 6

4. Przykład liczbowy

Wyznaczyć składowe wektora Z_0^L rusztu przedstawionego na rys. 6.

Zależność pomiędzy wektorami stanu w przekrojach skrajnych ustalona za pomocą (2.4) przyjmuje postać

$$(4.1) \quad Z_2^L = F_2 H_1 F_1 H_0 Z_0^L.$$

W węźle a , o jest przegub liniowy styczny do osi pręta, w węźle b , o całkowite utwierdzenie. W związku z tym wektor Z_0^L będzie wyglądał następująco:

$$(4.2) \quad Z_0^L = \{ \vartheta, M_n, Q \}_a \{ M_s, M_n, Q \}_b \}.$$

Macierz H_0 określa wektor stanu w przekroju na prawo od węzłów początkowych w zależności od wektora Z_0^L , czyli

$$(4.3) \quad Z_0^P = H_0 Z_0^L.$$

Uwzględniając kolejność występowania składowych wektora (2.1), otrzymujemy związek (4.3) napisany w rozszerzonej formie macierzowej

$$(4.4) \quad Z_0^P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta \\ M_n \\ Q \\ \hline M_s^a \\ M_n \\ Q \\ \hline 1^b \end{bmatrix}_o^L.$$

Macierze przesył $F_1 F_2$ budujemy za pomocą macierzy (3.2), której elementy obliczamy ze wzorów (3.3) przy uwzględnieniu (3.4). Elementy macierzy H_1 wyznaczamy na podstawie wzorów (3.6).

Budując poszczególne macierze wygodnie jest stosować nie rzeczywiste wielkości $v, \varphi, \dots, M_n, Q$, ale odpowiadające im wielkości bezwymiarowe $v^*, \varphi^*, \dots, M_n^*, Q^*$, powiązane zależnościami

$$(4.5) \quad v = v^* \frac{\bar{P}l^3}{EJ}, \quad \varphi = \varphi^* \frac{\bar{P}l^2}{EJ}, \quad \vartheta = \vartheta^* \frac{\bar{P}l^2}{EJ},$$

$$Q = Q^* \bar{P}, \quad M_n = M_n^* \bar{P}l, \quad M_s = M_s^* \bar{P}l,$$

gdzie $\bar{P}, \bar{l}, \bar{E}J$ są to dowolne przyjęte wartości porównawcze. Zakładamy, że $\bar{E}J = EJ$, $\bar{l} = R$, $\bar{P} = P$.

Mnożenie macierzy (4.1) wykonano za pomocą maszyny UMC1, otrzymując następujący wynik:

$$(4.6) \quad \tilde{Z}_2^{*L} =$$

	$\{ \vartheta^*, M_n^*, Q_a^*, M_s^*, M_n^*, Q_b^*, 1 \}_0^L$																																																																																												
=	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">0,3700</td><td style="padding: 2px 10px;">-2,912</td><td style="padding: 2px 10px;">-4,228</td><td style="padding: 2px 10px;">12,65</td><td style="padding: 2px 10px;">3,480</td><td style="padding: 2px 10px;">3,052</td><td style="padding: 2px 10px;">-0,7117</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">-1,746</td><td style="padding: 2px 10px;">-2,654</td><td style="padding: 2px 10px;">-3,676</td><td style="padding: 2px 10px;">14,31</td><td style="padding: 2px 10px;">4,520</td><td style="padding: 2px 10px;">3,480</td><td style="padding: 2px 10px;">-0,4965</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">-4,893</td><td style="padding: 2px 10px;">33,52</td><td style="padding: 2px 10px;">9,498</td><td style="padding: 2px 10px;">80,64</td><td style="padding: 2px 10px;">-14,31</td><td style="padding: 2px 10px;">-12,65</td><td style="padding: 2px 10px;">8,822</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">-3,027</td><td style="padding: 2px 10px;">14,84</td><td style="padding: 2px 10px;">4,165</td><td style="padding: 2px 10px;">38,31</td><td style="padding: 2px 10px;">-5,891</td><td style="padding: 2px 10px;">-5,423</td><td style="padding: 2px 10px;">4,086</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">4,057</td><td style="padding: 2px 10px;">-12,91</td><td style="padding: 2px 10px;">-2,772</td><td style="padding: 2px 10px;">-42,98</td><td style="padding: 2px 10px;">3,086</td><td style="padding: 2px 10px;">3,565</td><td style="padding: 2px 10px;">-3,918</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">3,000</td><td style="padding: 2px 10px;">-11,59</td><td style="padding: 2px 10px;">-3,521</td><td style="padding: 2px 10px;">-32,42</td><td style="padding: 2px 10px;">4,145</td><td style="padding: 2px 10px;">4,293</td><td style="padding: 2px 10px;">-3,627</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">1,144</td><td style="padding: 2px 10px;">-3,746</td><td style="padding: 2px 10px;">-1,416</td><td style="padding: 2px 10px;">-12,25</td><td style="padding: 2px 10px;">-1,317</td><td style="padding: 2px 10px;">-2,296</td><td style="padding: 2px 10px;">2,309</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">3,252</td><td style="padding: 2px 10px;">-9,705</td><td style="padding: 2px 10px;">-3,746</td><td style="padding: 2px 10px;">-40,24</td><td style="padding: 2px 10px;">3,106</td><td style="padding: 2px 10px;">1,805</td><td style="padding: 2px 10px;">0,2126</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">-1,173</td><td style="padding: 2px 10px;">-0,5159</td><td style="padding: 2px 10px;">-0,0291</td><td style="padding: 2px 10px;">0,8037</td><td style="padding: 2px 10px;">8,842</td><td style="padding: 2px 10px;">3,960</td><td style="padding: 2px 10px;">0,1740</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">0,0272</td><td style="padding: 2px 10px;">-3,253</td><td style="padding: 2px 10px;">-1,144</td><td style="padding: 2px 10px;">-13,75</td><td style="padding: 2px 10px;">9,336</td><td style="padding: 2px 10px;">5,846</td><td style="padding: 2px 10px;">-1,545</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">-4,057</td><td style="padding: 2px 10px;">13,91</td><td style="padding: 2px 10px;">5,370</td><td style="padding: 2px 10px;">58,32</td><td style="padding: 2px 10px;">-15,23</td><td style="padding: 2px 10px;">-11,73</td><td style="padding: 2px 10px;">4,811</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">-3,000</td><td style="padding: 2px 10px;">11,59</td><td style="padding: 2px 10px;">4,521</td><td style="padding: 2px 10px;">50,13</td><td style="padding: 2px 10px;">-19,32</td><td style="padding: 2px 10px;">-15,73</td><td style="padding: 2px 10px;">7,536</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td> </tr> </table>	0,3700	-2,912	-4,228	12,65	3,480	3,052	-0,7117	-1,746	-2,654	-3,676	14,31	4,520	3,480	-0,4965	-4,893	33,52	9,498	80,64	-14,31	-12,65	8,822	-3,027	14,84	4,165	38,31	-5,891	-5,423	4,086	4,057	-12,91	-2,772	-42,98	3,086	3,565	-3,918	3,000	-11,59	-3,521	-32,42	4,145	4,293	-3,627	1,144	-3,746	-1,416	-12,25	-1,317	-2,296	2,309	3,252	-9,705	-3,746	-40,24	3,106	1,805	0,2126	-1,173	-0,5159	-0,0291	0,8037	8,842	3,960	0,1740	0,0272	-3,253	-1,144	-13,75	9,336	5,846	-1,545	-4,057	13,91	5,370	58,32	-15,23	-11,73	4,811	-3,000	11,59	4,521	50,13	-19,32	-15,73	7,536	0	0	0	0	0	0	1	=
0,3700	-2,912	-4,228	12,65	3,480	3,052	-0,7117																																																																																							
-1,746	-2,654	-3,676	14,31	4,520	3,480	-0,4965																																																																																							
-4,893	33,52	9,498	80,64	-14,31	-12,65	8,822																																																																																							
-3,027	14,84	4,165	38,31	-5,891	-5,423	4,086																																																																																							
4,057	-12,91	-2,772	-42,98	3,086	3,565	-3,918																																																																																							
3,000	-11,59	-3,521	-32,42	4,145	4,293	-3,627																																																																																							
1,144	-3,746	-1,416	-12,25	-1,317	-2,296	2,309																																																																																							
3,252	-9,705	-3,746	-40,24	3,106	1,805	0,2126																																																																																							
-1,173	-0,5159	-0,0291	0,8037	8,842	3,960	0,1740																																																																																							
0,0272	-3,253	-1,144	-13,75	9,336	5,846	-1,545																																																																																							
-4,057	13,91	5,370	58,32	-15,23	-11,73	4,811																																																																																							
-3,000	11,59	4,521	50,13	-19,32	-15,73	7,536																																																																																							
0	0	0	0	0	0	1																																																																																							
		$\left\{ \begin{matrix} 0 \\ \varphi^* \\ \vartheta^* \\ 0 \\ 0 \\ Q^* \\ 0^a \\ \varphi^* \\ 0 \\ M_s^* \\ 0 \\ Q_b^* \\ 1 \end{matrix} \right\}_2^L$																																																																																											

W węźle $a, 2$ jest podpora przegubowa punktowa, w węźle $b, 2$ natomiast przegub liniowy prostopadły do osi pręta. Wobec tego

$$v_a^* = 0, \quad M_{s,a}^* = 0, \quad M_{n,a}^* = 0, \quad v_b^* = 0, \quad \vartheta_b^* = 0, \quad M_{n,b}^* = 0.$$

Wykorzystując te warunki oraz wynik mnożenia macierzy (4.6) otrzymujemy układ równań [podkreślone wiersze w (4.6)], po rozwiązaniu którego mamy

$$\vartheta_a^* = 0,5280, \quad M_{n,a}^* = -0,3321, \quad Q_a^* = 0,7851,$$

$$M_{s,b}^* = 0,0728, \quad M_{n,b}^* = -0,5291, \quad Q_b^* = 1,241.$$

Przechodząc do wielkości rzeczywistych otrzymujemy poszukiwany wektor Z_0^L w następującej postaci:

$$Z_0^L = \left\{ \begin{matrix} 0,528 \frac{PR^3}{EJ}, & -0,3321 PR, & 0,7851 P \Big|_a, \\ & 0,0728 PR, & -0,5291 PR, & 1,241 P \Big|_b \end{matrix} \right\}.$$

Literatura cytowana w tekście

1. Z. KĄCZKOWSKI, M. ŻYBURTOWICZ (jr), *Rozwiązywanie rusztów płaskich o prętach zakrzywionych*, Arch. Inżyn. Łądown., 3, 8 (1962), 283.
2. G. RAKOWSKI, *Zastosowanie macierzy przeniesienia do analizy statycznej łuków kołowych*, Arch. Inżyn. Łądown., 2, 13 (1967), 225—236.
3. G. RAKOWSKI, R. SOLECKI, *Pręty zakrzywione. Obliczenia statyczne*, Arkady, Warszawa 1965.
4. CH. PETERSEN, *Das Verfahren der Übertragungsmatrizen für gekrümmte Träger*, Der Bauingenieur, 3, 41 (1966) 98—102.

Резюме

МАТРИЧНЫЙ СТАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКИХ КРУГОВЫХ РОСТВЕРКОВ

В работе обсуждается применение метода матричного переноса, к статическому анализу, произвольно опертого на концах и упруго на посредственных узлах и произвольно нагруженного ростверка. Строятся основные матрицы, необходимые для проведения расчетов. Несложные систематические исчисления проводятся без труда, на счетных машинах.

Summary

MATRIX STATIC ANALYSIS OF PLANE CIRCULAR GRIDS

Application of the method of transfer matrix is described for the static analysis of a grid arbitrarily supported on its ends and elastically in intermediate nodes, arbitrarily loaded. The basic matrices essential for making calculations have been constructed.

Simple, systemized calculations can be readily performed by means of computers.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 października 1969 r.