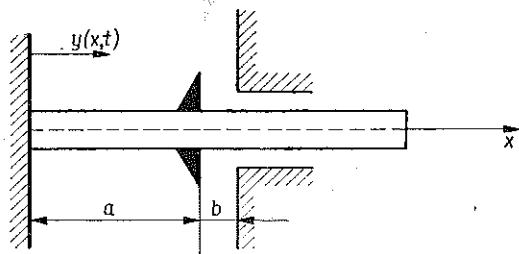


DRGANIA UDERZENIOWE PRĘTÓW

CZESŁAW CEMPEL (POZNAŃ)

1. Zagadnienie pracy mechanizmów i maszyn przy okresowych obciążeniach impulsowych występuje w wielu dziedzinach techniki. Obciążenia te mają na ogół charakter uderzeniowy i mogą występować jako celowo wprowadzone, jak np. wbijanie pali, wibruderzeniowe wiercenie otworów [1], praca ogranicznika drgań wirującego wału [2] itp, oraz jako obciążenia szkodliwe, jak np. przy pracy przekładni zębatych. Modelem większości wspomnianych mechanizmów może być pręt drgający podłużnie, skrętnie lub poprzecznie pod wpływem okresowego obciążenia udarowego. Z tego też względu wyłania się konieczność analizy drgań uderzeniowych prętów. W niniejszej pracy rozpatrzono problem drgań własnych uderzeniowych, wynikających z ograniczenia ruchu pręta sztywną przegrodą. Ponieważ rozwiązanie zagadnienia wprost z równania różniczkowego wymaga zdefiniowania siły uderzeniowej, co jak dotychczas autorowi nie jest znane, w pracy posłużono się metodą dopasowywania rozwiązań. Przy czym założono, że przy zderzeniu nie zachodzą straty energii, a czas trwania jego jest nieskończenie mały. Ze względu na analogie drgań uderzeniowych podłużnych, skrętnych i poprzecznych prętów obliczenia zasadnicze przeprowadzono dla drgań podłużnych wskazując jedynie, gdzie należy, na ich różnice.

2. Rozważmy pręt drgający podłużnie i napotykający w swym ruchu sztywną przegrodę (rys. 1). Niech okresowe zderzenia z przegrodą następują w przekroju pręta $x=a$, odległość zaś przegrody od



Rys. 1

położenia równowagi statycznej przekroju wynosi $y(a, 0)=b$. Znak b będziemy przyjmować jako dodatni, jeśli między przegrodą a przekrojem $x=a$ istnieje luz, a ujemny, jeśli przekrój $x=a$ jest dociskany do przegrody z siłą wywołującą odkształcenie o wielkości $y(a, 0)=b < 0$.

Równanie drgań pręta w przedziale czasu między uderzeniami napisane we współrzędnych bezwymiarowych $z=x/l$ ma postać

$$(2.1) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho l^2} \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = 0, \quad y=y(z, t), \quad 0_+ \leq t \leq T_-,$$

gdzie $y(z, t)$ oznacza przemieszczenie podłużne, E moduł Younga, ρ gęstość masy, l długość pręta, T czas między kolejnymi zderzeniami o przegrodę przy $z=a/l=\zeta$.

Jeśli analizę ruchu zaczniemy po kolejnym zderzeniu pręta z przegrodą, to warunki początkowe i graniczne zagadnienia mogą mieć postać

$$(2.2) \quad \begin{aligned} y(z, 0_+) &= \varphi(z), & \dot{y}(z, 0_+) &= \psi(z), \\ y(\zeta, 0_+) &= \varphi(\zeta) = b, & \dot{y}(\zeta, 0_+) &= \psi(\zeta) = -V. \end{aligned}$$

Rozwiązując równanie (2.1) można posłużyć się rozkładem $y(z, t)$ w szereg, według funkcji własnych zagadnienia $X_n(z)$. Wtedy przy dowolnych warunkach brzegowych mamy

$$(2.3) \quad y(z, t) = \sum_{n=0,1} X_n(z) \left[A_n \cos \omega_n t - \frac{B_n}{\omega_n} \sin \omega_n t \right], \quad 0_+ \leq t \leq T_-,$$

gdzie A_n i B_n są współczynnikami rozkładu przyjętych warunków początkowych (2.2), a funkcje własne $X_n(z)$ spełniają zależność otrzymaną po wstawieniu (2.3) do (2.1):

$$(2.4) \quad X_n''(z) = -\beta_n^2 X_n(z), \quad \beta_n^2 = \frac{\omega_n^2 l^2 \rho}{E}, \quad \omega_n = \frac{\beta_n}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Znając warunki brzegowe zagadnienia z równań (2.4) można jednoznacznie określić funkcje własne i wartości własne β_n i ω_n .

Ruch przekroju pręta $z=\zeta$ w przedziale między zderzeniami na podstawie (2.3) można przedstawić w postaci

$$(2.5) \quad \begin{aligned} y(\zeta, t) &= \sum_{n=0,1,\dots} X_n(\zeta) \left[A_n \cos \omega_n t - \frac{B_n}{\omega_n} \sin \omega_n t \right], \\ \dot{y}(\zeta, t) &= - \sum_{n=0,1,\dots} X_n(\zeta) [\omega_n A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t], \end{aligned} \quad 0_+ \leq t \leq T_-.$$

Po czasie $t=T$ przekrój ten ponownie osiągnie w swym ruchu przegrodę, a jego przemieszczenie i prędkość przed zderzeniem będą następujące

$$(2.6) \quad \begin{aligned} y(\zeta, T)^a &= \sum X_n(\zeta) \left[A_n \cos \omega_n T - \frac{B_n}{\omega_n} \sin \omega_n T \right], \\ \dot{y}(\zeta, T)^a &= - \sum X_n(\zeta) [\omega_n A_n \sin \omega_n T + B_n \cos \omega_n T]. \end{aligned}$$

Symbolem a znaczymy odpowiednie wielkości przed uderzeniem, a p — po uderzeniu.

Przy założeniu zderzeń doskonale sprężystych i wynikającej stąd okresowości ruchu parametry przekroju $z=\zeta$ przed i po uderzeniu muszą spełniać warunki

$$(2.7) \quad \begin{aligned} y(\zeta, T)^a &= y(\zeta, T)^p = y(\zeta, 0_+) = b, \\ \dot{y}(\zeta, T)^a &= -\dot{y}(\zeta, T)^p = -\dot{y}(\zeta, 0_+) = V. \end{aligned}$$

Ponieważ na podstawie (2.5) i warunków granicznych (2.2) mamy

$$(2.8) \quad \begin{aligned} b = \varphi(\zeta) = y(\zeta, 0_+) &= \sum X_n(\zeta) A_n, \\ V = -\psi(\zeta) = -\dot{y}(\zeta, 0_+) &= \sum X_n(\zeta) B_n, \end{aligned}$$

to biorąc pod uwagę (2.6) otrzymamy

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \sum X_n(\zeta) \left[A_n(1 - \cos \omega_n T) + \frac{B_n}{\omega_n} \sin \omega_n T \right] &= 0, \\ \sum X_n(\zeta) [B_n(1 + \cos \omega_n T) + \omega_n A_n \sin \omega_n T] &= 0. \end{aligned}$$

Ostatnie dwie równości określają warunki okresowości ruchu przekroju pręta $z = \zeta$. Mogą one być spełnione jedynie wówczas, gdy ruch całego pręta będzie okresowy, a więc wtedy, gdy równania (2.9) będą spełnione dla każdego $0 \leq z \leq 1$. Należy tu zaznaczyć, że gdyby dla pewnego $n = m$, $X_m(\zeta) = 0$, to ruch pręta będzie nadal okresowy, z tym że współczynniki rozkładu m -tego rzędu drgań nie będą musiały spełniać warunku (2.11). Wartości ich będą wynikały wówczas z założonych warunków początkowych ruchu. Biorąc pod uwagę powyższe z (2.9) mamy:

$$\begin{aligned} \sum X_n(z) \left[A_n(1 - \cos \omega_n T) + \frac{B_n}{\omega_n} \sin \omega_n T \right] &= 0, \\ \sum X_n(z) [B_n(1 + \cos \omega_n T) + \omega_n A_n \sin \omega_n T] &= 0. \end{aligned}$$

Spełnienie ostatniego warunku wymaga, aby dla każdego n

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \omega_n A_n(1 - \cos \omega_n T) + B_n \sin \omega_n T &= 0, \\ B_n(1 + \cos \omega_n T) + \omega_n A_n \sin \omega_n T &= 0. \end{aligned}$$

Łatwo zauważyć, że nieskończone układy równań (2.10) są równoważne jednemu układowi

$$(2.11) \quad B_n = -\omega_n A_n \operatorname{tg} \frac{\pi \omega_n}{\eta}, \quad \eta = \frac{2\pi}{T}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

gdzie przez η oznaczyliśmy częstość swobodnych drgań uderzeniowych. Równania (2.11) są analogiczne do równania częstości układu wibrouderzeniowego o jednym stopniu swobody [3] z tym zastrzeżeniem, że obecnie musi ono być spełnione dla każdej postaci drgań $n = 0, 1, \dots$. Jeśli przez W_n oznaczymy wartość bezwzględną bezwymiarowej prędkości drgań dla n -tego rzędu, to z (2.11) otrzymamy

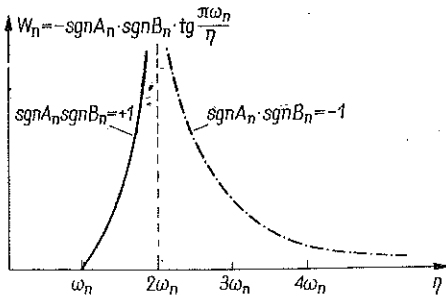
$$(2.12) \quad W_n = -\operatorname{sgn} H_n \operatorname{sgn} B_n \operatorname{tg} \frac{\pi \omega_n}{\eta}, \quad W_n = \frac{|B_n|}{\omega_n |A_n|}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Zależność ta przedstawiona jest na rys. 2.

Z wykresu wynika, że z wyjątkiem wartości $\eta = 2\omega_n$ częstość drgań uderzeniowych determinuje bezwymiarową prędkość drgań W_n każdego rzędu drgań pręta, lecz nie określa bezpośrednio jego postaci drgań. Jeśli jednak weźmiemy pod uwagę, że parametry zderzenia określają warunki graniczne (2.2) i (2.8) w połączeniu z zależnością (2.11), to będziemy mieli

$$(2.13) \quad b = \sum X_n(\zeta) A_n, \quad V = \sum X_n(\zeta) B_n,$$

$$B_n = -\omega_n A_n \operatorname{tg} \frac{\pi\omega_n}{\eta}, \quad n=0, 1, \dots$$



Rys. 2

były spełniały warunki brzegowe, a drganiami uderzeniowymi, gdzie oprócz warunków brzegowych funkcje $\varphi(z)$ i $\psi(z)$ muszą spełniać (2.13) za pośrednictwem swych współczynników rozkładu A_n i B_n , wynoszących odpowiednio

$$(2.14) \quad A_n = \frac{\int_0^1 \varphi(z) X_n(z) dz}{\int_0^1 X_n^2(z) dz}, \quad B_n = \frac{-\int_0^1 \psi(z) X_n(z) dz}{\int_0^1 X_n^2(z) dz}.$$

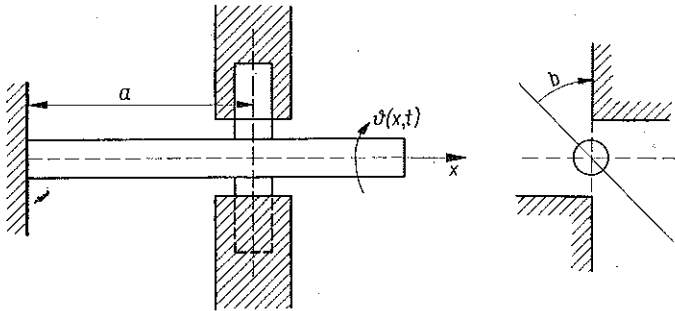
Procedura obliczania częstości η w zależności od warunków początkowych $\varphi(z)$ i $\psi(z)$ może być różna, zależna od danych wyjściowych. Najprostszy sposób polega na założeniu warunku początkowego i granicznego dla przemieszczenia $y(z, 0) = \varphi(z)$ i $\varphi(\zeta) = b$ oraz częstości drgań uderzeniowych η . Następnie z (2.13) określamy współczynniki rozkładu prędkości początkowej B_n i wartość prędkości uderzenia V , przy której możliwe są drgania o częstości η . Możliwa jest również do zastosowania inna procedura: mając dany początkowy rozkład amplitud pręta $y(z, 0) = \varphi(z)$ i prędkość uderzenia obliczamy z (2.14) współczynniki A_n , a następnie z dwu ostatnich równań (2.13) znajdujemy metodą kolejnych przybliżeń częstość drgań uderzeniowych oraz współczynniki rozkładu prędkości B_n .

Znając zależności częstości drgań uderzeniowych η od warunków początkowych, granicznych i brzegowych można określić ruch pręta w przedziale między uderzeniami. Uwzględniając (2.3) i (2.13) po przekształceniach znajdziemy

$$\begin{aligned}
 y(z, t) &= \sum X_n(z) \sqrt{A_n^2 \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi \omega_n}{\eta}\right)} \cos(\omega_n t - \theta_n), \\
 \dot{y}(z, t) &= - \sum X_n(z) \omega_n \sqrt{A_n^2 \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi \omega_n}{\eta}\right)} \sin(\omega_n t - \theta_n), \\
 \operatorname{tg} \theta_n &= \frac{B_n}{A_n \omega_n} = - \operatorname{tg} \frac{\pi \omega_n}{\eta}, \quad \theta_n = \pi - \frac{\pi \omega_n}{\eta}.
 \end{aligned}
 \tag{2.15}$$

Pierwszy z powyższych związków określa postać przemieszczenia przy drganiach uderzeniowych, skąd można obliczyć bardzo ważne niejednokrotnie siły i naprężenia w dowolnym przekroju pręta. Drugi zaś określa prędkość dowolnego przekroju pręta w czasie między dwoma kolejnymi uderzeniami.

3. Identyczne rozumowanie i obliczenia prawdziwe są w przypadku swobodnych drgań uderzeniowych skrętnych prętów o przekroju kołowym, rys. 3.



Rys. 3

Równanie drgań dla przedziału pomiędzy uderzeniami ma tu postać

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} - \frac{G}{\rho l^2} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} = 0, \quad \vartheta = \vartheta(z, t), \quad z = \frac{x}{l}, \quad 0_+ \leq t \leq T_-,
 \tag{3.1}$$

gdzie $\vartheta(z, t)$ jest kątem skręcenia przekroju, mierzonym od położenia równowagi statycznej, a G modułem odkształcenia postaciowego. Aby w przypadku drgań skrętnych korzystać z wyżej wyprowadzonych zależności, należy we wzorach (2.1)-(2.15) wielkości liniowe zamienić na odpowiednie kątowe, np. $y(z, t) \rightarrow (\vartheta(z, t))$

itp. a $\beta_n^2 = \frac{\rho l^2 \omega_n^2}{G}$, $\omega_n^2 = \frac{\beta_n}{l} \sqrt{\frac{G}{\rho}}$. Sens fizyczny tych wielkości liniowych jak i kątowych w obu przypadkach jest taki sam. Potrzebę analizy uderzeniowych drgań skrętnych najlepiej zilustrować na przykładzie wału napędzającego przekładnię zębatą. Na skutek nieuniknionych luzów w przekładni wał pobudzany będzie ciągiem impulsów uderzeniowych o częstości wynikającej z prędkości kątowej jego obrotu i ilości zębów przekładni. Jeśli częstość ta będzie bliska podwójonej wartości jednej z częstości własnych $\eta = 2\omega_n$, to jak łatwo zauważyć z rys. 2 i wzoru (2.15) przemieszczenia kątowe i chwilowe momenty skręcające wału mogą przyjąć bardzo duże wartości.

4. W podobny sposób można przeprowadzić analizę swobodnych drgań uderzeniowych poprzecznych, gdzie okresowe zderzenia z przegrodą mogą zachodzić np. w układzie przedstawionym na rys. 4.

Równanie drgań poprzecznych pręta dla przedziału między uderzeniami ma postać

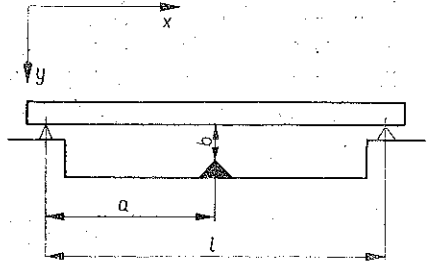
$$(4.1) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{EI}{\rho A l^4} \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} = 0, \quad y = y(z, t), \quad z = \frac{x}{l}, \quad 0_+ \leq t \leq T_-,$$

gdzie $y(z, t)$ jest ugięciem, J momentem bezwładności przekroju względem osi obojętnej, a A polem przekroju pręta.

Po podstawieniu rozkładu linii ugięcia $y(z, t)$ w szereg (2.3) otrzymamy równanie różniczkowe na wyznaczenie postaci funkcji własnych i wartości własnych pręta:

$$(4.2) \quad X_n^{IV}(z) - k_n^4 X_n(z) = 0, \quad k_n^4 = \frac{\rho A l^4 \omega_n^2}{EI},$$

$$\omega_n = \frac{k_n^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}.$$



Rys. 4

Znając konkretne warunki brzegowe danego pręta z (4.2), znajdujemy funkcje

własne $X_n(z)$, wartości własne k_n i częstości własne ω_n . Jak łatwo zauważyć, analiza poprzecznych drgań uderzeniowych swobodnych jest identyczna z analizą drgań podłużnych (2.1)–(2.15) z tym zastrzeżeniem, że funkcje własne i wartości własne zamiast ze wzoru (2.4) należy obliczyć z formuły (4.1).

5. W celu ilustracji powyższych rozważań rozpatrzmy pręt o długości l zamocowany w przekroju $z=0$, a swobodny na końcu $z=l$, drgający podłużnie i uderzający z częstością η swym końcem $z=l$ w sztywną przegrodę. Niech warunki początkowe dla przemieszczenia po odbiciu pręta opisane będą funkcją $\varphi(z) = zb$, $b > 0$. Należy znaleźć prędkość uderzenia i rozkład amplitud możliwy w naszym ruchu uderzeniowym o częstości η . Funkcje i wartości własne pręta wynoszą odpowiednio

$$(5.1) \quad X_n(z) = \sin \beta_n z, \quad \beta_n = \frac{2n+1}{2} \pi, \quad \omega_n = \frac{\beta_n}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad n=0, 1, 2, \dots,$$

a współczynniki rozkładu przemieszczenia A_n i prędkości B_n obliczone na podstawie (2.13)–(2.14) mają postać

$$(5.2) \quad A_n = \frac{8b(-1)^n}{\pi^2(2n+1)^2}, \quad B_n = \frac{4b(-1)^n}{\pi l(2n+1)} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \operatorname{tg} \left(\pi - \frac{\pi \omega_n}{\eta} \right), \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Poszukiwana wartość prędkości uderzenia V i postać drgań będą odpowiednio

$$(5.3) \quad V = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(1) B_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4b}{\pi l(2n+1)} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \operatorname{tg} \left(\pi - \frac{\pi \omega_n}{\eta} \right)$$

oraz

$$(5.4) \quad y(z, t) = \frac{8b}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \beta_n z}{(2n+1)^2} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi \omega_n}{\eta}} \cos(\omega_n t - \theta_n), \quad \theta_n = \pi - \frac{\pi \omega_n}{\eta},$$

$$0_+ \leq t \leq T_+.$$

Przyjmując dla pręta konkretne stałe materiałowe i wartość liczbową częstości η , można z (5.3) obliczyć prędkość uderzenia o przegrodę V i rozkład amplitud drgań oraz siły i naprężenia w przecię.

Zauważmy, że w rozpatrywanym przypadku dla $b \neq 0$ i prędkości uderzenia $V < \infty$ częstość drgań uderzeniowych może przyjmować wszystkie wartości z wyjątkiem $\eta = 2\omega_n = 2(2n+1)\omega_0$, $\omega_0 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$. Jeśli natomiast $b = 0$, to $A_n = 0$, $n = 0, 1, \dots$ i $\eta = 2\omega_n$, a postacie drgań przy założeniu o braku strat energii w układzie są nieokreślone, dowolne tak jak przy drganiach swobodnych pręta. Warto w tym miejscu zwrócić uwagę, że ogólne wnioski wyprowadzone na przykładzie drgań podłużnych są w pełni prawdziwe dla drgań uderzeniowych poprzecznych i skrętnych.

6. Z powyższych rozważań wynika, że drgania swobodne uderzeniowe prętów mogą zachodzić przy każdej wartości luzu b . Z wyjątkiem wartości $b = 0$, częstość drgań uderzeniowych determinuje za pomocą wzoru (2.13) zbiór funkcji, które mogą być postaciami drgań uderzeniowych. Dla $b = 0$ postacie drgań są dowolne, a częstość drgań może przyjąć jedną z wartości $\eta = 2\omega_n$. Przedstawiona w pracy metoda odwrotna wymaga znajomości dwu wielkości: funkcji rozkładu amplitudy $\varphi(z)$ oraz prędkości uderzenia V lub częstości drgań uderzeniowych η , a więc jednej funkcji i jednej liczby, podczas gdy w każdym zagadnieniu początkowym drgań wymagana jest znajomość dwu funkcji.

Literatura cytowana w tekście

1. В. А. Остапенко, *Механические виброударные системы*, Наукова Думка, Киев 1966.
2. Н. В. Григорев, *Нелинейные колебания элементов машин и сооружений*, МАШГИЗ, Москва 1961.
3. Cz. SEMPEL, *Linearyzacja sił sprężystych w układzie wibrouderzeniowym*, Róznr. Inżyn., 3, 17 (1969).

Резюме

УДАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ

В работе рассматриваются свободные ударные колебания прямых стержней, при предположении отсутствия потерь энергии, во время столкновения сечений стержня с жестким ограничителем. Применяя метод припасовки решений, получены зависимости между параметрами удара стержня и частотой его колебания. Определяются, также, формы перемещений и скоростей движения.

Summary

IMPACT VIBRATIONS OF RODS

In this paper are examined free impact vibrations of rods. In calculation, perfect elastical percussion of the section of the rod with rigid stop is assumed. Next, by means of the adaptation of the solutions method the dependence of the frequency of free impact vibration on the percussion parameters of the rod is obtained. Further, the displacement and velocity from of vibrations of the rod are given.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 czerwca 1969 r.
