

DYNAMIKA POWŁOK LEPKOPLASTYCZNYCH

TOMASZ WIERZBICKI (WARSZAWA)

CZEŚĆ PIERWSZA: TEORIA

1. WSTĘP

Cel pracy. Ostatnie lata przyniosły szybki rozwój technik obliczeniowych w zagadnieniach dynamicznych dla ośrodków niesprężystych. Opracowano metody numerycznego całkowania równań różniczkowych cząstkowych o więcej niż dwu zmiennych niezależnych [2 i 9], rozwiązano szereg płaskich i osiowo-symetrycznych problemów brzegowych dla ośrodków sprężysto-plastycznych [5 i 94] oraz sprężysto-lepkoplastycznych [3 i 48]. Podobne efektywne metody różnicowe zaproponowane zostały dla konstrukcji cienkościennych o dowolnym kształcie [38 i 96]. Badaniom tym w mniejszym stopniu towarzyszyły studia nad opracowaniem odpowiednich metod analitycznych, które pozwoliłyby stosunkowo prosto wyznaczać podstawowe parametry procesu dynamicznego.

Analizując dotychczasowe osiągnięcia w tej dziedzinie należy stwierdzić, że brak jest w literaturze efektywnej, a jednocześnie prostej teorii opisującej zachowanie się lepkoplastycznych konstrukcji pod działaniem obciążeń dynamicznych. Celem obecnej pracy jest zbudowanie takiej ogólnej teorii, przedyskutowanie jej wad i zalet, rozwiązanie kilku reprezentatywnych problemów brzegowych oraz konfrontacja wyników z danymi doświadczalnymi. Konieczność podjęcia badań w tym kierunku wypływa z faktu, że szereg ważnych materiałów konstrukcyjnych wykazuje efekty lepkie przy nagłych intensywnych obciążeniach. We współczesnej technice występuje niejednokrotnie potrzeba dynamicznej analizy całej konstrukcji lub jej elementów. Za przykład posłużyć mogą problemy kształtowania elementów metodą wybuchową, elektroiskrową czy indukcyjną, zagadnienia zbadania, przewidywania i zapobiegania skutkom katastrofalnym obciążeń występujących przy uderzeniach pocisków, zderzeniach pojazdów, niszcącym działaniu wybuchów. Ostatnio zwrócono uwagę na rolę efektów dynamicznych w okrętownictwie w związku z występowaniem zjawiska uderzenia kadłuba statku, tzw. slammingu, o wodę powodującego lokalne plastyczne zniszczenie poszycia [27 i 71].

W szczególności największe trudności napotyka się przy rozpatrywaniu stanu giętno-membranowego w powłokach oraz płytach przy dużych ugięciach. Zamierzeniem obecnej pracy jest podanie analitycznej metody wyznaczania ugięć i prędkości

ugięć w konstrukcjach lepkoplastycznych w każdej chwili rozpatrywanego procesu dynamicznego. Metoda ta charakteryzuje się podobnym stopniem prostoty, jaki uzyskano w odpowiedniej teorii dla ciał sztywno-idealnie plastycznych. Proponowana droga do osiągnięcia tego celu jest jednak nieco odmienna. Zamiast odcinkowo-liniowego warunku plastyczności i stowarzyszonego prawa płynięcia wprowadza się gładką, początkową powierzchnię plastyczności łącznie z niestowarzyszonym prawem płynięcia. Prowadzi to do całkowitej linearyzacji równań płynięcia dla powłok, co w efekcie umożliwia uzyskanie rozwiązań dla szerokiej klasy problemów brzegowych i przedyskutowanie wpływu szeregu parametrów mechanicznych i geometrycznych na wielkość i kształt ugięć konstrukcji.

Jako uzupełnienie ogólnej teorii podana jest również w pracy metoda pozwalająca oszacować maksymalne trwałe deformacje ciał lepkoplastycznych oraz czas trwania procesu. Zaletą tej metody jest możliwość natychmiastowej oceny wspomnianych wielkości bez konieczności odwoływania się do szczegółów rozwiązania analitycznego lub numerycznego.

Zakres pracy. Rozpatrywane będą takie typy cienkościennych konstrukcji, w których stan naprężenia realizowany pod wpływem obciążeń dynamicznych może być aproksymowany przez *plaski stan naprężenia*. W klasie tej znajdują się więc ustroje uplastyczniające się w dwuosiowym stanie naprężenia, tzn. powłoki, płyty i membrany.

W powyższym rozumieniu nie wchodzi w zakres tego opracowania zagadnienia prowadzące do jednoosiowego stanu naprężenia, a więc pręty ściskane, rozciągane i skręcane, struny, pierścienie, kule, belki i inne tzw. konstrukcje proste (simple structures). Problemy te nie przedstawiają specjalnych trudności matematycznych, zbadane zostały dość szczegółowo i posiadają już bogatą literaturę. Przegląd najważniejszych wyników w zakresie dynamicznych problemów dla lepkoplastycznych ciał w jednoosiowym stanie naprężenia znaleźć można w pracach SYMONDSA [73] oraz monografii [11]. Niektóre nowsze wyniki podane są w pracy [97].

Odnośnie do stanu odkształcenia przyjmuje się w pracy stosowalność hipotezy Love'a-Kirchhoffa. Umożliwia to analizę deformacji konstrukcji w zakresie małych i umiarkowanie dużych ugięć. Ostatnio prowadzone są intensywne prace w kierunku opracowania teorii dużych odkształceń sztywno-plastycznych powłok w opisie przestrzennym i Lagrange'a [16, 66 i 67]. Większość wyników tych prac przenieść można bez zmian na przypadek konstrukcji z materiału lepkoplastycznego nieściśliwego. Szczegółowa dyskusja założeń upraszczających przedstawiona jest w rozdziałach 4 i 7.

Ograniczenie rozważań do *umiarkowanie dużych ugięć* konstrukcji pozwala na uzyskanie prostych wyników analitycznych bez konieczności odwoływania się do metod numerycznych. Przedstawiona tu teoria nie pozwala na uwzględnienie zagadnień *dynamicznej niestateczności konstrukcji*, powstających przy obciążeniach typu horyzontalnego (w płaszczyźnie konstrukcji), ponieważ zlinearyzowane prawo płynięcia nie jest w stanie dokładnie opisać lokalnych deformacji związanych z utratą stateczności. Niektóre ciekawe wyniki dla lepkoplastycznych powłok cylindrycznych podali FLORENCE [20] WOJEWÓDZKI [98].

Wreszcie wykluczone będą z podanych w tej pracy rozważań *zagadnienia propagacji fal* w konstrukcjach sprężysto-lepkoplastycznych. Wiąże się to z pominięciem odkształceń ścinających i wyrazów bezwładności obrotu. W przypadku uwzględnienia tych efektów zmieniłyby się zarówno typ równania rządzącego procesem jak i charakter przenoszenia zaburzeń. Naprężenia propagowałyby się wówczas jako podłużna fala ścinania i poprzeczna fala giętna. Rozwiązywanie problemów brzegowych dla równań typu hiperbolicznego wymaga stosowania innych metod matematycznych, np. metody całkowania wzdłuż charakterystyk, metody kolejnych przybliżeń itd. Występowanie zjawisk wielokrotnych odbić fal sprężysto-plastycznych od brzegów i nakładania się fal z góry skazuje poszukiwanie rozwiązań analitycznych na niepowodzenie; pozostaje zatem jedynie droga obliczeń numerycznych.

Rozprzestrzenianie się sprężysto-lepkoplastycznych fal w belce Timoszenki badał BEJDA [4]; sformułowanie odpowiednich równań dla płyt podał NIKITIN [49]. Problem falowy w konstrukcjach uplastyczniających się w złożonym stanie naprężenia jest jeszcze mało zbadany.

Natomiast w przedstawionej tutaj teorii uwzględniającej inercję ruchu poprzecznego występuje konieczność rozpatrzenia zagadnień drgań sprężystych. Wiadomo, że proces drgań sprężystych nakładający się na postępujące odkształcenia plastyczne konstrukcji jest bardzo istotny i zagadnieniu temu poświęcone będzie dużo uwagi w następnym rozdziale tej pracy.

Wybór modelu materiału. Ten punkt pracy zawiera pewne ogólne spostrzeżenia dotyczące racjonalnego wyboru związków fizycznych w dynamicznej analizie konstrukcji. Po pierwsze, pokazane będzie, że praktyczna, tzn. sprawdzona doświadczalnie wiedza o zachowaniu się materiałów lepkoplastycznych w złożonym stanie naprężenia jest jeszcze niedostateczna. Po drugie, wskazana zostanie na przykładach ścisła zależność między przyjętą metodą obliczeniową a wyborem najodpowiedniejszych równań konstytutywnych. Wreszcie opisane będą skutki, do jakich prowadzi nieprzestrzeganie tej zasady. Ze względu na jednostronność wypowiedzianych tutaj sądów uwagi poniższe traktować należy jako dyskusyjne.

Studia nad poznaniem i formułowaniem równań konstytutywnych dla materiałów wykazujących efekty lepkie, głównie metali, prowadzone są w kilku kierunkach jednocześnie. Z jednej strony formułowane są związki płynięcia na podstawie ogólnej struktury równań konstytutywnych dla materiałów niesprężystych zgodnie z postulatami mechaniki i termodynamiki ośrodków ciągłych [10 i 77]. W tej dziedzinie odnotować należy szereg ważnych osiągnięć. Pokazane zostało, że jednolitą teorię materiałów lepkoplastycznych wyprowadzić można w ramach koncepcji zanikającej pamięci [63 i 77]. Ostatnie badania poszły w kierunku wykorzystania parametrów wewnętrznych do opisu efektów plastycznych i lepkich [62 i 61]. Sposób ten charakteryzuje się stosunkowo najpełniejszą motywacją fizyczną [60]. Inne propozycje równań dla ośrodków lepkoplastycznych w zakresie dużych odkształceń podane są w pracach [35].

Dla procesów izotermicznych i przy pominięciu sprzężenia termomechanicznego uzyskuje się z ogólnej teorii równania konstytutywne dla materiału sprężysto-

plastycznego, wrażliwego na prędkość odkształcenia, wyprowadzone wcześniej na gruncie fenomenologicznym [58 i 59].

Równania konstytutywne zawierają szereg stałych i funkcji, które określić należy na podstawie eksperymentu. Olbrzymia większość dostępnych danych doświadczalnych odnosi się do jednoosiowego stanu naprężenia. Tak jak w każdej teorii mechanicznej czy termodynamicznej, również w przypadku ciał lepkoplastycznych przeniesienie odpowiednich wniosków na złożony stan naprężenia wymaga przyjęcia szeregu dodatkowych hipotez. Niektóre z tych hipotez poddane zostały eksperymentalnej weryfikacji. Prace LINDHOLMA [40] potwierdziły poprawność hipotezy izotropowego rozszerzenia się powierzchni płynięcia w pewnym zakresie prędkości odkształcenia. Inne hipotezy, np. dotyczące normalności wektora prędkości odkształcenia do aktualnej powierzchni płynięcia, nie zostały jeszcze sprawdzone. Brak jest również doświadczeń pozwalających wyznaczyć niektóre parametry w warunkach sprzężenia termomechanicznego.

Fakty powyższe powinny być brane pod uwagę przy wyborze najwłaściwszego modelu materiału do rozwiązywania problemów brzegowych w złożonym stanie naprężenia. Rozumując odwrotnie wydaje się celowe rozwijanie dla konstrukcji takich metod przybliżonych, w których stopień aproksymacji odpowiadałby niepewności, jaką zawierają w sobie niektóre stałe i funkcje w równaniach konstytutywnych.

Punktem wyjścia dla omawianej liniowej teorii lepkoplastycznych powłok będą stosunkowo najlepiej poznane i najczęściej stosowane równania konstytutywne, zaproponowane przez PERZYŃĘ [58]. Dalsze uproszczenia modelu materiału, a przede wszystkim zagadnienie pominięcia wyrazów sprężystych, wiąże się bezpośrednio z przyjętą techniką obliczeniową. Wbrew szeroko rozpowszechnionemu pogładowi model sztywno-plastycznego materiału nie zawsze okazuje się najefektywniejszy i najprostszy przy analizie szeregu zagadnień praktycznych. W celu udokumentowania tego stwierdzenia wygodnie jest posłużyć się paroma przykładami. Pierwszy z nich dotyczy zagadnień mechaniki cieczy.

Ogólnie wiadomo, że model cieczy nieściśliwej umożliwił efektywne rozwiązanie szeregu problemów przepływu, podczas gdy bardziej realistyczny model cieczy ściśliwej okazał się wygodniejszy przy metodach numerycznych zwłaszcza w zagadnieniach dwuwymiarowych. Specyfika problemu powoduje, że równanie różniczkowe dla ośrodka nieściśliwego aproksymować można za pomocą uwikłanych schematów różnicowych, które rozwiązuje się dość kłopotliwie metodami iteracyjnymi [65]. Równania dla ośrodka ściśliwego całkują się bezpośrednio przez wykorzystanie prostych schematów różnicowych i rozwiązanie buduje się krok po kroku.

Ta własność równań pozostaje niezmienną, jeśli wprowadzić dodatkowo do modelu ośrodka plastyczne wyrazy deformacji postaciowej. Cieczy nieściśliwej odpowiada wówczas materiał sztywno-plastyczny, natomiast cieczy ściśliwej — materiał sprężysto-plastyczny. W ramach tego pierwszego modelu sformułowane zostały płaskie zagadnienia teorii plastyczności i opracowane zostały proste i efektywne metody analityczne nośności granicznej. Zalety modelu sztywno-plastycznego

stają się jednak mniej widoczne w dwuwymiarowych problemach rozwiązywanych numerycznie za pomocą metody różnic skończonych. Dodatkowe uwzględnienie sprężystych własności materiału znacznie upraszcza algorytm obliczeń numerycznych (por. WILKINS [96]). Podobnie przedstawia się sytuacja w dynamice ośrodków sprężysto-plastycznych.

Powyższe uwagi są istotne, ponieważ ostatnio wielu autorów poszukuje rozwiązań numerycznych dla modelu sztywno-idealnie plastycznego, podczas gdy zastąpienie go modelem sprężysto-plastycznym szybciej i łatwiej doprowadziłoby do celu, dając jednocześnie bardziej realistyczny obraz zjawiska.

W konstrukcjach cienkościennych warunek nieściśliwości materiału spełniony jest automatycznie, ponieważ nie nakłada się żadnych ograniczeń na wielkość odkształceń w kierunku prostopadłym do powierzchni środkowej konstrukcji. Największe trudności pojawiają się natomiast przy transformacji związków konstytutywnych do przestrzeni uogólnionych naprężeń i prędkości odkształceń. Transformacja ta prowadzi zazwyczaj do bardzo złożonych wyrażeń analitycznych nawet w najprostszym przypadku materiału sztywno-plastycznego lub sztywno-lepkoplastycznego [24 i 52]. Dalsze rozwiązywanie problemów brzegowych dla takich równań możliwe jest na drodze numerycznej. Jak wykazały ostatnie badania [38 i 96] znacznie wygodniej jest w tym przypadku traktować całkowanie naprężeń po grubości ścianki jako część algorytmu numerycznego. Można wówczas bez żadnej dodatkowej komplikacji uwzględnić sprężyste własności materiału, wzmocnienie itd.

Jeśli natomiast zamierzeniem teorii jest podanie efektywnej metody analitycznej rozwiązywania problemów brzegowych, to albo prawo płynięcia formułowane musi być bezpośrednio w wielkościach uogólnionych, albo model materiału musi być na tyle prosty, aby uśrednione po grubości związku fizyczne miały dostatecznie prostą postać. Obecna teoria konstruowana jest zgodna z tą ostatnią metodą.

Najważniejsze dotychczasowe osiągnięcia. Przegląd literatury ograniczony będzie do zagadnień bezpośrednio dotyczących teorii konstrukcji lepkoplastycznych zgodnie z podaną uprzednio definicją. W teorii tej wiele pojęć i metod zapożyczono lub przeniesiono z niewielkimi modyfikacjami z teorii konstrukcji plastycznych.

Wzorując się na metodzie Hodge'a dla powłok sztywno-idealnie plastycznych [23], PABIANEK przeprowadziła transformacje związków konstytutywnych PERZYNY dla liniowej i potęgowej funkcji opisującej wpływ prędkości odkształcenia [52]. W szczególnym przypadku powłok cylindrycznych odpowiednie prawo płynięcia pokrywało się z równaniami wyprowadzonymi wcześniej przez JOW-AN-HSI [32]. Rozwiązywany w pracy [53] przykład quasi-statycznego płynięcia powłoki cylindrycznej bez siły osiowej wskazał na poważne trudności przy numerycznym całkowaniu równań przy tzw. «dwupunktowych» warunkach brzegowych.

W teorii momentowej dla płyt kołowych prawa płynięcia uśrednione po grubości ścianki mają tę samą postać, co odpowiednie związki konstytutywne w punkcie.

Zagadnienie quasi-statyczne dla płyty kołowej przy różnych nieliniowych postaciach funkcji konstytutywnych rozważano w pracy [80], natomiast przykład dynamicznego obciążenia płyty prostokątnym impulsem ciśnienia rozwiązano numerycz-

nie w pracy [81]. Wymienione wyżej prace wyczerpują znane w literaturze rozwiązania dla stowarzyszonych praw płynięcia, opartych na statycznym, nieliniowym warunku plastyczności Hubera-Misesa.

Różne propozycje linearyzacji równań konstytutywnych HOHENEMSERA i PRAGERA [25] oraz PERZYNY [58] na podstawie odcinkowo-liniowego warunku plastyczności rozpatrywane były przez PRAGERA [64], BYKOWCEWA [7], HADDOW'A [22] i LEPIKA [39]. Mimo osiągniętej liniowości równań w płaskim stanie naprężenia, odpowiednie związki dla powłok w stanie giętno-błonowym okazały się, podobnie jak dla idealnej plastyczności, nieliniowe. W szczególnym przypadku zgięciowej teorii płyt występują w dalszym ciągu trudności, ponieważ w różnych strefach w płycie mamy inne równania; granice tych stref nie znane są *a priori* i ulegają zmianie w procesie. W ramach tej metody uzyskano zaledwie kilka rozwiązań ilustracyjnych przy zaniedbaniu sił inercji [1 i 7]. Natomiast korzyści z tak pomyślanej linearyzacji są w zagadnieniach dynamicznych pozorne i znane rozwiązania dotyczą najprostszych problemów początkowo-brzegowych [28, 29, 30 i 31].

JONES [30] badał wpływ lepkości materiału na ugięcia przy obciążeniu impulsowym jedynie na przykładzie płyty pierścieniowej, ponieważ w problemie tym całkowity profil naprężenia znajdował się w obrębie tylko jednej strefy.

LEPIK [39] uogólnił rozwiązanie SZAPIRY [74] dla płyty pierścieniowej na przypadek materiału lepkoplastycznego, ale rozwiązanie to spełniało nierealistyczne warunki ciągłości na granicy stref. Reasumując można stwierdzić z przekonaniem, że nie opracowano do tej pory zadowalającej metody analitycznej badania dynamicznego zachowania się konstrukcji lepkoplastycznych.

Przybliżona metoda pozwalająca uwzględnić wpływ prędkości odkształcenia w płytach i powłokach podana została przez PERRONE'A [56 i 57]. Metoda ta opiera się na rozwiązaniu odpowiedniego problemu dynamicznego dla materiału idealnie plastycznego i jest kontynuacją wcześniejszych prób PARKESA [55] i MENTLA [46] dotyczących belek wspornikowych.

Metody numeryczne w dynamice powłok plastycznych rozwija systematycznie w ciągu ostatnich dziesięciu lat grupa badaczy z Massachusetts Institute of Technology. WITMER, BALMER, LEECH i PIAN [96] opracowali algorytm pod nazwą DEPROSS, pozwalający wyznaczyć deformacje konstrukcji obrotowo-symetrycznych w zakresie dużych ugięć. Dzięki numerycznemu całkowaniu równań konstytutywnych wzdłuż grubości ścianki uwzględniono jednocześnie efekty sprężyste, plastyczne i lepkie. Metoda ta uogólniona została na przypadek powłok o dowolnej geometrii w pracy [38].

WITMER, CLARK i BALMER [97] oraz niezależnie DUFFY i KEY [13] przeprowadzili weryfikację doświadczalną przydatności programu DEPROSS. Stwierdzono bardzo dobrą zgodność teorii i eksperymentu w zakresie odkształceń nieodwracalnych i następujących po tym drgań sprężystych.

Duża część tych ciekawych badań nie została opublikowana w ogólnie dostępnych czasopismach naukowych. Wykaz niektórych ważniejszych sprawozdań MIT i innych opracowań znajduje się w pracy [97].

2. ANALIZA PODSTAWOWYCH PARAMETRÓW I EFEKTÓW W PROCESIE DYNAMICZNYM

W poprzednim rozdziale przedyskutowane zostały niektóre aspekty wyboru równań konstytutywnych opisujących rzeczywisty materiał. Z kolei przeprowadzona będzie analiza zachowania się konstrukcji jako całości w procesie dynamicznym i na tej podstawie zaproponowane będą dalsze założenia upraszczające w teorii konstrukcji lepkoplastycznych. W szczególności omówiony będzie wpływ czterech czynników decydujących o przebiegu procesu dynamicznego.

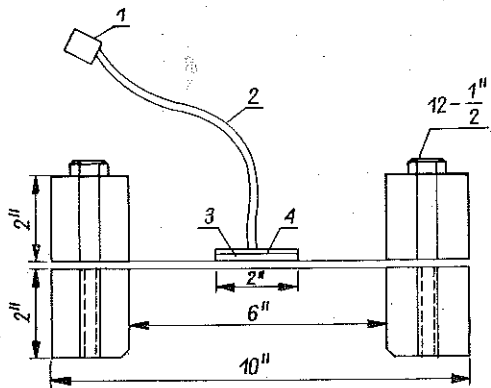
Czynnikami teorii są:

1. właściwości sprężyste materiału,
2. wzmocnienie materiału,
3. własności lepkie materiału oraz
4. zmiana geometrii konstrukcji.

Analiza przeprowadzona będzie głównie na podstawie dostępnych danych doświadczalnych jak również niektórych dokładnych rozwiązań numerycznych. Większość doświadczeń przeprowadzona była na płytach kołowych, które deformowały się w zakresie dużych ugięć. Płytę taką traktować należy jako powłokę osiowo-symetryczną, a zatem cytowane eksperymenty, jako reprezentatywne dla całej teorii powłok, upoważniają do wyciągnięcia pewnych ogólnych wniosków.

Efekty sprężyste. Dzięki rozwojowi dokładnych optycznych i elektronicznych technik pomiarowych można obecnie prześledzić procesy dynamiczne, których czas trwania nie przekracza 1 milisekundy (10^{-6} s). Ostatnio DUFFY i KEY [13] opublikowali wyniki dokładnych pomiarów deformacji zamocowanej płyty kołowej, poddanej eksplozji materiału wybuchowego, rozmieszczonego na części powierzchni, rys. 1. W szczególności zbadano zmianę w czasie ugięcia środka płyty dla różnych wartości impulsu i różnych materiałów oraz zmierzono końcowy kształt zdeformowanej płyty. Na rys. 2 podany jest (linią grubą) wykres ugięcia środka płyty jako funkcji czasu dla płyty z aluminium 6061-T6 o wymiarach (promień R , grubość $2h$) $6 \times 1/16$, poddanej impulsowi $I = 1,67 \cdot 10^5$ dyn/s, co odpowiada prędkości początkowej powierzchni środkowej 7430 in/s. Zastosowany w doświadczeniach stop aluminium jest niewrażliwy na prędkość odkształcenia i charakteryzuje się małym modułem wzmocnienia, co pozwoliło skupić w doświadczeniach uwagę na efektach sprężystych i plastycznych.

Z rys. 2 widać, że przemieszczenie pionowe δ narasta od zera aż do osiągnięcia maksimum dla czasu $t = 0,24$ ms, po czym następują drgania o malejącej amplitudzie.

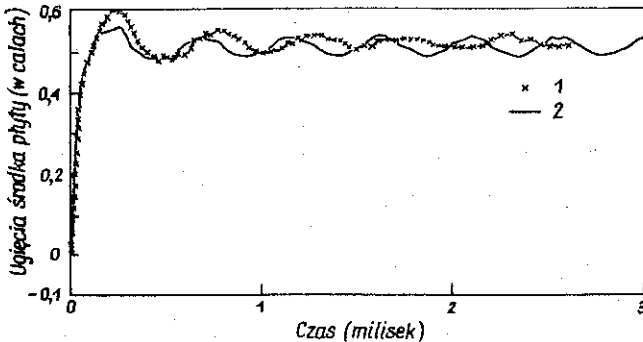


Rys. 1. Schemat urządzenia do badania dynamicznego zachowania się płyt:

1 - detonator, 2 - lont, 3 - warstwa tłumiąca z polietylenu, 4 - materiał wybuchowy

Z rys. 2 widać, że przemieszczenie pionowe δ narasta od zera aż do osiągnięcia maksimum dla czasu $t = 0,24$ ms, po czym następują drgania o malejącej amplitudzie.

dzie wokół położenia równowagi, którym jest trwałe plastyczne ugięcie płyty. Maksymalne chwilowe ugięcie przewyższa o około 20% wartość trwałych ugięć, które w rozważanym przypadku jest rzędu ośmiu grubości powłoki. Dla porównania przytoczony jest (na rys. 2 — linia cienka) wynik obliczeń numerycznych przy użyciu wspomnianego już programu DEPROSS. Dobra zgodność przewidywań teorii i doświadczenia jest godna podkreślenia. Strzałką na rysunku oznaczono moment, w którym zewnętrzne włókno przekroju ulega pierwszemu uplastycznieniu. Okres czysto sprężystych deformacji może być pominięty w porównaniu z całkowitym czasem narastania ugięć.



Rys. 2. Wykres ugięcia środka płyty jako funkcja czasu (DUFFY i KEY):

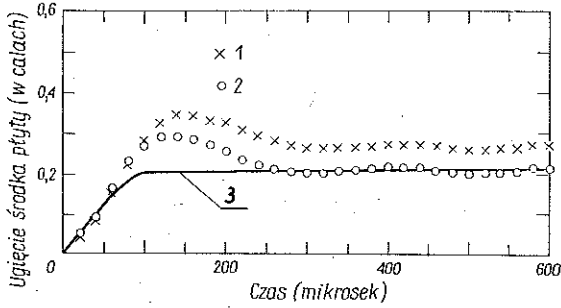
1—punkty doświadczalne, 2—wyniki obliczeń numerycznych

Powstaje pytanie, w jakim stopniu model materiału płyty, nie uwzględniający efektów sprężystych, aproksymuje rzeczywisty wykres $w=w(t)$. W tym celu należałoby wyniki dokładnych obliczeń numerycznych porównać z danymi doświadczalnymi. W programie DEPROSS istotną rolę odgrywają wyrazy «sprężyste» w równaniach konstytutywnych i nie można stosować go do modelu materiału sztywnoplastycznego. Z kolei w rozwiązaniu analitycznym dla płyty sztywno-idealnie plastycznej WANG i HOPKINS [79] otrzymali wzory na trwałe ugięcia, nie wyznaczyli jednak zmienności przemieszczeń środka płyty w czasie.

Wystarczający materiał porównawczy dostępny jest jedynie dla lepkoplastycznej płyty kołowej, zamocowanej na obwodzie i poddanej impulsowi ciśnienia. Odpowiednie rozwiązanie analityczne bez efektów sprężystych omówione będzie w rozdziale 6. Rozwiązanie numeryczne dla modelu sprężysto-lepkoplastycznego przy wykorzystaniu programu DEPROSS oraz wyniki doświadczeń podali WITMER, CLARK i BALMER [97]. Porównanie odpowiednich wykresów $w=w(t)$ przedstawione jest na rys. 3, natomiast końcowy kształt odkształconej płyty pokazany jest na rys. 4.

Na podstawie powyższej analizy można stwierdzić, że model materiału zaniedbujący własności sprężyste prowadzi do zadowalającego opisu początkowego okresu wzrostu ugięć, pozwala na dokładne przewidzenie wielkości maksymalnych trwałych ugięć i końcowego kształtu zdeformowanej konstrukcji. Natomiast występowanie chwilowego maksimum ugięcia oraz późniejszych drgań powłoki spowodowane jest czysto sprężystymi własnościami materiału. Jest rzeczą interesującą, że

z uwagi na brak lepkosprężystego tłumienia drgań w programie DEPROSS powstaje niepewność co do wyboru wartości trwałych ugięć w powłoce i pod tym względem uproszczone obliczenia analityczne górują nad rozwiązaniem dokładnym.



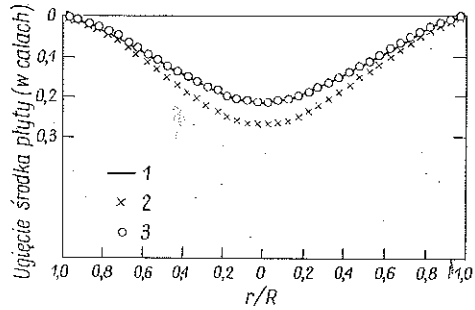
Rys. 3. Wykres ugięcia środka płyty w funkcji czasu (WITMER, CLARK, BALMER):

1-wyniki obliczeń numerycznych dla materiału sprężysto-plastycznego, 2-wyniki obliczeń numerycznych dla materiału sprężysto-lepkoplastycznego, 3-rozwiązanie analityczne dla materiału sztywno-lepkoplastycznego

Deformacje plastyczne, jak wykazały obliczenia numeryczne, ustają dla czasu 0,32 ms (strzałka na rys. 3). W tym momencie 92% początkowej energii kinetycznej uległo zamianie na pracę plastyczną; pozostałe 8% odpowiadało energii drgań sprężystych. Wygodnie jest zdefiniować parametr R jako stosunek całkowitej pracy plastycznej do maksymalnej energii sprężystej. SEILER, COTTER i SYMONDS [70] oraz FLORENCE [18] pokazali, że parametr ten wiąże się z błędem, jaki powstaje w obliczeniach przy zaniechaniu sprężystych składowych tensora odkształcenia. Może on być zatem przyjęty za pewną miarę dokładności teorii sztywno-plastycznych i sztywno-lepkoplastycznych konstrukcji. Pokazano, że w przypadku płyt teoria ta jest poprawna, jeżeli $R > 5$ [18] (dla belek nawet, jeśli $R > 3$ [6]).

W podsumowaniu powyższych rozważań przyjąć można, że prawo fizyczne dla materiału, w którym zaniechano efekty sprężyste, prowadzi do adekwatnego opisu końcowych trwałych deformacji konstrukcji.

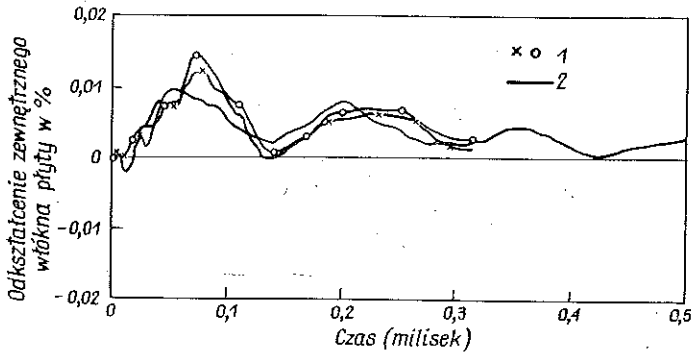
Wpływ wzmocnienia materiału. Wpływ ten na dynamiczne zachowanie się konstrukcji studiowany był przez wielu badaczy z punktu widzenia teoretycznego i eksperymentalnego. Większość uzyskanych wyników dotyczy zagadnień belek przy różnych warunkach podparcia i obciążenia. BODNER i SYMONDS [6] oraz JONES [29] doszli niezależnie do wniosku, że wpływ wzmocnienia materiału może być pominięty w porównaniu z efektami lepkości materiału i zmian geometrii w konstruk-



Rys. 4. Profil trwałych ugięć płyty:

1-krzywa doświadczalna, 2-wyniki obliczeń numerycznych dla materiału sprężysto-plastycznego, 3-wyniki obliczeń numerycznych dla materiału sprężysto-lepkoplastycznego

cyjach cienkościennych. Wniosek ten potwierdził ostatnio JONES [29] w odniesieniu do płyt pierścieniowych, obciążonych liniowym impulsem ciśnienia. Wy tłumaczenie tego faktu podaje rys. 5, gdzie pokazany jest wykres odkształceń obwodowych na zewnętrznej powierzchni płyty, zmierzony za pomocą czujników elektrooporowych w jednym z cytowanych doświadczeń DUFFY'EGO i KEY'A [13].



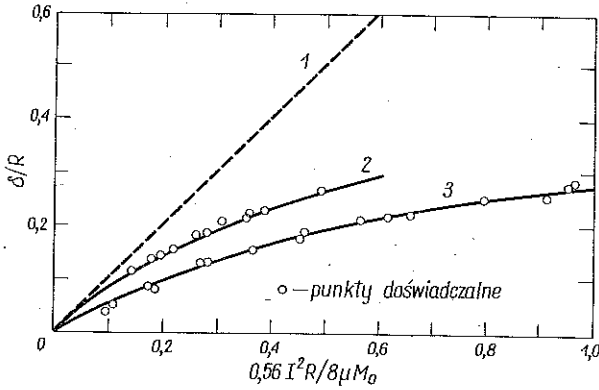
Rys. 5. Zmiana odkształceń obwodowych zewnętrznego włókna płyty w czasie:
1-punkty doświadczalne, 2-obliczenia numeryczne

Chociaż trwałe przemieszczenie środka wynosiło około 8 grubości powłoki, to maksymalne odkształcenie nie przekraczało 1,5%, natomiast trwałe odkształcenie wynosiło zaledwie około 0,4%. Jest to jeszcze jeden dowód na znany fakt, że dużym ugięciom w konstrukcjach cienkościennych towarzyszą małe wielkości odkształceń. W tym zakresie wzmocnienie materiału nie odgrywa jeszcze dużej roli.

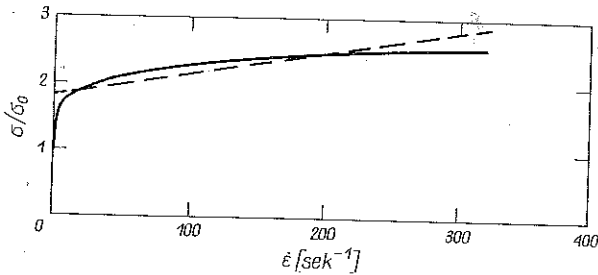
Lepkość materiału i zmiany wielkości geometrycznych. Jedną z trudności przy doświadczalnej analizie dynamicznego zachowania się konstrukcji jest odpowiednie wydzielenie badanych efektów. Zgodnie z przeprowadzoną dyskusją kryterium energetyczne, upoważniające do pominięcia efektów sprężystych, jest spełnione dla dużych wartości energii impulsu. Odpowiadające przemieszczenia konstrukcji są rzędu grubości ścianki, a zatem znajdują się w zakresie tzw. umiarkowanie dużych ugięć. Przy studiowaniu wpływu lepkości materiału na zachowanie się konstrukcji nie sposób uwolnić się od zagadnień zmian wielkości geometrycznych i oba zjawiska muszą być traktowane łącznie. W materiałach wrażliwych na prędkość odkształcenia granica plastyczności wzrasta w procesach dynamicznych powodując podwyższenie wytrzymałości konstrukcji. Z kolei wzrostowi ugięć w powłokach towarzyszy rozwój sił membranowych i przejście ze stanu giętnego w stan błonowy, co również prowadzi do wzmocnienia konstrukcji. Własności lepkie materiału oraz efekty zmiany geometrii związane z dużymi ugięciami działają zgodnie w kierunku zmniejszenia trwałych ugięć dynamicznie obciążonych konstrukcji.

Zbadanie oddzielnego wpływu obu efektów dla lepkoplastycznych konstrukcji przedstawione jest w pracy FLORENCE'A i autora [92]. Podobnie jak w [97] jako przykład reprezentatywny dla rozważanej teorii wybrano zamocowaną płytę kołową, obciążoną na całej powierzchni impulsem ciśnienia o dużej intensywności. Doświadczenia

przeprowadzone były na płytach z dwóch różnych materiałów: aluminium 6061-T6 i stali HR-A285, ponieważ pierwszy z nich jest niewrażliwy, a drugi wrażliwy na prędkość odkształcenia. Zbadano łącznie 31 płyt dla różnych wielkości zastosowanego impulsu mierząc trwale ugięcie δ środka i końcowy profil ugięcia. Wyniki pomiarów przedstawione są na rys. 6, gdzie zaznaczone jest również linią kreskowaną teoretyczne rozwiązanie WANGA i HOPKINSA [79] dla materiału sztywno-idealnie plastycznego. Rysunek sporządzony został w bezwymiarowej skali opartej na tym rozwiązaniu. Punkty doświadczalne dla obu materiałów znalazły się poniżej rozwiązania teoretycznego. Ponieważ stop aluminium 6061-T6 jest niewrażliwy na prędkość



Rys. 6. Trwałe ugięcia środka płyty w funkcji bezwymiarowego impulsu (Florence, Wierzbicki):
1 - rozwiązanie według teorii momentowej dla materiału sztywno-plastycznego, 2 - punkty doświadczalne dla aluminium,
3 - punkty doświadczalne dla miękkiej stali



Rys. 7. Zależność dolnej granicy plastyczności miękkiej stali od prędkości odkształcenia (uśrednione wyniki wielu autorów)

odkształcenia, przeto różnica dla górnej serii punktów jest wynikiem efektu sił membranowych. Ugięcia dla płyt stalowych układają się jeszcze niżej wskazując na dodatkowe wzmocnienie, wywołane wrażliwością materiału na prędkość odkształcenia. Oba efekty są tego samego rzędu, ale dla małych wielkości impulsu dominuje wzmocnienie wywołane lepkością materiału. Łatwo podać wytłumaczenie tego faktu analizując zależność granicy plastyczności materiału od prędkości odkształcenia. Na rys. 7 przedstawiona jest zależność $\sigma = \sigma(\dot{\epsilon})$, otrzymana drogą uśrednienia doświadczeń wielu autorów [73]. Granica plastyczności rośnie gwałtownie

nie w przedziale $0 < \dot{\epsilon} < 10 \text{ s}^{-1}$, ale tylko nieznacznie dla $\dot{\epsilon} > 10^2$. Dla małych wielkości impulsu ugięcia są na tyle małe, że wpływ sił membranowych jest niewielki. Jednocześnie gwałtowny wzrost granicy plastyczności z prędkością odkształcenia powoduje, że efekt lepkości jest w tym przedziale impulsów dominujący. Natomiast dla silniejszych impulsów wywołujących większe ugięcia, mimo dużych uzyskiwanych prędkości odkształcenia, granica plastyczności rośnie tylko nieznacznie i przeważa w zjawisku wpływ sił membranowych.

Uogólniając zebrane w tym rozdziale spostrzeżenia i wyniki można stwierdzić, że przy opisie dynamicznych deformacji cienkościennych konstrukcji niesprężystych

- 1) podstawową rolę odgrywają własności sprężyste, plastyczne i lepkie materiału;
- 2) efekty sprężyste nie wpływają na wielkości i kształt końcowych deformacji;
- 3) wystarczającym modelem materiału jest wówczas model sztywno-lepkoplastyczny;
- 4) przy intensywnych obciążeniach prowadzących do dużych ugięć uwzględniać należy ponadto zmiany konfiguracji geometrycznej konstrukcji.

3. ZWIĄZKI KONSTITUTYWNE DLA MATERIAŁU LEPKOPLASTYCZNEGO I ICH LINEARYZACJA

Stowarzyszone prawo konstytutywne. Punktem wyjścia dalszych rozważań w tej pracy są równania konstytutywne dla materiału sprężysto-lepkoplastycznego, zaproponowane po raz pierwszy przez PERZYŃĘ [58], a następnie uogólnione w pracy [59]:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij} &= \frac{1}{2\mu} \dot{s}_{ij} + \gamma \langle \Phi(F) \rangle \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}, & \dot{\epsilon}_{kk} &= \frac{1}{3K} \dot{\sigma}_{kk}, \\ F &= \frac{\sqrt{J_2}}{\kappa} - 1, & \langle \Phi \rangle &= \begin{cases} \Phi(F), & \text{jeśli } F > 0, \\ 0, & \text{jeśli } F \leq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

gdzie $\dot{\epsilon}_{ij}$ i s_{ij} oznaczają odpowiednio dewiatory tensora prędkości odkształcenia $\dot{\epsilon}_{ij}$ i naprężenia σ_{ij} , J_2 oznacza drugi niezmiennik dewiatora naprężenia, κ jest parametrem wzmocnienia, a γ stałą materiałową.

Równania powyższe opisują liniowe efekty sprężyste, statyczne uplastycznienie według warunku Hubera-Misesa, izotropowe wzmocnienie materiału oraz nieliniowy wpływ prędkości odkształcenia. Własności te są charakterystyczne dla wielu materiałów konstrukcyjnych, głównie metali obciążonych dynamicznie. Przy formułowaniu równań (3.1) przyjęto szereg hipotez, z których, jak podkreślono we wstępie, nie wszystkie są ugruntowane na drodze eksperymentalnej. Zaliczyć do nich należy przede wszystkim następujące:

- 1) postulat o izotropowym rozszerzaniu się powierzchni plastyczności z prędkością odkształcenia;
- 2) postulat o normalności wektora prędkości odkształcenia plastycznego do chwilowej powierzchni płynięcia.

W klasycznej teorii plastyczności dla materiałów ze wzmocnieniem postulat o normalności wynikał bezpośrednio z warunku stateczności Druckera dla materiałów niesprężystych [12]:

$$(3.2) \quad \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V (\sigma_{ij}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(2)}) (\dot{\varepsilon}_{ij}^{(1)} - \dot{\varepsilon}_{ij}^{(2)}) dV \geq 0.$$

Dla materiałów sprężysto-lepkoplastycznych można jedynie udowodnić na podstawie (3.2) wypukłość chwilowej powierzchni płynięcia [41], natomiast nie otrzymuje się jednoznaczności co do kierunku wektora $\dot{\varepsilon}_{ij}$. Z punktu widzenia definicji materiału statecznego istnieje zatem pewna dowolność w konstruowaniu równań konstytutywnych i dowolność tę wykorzystamy przy koncepcji linearyzacji tych równań.

Wprowadzone będą obecnie następujące założenia upraszczające odnośnie równań (3.1) tak, aby otrzymać wystarczająco proste prawo płynięcia dla powłok. Zakłada się mianowicie, że 1) wzmocnienie materiału można pominąć $\kappa = k = \text{const}$, 2) można również pominąć wyrazy sprężyste $\mu = K \rightarrow \infty$, 3) funkcja $\Phi(F) = F$ jest liniowa. Pierwsze dwa założenia i wynikające stąd konsekwencje w dynamice konstrukcji omówione zostały w poprzednim rozdziale. Bliższego wyjaśnienia wymaga założenie trzecie.

Uzyskany stopień aproksymacji rzeczywistego wykresu $\sigma = \sigma(\dot{\varepsilon})$ za pomocą liniowej funkcji $\Phi(F)$ reprezentowany jest na rys. 7 linią prostą. Dobierając odpowiednio kąt nachylenia tej linii i punkt przecięcia z osią σ/σ_0 otrzymać można zadowalające przybliżenie krzywej doświadczalnej w pewnym tylko przedziale prędkości odkształcenia. Dokładny opis własności lepkich materiału w całym przedziale $\dot{\varepsilon}$ zapewnia nieliniowa funkcja $\Phi(F)$, ale wprowadzona linearyzacja jest koniecznym krokiem upraszczającym w kierunku uzyskania zamierzonego celu pracy.

Uwzględniając założenia 1, 2, 3 w (3.1) otrzymujemy równania

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij} &= \gamma \left(\sqrt{\frac{J_2}{k}} - 1 \right) \frac{s_{ij}}{\sqrt{J_2}}, & \text{jeśli } \sqrt{J_2} > k, \\ \dot{\varepsilon}_{ij} &= 0, & \text{jeśli } \sqrt{J_2} \leq k, \\ \dot{\varepsilon}_{kk} &= 0, \end{aligned}$$

które rozważał wcześniej HOHENEMSER i PRAGER [25] jako uogólnienie modelu nieściśliwej cieczy lepkiej. W szczególnym przypadku, kiedy $\gamma \rightarrow \infty$, równania (3.3) redukują się do prawa płynięcia Levy'ego-Misesa dla materiału sztywno-idealnie plastycznego:

$$(3.4) \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \lambda s_{ij}, \quad \sqrt{J_2} = k.$$

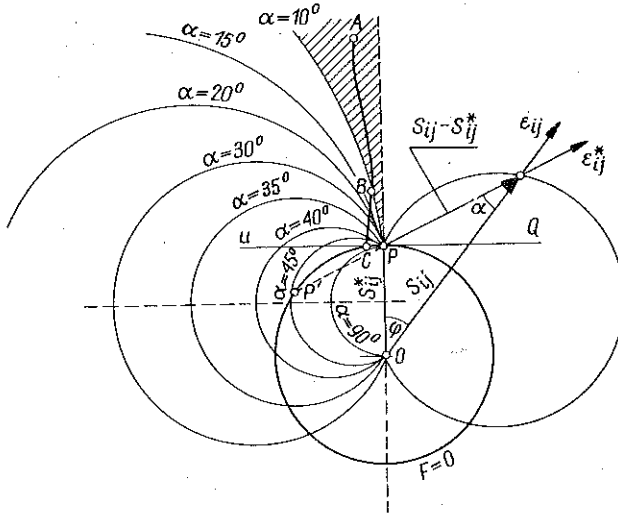
Niestowarzyszone prawo płynięcia. Równania (3.3) są związkami nieliniowymi w naprężeniach, ponieważ opierają się na statycznym warunku plastyczności Hubera-Misesa. W celu dalszej linearyzacji równań (3.3) przepiszymy je w równoważnej postaci

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij} &= \frac{\gamma}{k} (s_{ij} - s_{ij}^0), & \text{jeśli } \sqrt{J_2} > k, \\ \dot{\varepsilon}_{ij} &= 0, & \text{jeśli } \sqrt{J_2} \leq k, \end{aligned}$$

wprowadzając następującą definicję dewiatora naprężenia s_{ij}^0 :

$$(3.6) \quad \frac{s_{ij}}{\sqrt{J_2}} = \frac{s_{ij}^0}{\sqrt{J_2^0}}, \quad J_2^0 = \frac{1}{2} s_{ij}^0 s_{ij}^0.$$

Równania (3.5) są w dalszym ciągu nieliniowe względem naprężeń z powodu definicji (3.6). Posługując się geometryczną reprezentacją w przestrzeni dewiatorów zauważmy, że wektor s_{ij}^0 jest współliniowy z wektorem s_{ij} i leży na statycznej powierzchni płynięcia, rys. 8.



Rys. 8. Interpretacja geometryczna niestowarzyszonego prawa płynięcia

Rozważmy prawo konstytutywne podobne do (3.5), w którym dewiator s_{ij}^0 zastąpiony został przez inny dewiator s_{ij}^* , traktowany jako znana funkcja w każdym punkcie materiału $x_i \in V$:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij}^* &= \frac{\gamma}{k} (s_{ij} - s_{ij}^*), & \text{jeśli} \quad \sqrt{J_2} > k, \\ \dot{\epsilon}_{ij}^* &= 0, & \text{jeśli} \quad \sqrt{J_2} \leq k, \end{aligned}$$

gdzie składowe tensora s_{ij}^* , podobnie jak s_{ij}^0 , spełniają statyczny warunek plastyczności. Powyższe równania stwierdzają, że kierunek wektora prędkości odkształcenia $\dot{\epsilon}_{ij}^*$ jest współliniowy z wektorem $(s_{ij} - s_{ij}^*)$. Ponieważ na ogół $s_{ij}^* \neq s_{ij}^0$, więc wektor $s_{ij} - s_{ij}^0$ nie jest skierowany wzdłuż normalnej do statycznej powierzchni płynięcia (rys. 8). Zatem równanie (3.7) należy do klasy niestowarzyszonych praw płynięcia.

Niestowarzyszone prawa płynięcia były również badane w teorii plastyczności; krytyczny przegląd uzyskanych wyników znaleźć można np. w pracy MROZA [47]. Chociaż większość przesłanek teoretycznych przemawia za normalnością wektora prędkości odkształcenia do powierzchni płynięcia, to jednak w niektórych

doświadczeniach dla materiałów sprężysto-plastycznych zaobserwowano odchylenia od normalności.

W teorii ciał lepkoplastycznych postulat normalności nie został poddany doświadczalnemu sprawdzeniu. W tej sytuacji wyprowadzone niestowarzyszone prawo płynięcia można traktować nie jako niezależne prawo fizyczne, lecz jako pewną aproksymację stowarzyszonego prawa (3.3). Warto nadmienić, że oba są jednakowo dopuszczalne w klasie materiałów statecznych, zdefiniowanych przez (3.2).

Pozostawiając dokładniejsze sprecyzowanie stanu s_{ij}^* do następnego rozdziału, zajmijmy się dyskusją pewnych ogólnych własności równań (3.7). W tym celu wygodnie jest posłużyć się interpretacją geometryczną i rozpatrywać tensory naprężenia i prędkości odkształcenia jako wektory w odpowiednich 6-wymiarowych przestrzeniach.

Oznaczmy przez φ kąt pomiędzy wektorami s_{ij} i s_{ij}^* , a przez α kąt pomiędzy wektorami $\dot{\varepsilon}_{ij}$ i ε_{ij}^* . Wektory s_{ij} , s_{ij}^0 oraz $\dot{\varepsilon}_{ij}$ są współliniowe i normalne do statycznej powierzchni płynięcia. Kąt α określa odchylenie wektora $\dot{\varepsilon}_{ij}^*$ od kierunku normalnego (rys. 8).

Z rozważań czysto geometrycznych wynika następująca zależność pomiędzy kątami α i φ :

$$(3.8) \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\sin \varphi} \left(\frac{\sqrt{J_2}}{k} - \cos \varphi \right).$$

Łatwo zauważyć, że dla stałego s_{ij}^* miejsce geometryczne stałego α tworzy rodzinę kół, których środki leżą na symetralnej odcinka OP (rys. 8).

Załóżmy obecnie, że trajektoria obciążenia w danym punkcie materiału jest linią ABC . Kąt odchylenia α zmienia się wzdłuż drogi ABC i jak pokazuje rys. 8 maleje ze wzrostem odległości od statycznej powierzchni płynięcia. W wielu problemach dynamicznych znaczna część trajektorii naprężenia znajduje się w obszarze oddalonym od statycznej powierzchni płynięcia. W obszarze tym odchylenie od kierunku normalnego jest małe (α jest małe) przy założeniu, że kąt φ będzie dostatecznie mały, jak to przedstawia np. zakreślony obszar na rys. 8. Jeśli aktualny punkt naprężenia jest oddalony od powierzchni $F=0$, to niestowarzyszone prawo konstytutywne (3.7) jest dobrym przybliżeniem równań (3.3), nawet jeśli s_{ij}^* różni się znacznie od s_{ij} . Kiedy jednak punkt naprężenia przybliży się do powierzchni $F=0$, równania (3.7) stają się coraz mniej dokładne.

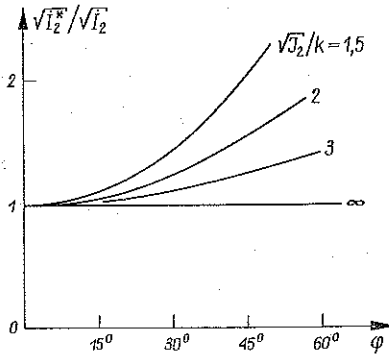
Trajektoria naprężeń reprezentowana linią prostą odpowiada proporcjonalnemu obciążeniu w danym punkcie ciała. Jeśli wektor s_{ij}^* leży na linii proporcjonalnego obciążenia, to równania (3.3) i (3.7) są równoważne. Zachodzi to np. w przypadku, kiedy proporcjonalne obciążenie jest wynikiem symetrii.

Naturalna norma wektora prędkości odkształcenia, wyliczona z (3.7) wynosi

$$(3.9) \quad \|\dot{\varepsilon}_{ij}^*\| = \sqrt{I_2^*} = \gamma \sqrt{\frac{J_2}{k^2} + 1 - \frac{s_{ij}s_{ij}^*}{k^2} \cos \varphi}.$$

Przyjmując w powyższym związku $\varphi=0$, otrzymujemy odpowiednią normę dla wektora $\dot{\varepsilon}_{ij}$ w stowarzyszonym prawie płynięcia. Stosunek $\|\dot{\varepsilon}_{ij}^*\|/\|\dot{\varepsilon}_{ij}\|$ jako funkcja kąta φ przedstawiony jest na rys. 9. Tutaj również różnica pomiędzy rozwiązaniami równań (3.7) i (3.3) jest mała dla dostatecznie dużego J_2/k^2 .

Warunki obciążenia i odciążenia. Zgodnie z założeniem, materiał pozostaje sztywny, jeśli punkt reprezentujący stan naprężenia znajduje się wewnątrz lub na powierzchni plastyczności $\sqrt{J_2} \leq k$. Lepkoplastyczne płynięcie możliwe jest tylko dla $\sqrt{J_2} > k$. Zbadajmy przejście graniczne $\sqrt{J_2}/k \rightarrow 1$ dla równania (3.9). Otrzymujemy $\|\dot{\varepsilon}_{ij}^*\| = \sqrt{2}\gamma \sin \varphi$. Oznacza to, że związki konstytutywne (3.7) nie spełniają warunku ciągłości pola prędkości odkształceń przy odciążaniu. Występuje tu pewnego rodzaju analogia z deformacyjną teorią plastyczności, gdzie warunek ciągłości nie jest spełniony w przypadku obciążenia neutralnego.



Rys. 9. Błąd intensywności wektora prędkości odkształcenia w zależności od kąta φ dla różnych $\sqrt{J_2}/k$

Warunek odciążania i obciążania w postaci (3.7) jest nieliniowy, pomimo że same równania konstytutywne zostały zlinearyzowane. Stwarza to trudności przy rozwiązywaniu konkretnych problemów brzegowych.

W zagadnieniach dynamicznych dla ciał lepkoplastycznych rozwiązywanych w prędkościach wygodniej jest stosować nieco odmienne interpretacje warunku odciążenia.

Ponieważ rozważany model materiału jest całkowicie dysypatywny, przeto ruch dowolnego punktu ciała ustanie, jeśli tylko doprowadzona została do tego ciała skończona wartość energii. Zwykle interesuje nas moment końca ruchu, kiedy $\|\dot{\varepsilon}_{ij}^*\| = 0$. Odpowiadający temu stan naprężenia obliczyć można z (3.9):

$$(3.10) \quad \frac{\sqrt{J_2}}{k} = \cos 2\varphi.$$

Oznacza to, że usztywnienie w rozważanym modelu następuje dla wartości naprężeń znajdujących się wewnątrz statycznego warunku plastyczności.

Aby uniknąć dużych błędów, stosowalność obecnej hipotezy ograniczona jest do takich dróg obciążenia, dla których punkt naprężenia zbliża się do statycznej powierzchni płynięcia pod możliwie małym kątem φ .

Przejście graniczne do ciała idealnie plastycznego. Zbadajmy obecnie warunki, przy których równania (3.7) redukują się do związków Levy'ego-Misesa, opisujących materiał idealnie plastyczny. Wzorując się na metodzie wyłożonej w pracy [59], przyjmijmy $\gamma \rightarrow \infty$ zakładając jednocześnie, że prędkości odkształceń nie zerują się, $\|\dot{\varepsilon}_{ij}^*\| \neq 0$. Z zależności (3.8) i (3.9) otrzymujemy

$$(3.11) \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos 2\varphi - \cos \varphi}{\sin \varphi}.$$

Dla każdej skończonej wartości kąta φ mamy $s_{ij} \neq s_{ij}^*$ i równanie (3.7) jest w dalszym ciągu typu lepkościowego. Natomiast dla $s_{ij} \rightarrow s_{ij}^*$ z (3.11) wynika, że kąt dewiacji α jest nieoznaczony. W tym przypadku (3.7) redukuje się do równania

$$(3.12) \quad \ddot{\varepsilon}_{ij}^* = \lambda p_{ij},$$

gdzie λ jest nieoznaczonym parametrem, a p_{ij} jednostkowym wektorem normalnym skierowanym na zewnątrz powierzchni płynięcia w punkcie P . Wektor p_{ij} staje się normalny do tej powierzchni, jeśli trajektoria naprężenia zbliża się do punktu P wzdłuż linii prostej OP .

Można wyprowadzić następujący wniosek ogólny: zlinearyzowane równanie konstytutywne redukuje się w granicznym przypadku $\gamma \rightarrow \infty$ do stowarzyszonego prawa płynięcia opisującego materiał idealnie plastyczny jedynie dla proporcjonalnych dróg obciążania.

4. PRAWO PŁYNIĘCIA DLA LEPKOPLASTYCZNYCH KONSTRUKCJI

Założenia upraszczające. Transformacja równań trójwymiarowego ośrodka do dwuwymiarowej przestrzeni opisującej konstrukcje powierzchniowe nie jest ścisła i wymaga przyjęcia szeregu dodatkowych założeń odnośnie wielkości statycznych i kinematycznych. SAWCZUK i DUSZEK [67] przeprowadzili ostatnio szczegółową dyskusję założeń upraszczających w teorii początkowego płynięcia powłok z materiału sztywno-plastycznego nieściśliwego. Analiza równań powłok cienkich dla skończonych deformacji w opisie Lagrange'a podana jest w pracach [16 i 66]. Ważnym wnioskiem tych prac jest stwierdzenie, że dla «umiarkowania dużych przemieszczeń», tzn. przemieszczeń rzędu grubości powłoki, prawo płynięcia i definicja uogólnionych naprężeń mogą być przyjęte w tej samej postaci, co dla przemieszczeń nieskończenie małych. Natomiast równania równowagi i związku geometryczne wymagają pewnych modyfikacji. W obecnym rozdziale wyprowadzimy prawo płynięcia dla lepkoplastycznych konstrukcji wzorując się częściowo na założeniach i metodzie infinitezymalnej teorii powłok plastycznych, por. [75]. Należy pamiętać, że otrzymane równania odnoszą się będą również do zakresu umiarkowanie dużych ugięć.

Przyjmijmy ortogonalny układ współrzędnych z osiami x_α ($\alpha=1, 2$) leżącymi na powierzchni środkowej konstrukcji i osią x_3 , skierowaną wzdłuż normalnej do tej powierzchni. Jeśli stosunek grubości ścianki $2h$ do wymiaru liniowego konstrukcji R jest mały, $2h/R \ll 1$, to naprężenia normalne w kierunku grubości elementu mogą być pominięte, $\sigma_{33}=0$, i pozostałe składowe tensora naprężenia σ_{ij} mogą być przedstawione przez tensor $\sigma_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta=1, 2$) oraz wektor $\sigma_{\alpha 3}$ ($\alpha=1, 2$).

Wypadkowe naprężenia w ustalonym punkcie powierzchni środkowej X_α , mianowicie tensor momentów zginających $M_{\alpha\beta}$, tensor sił membranowych $N_{\alpha\beta}$ i wektor siły poprzecznej T_α zdefiniowane są następująco:

$$(4.1) \quad M_{\alpha\beta} = \int_{-h}^h \sigma_{\alpha\beta} x_3 dx_3, \quad N_{\alpha\beta} = \int_{-h}^h \sigma_{\alpha\beta} dx_3, \quad T_\alpha = \int_{-h}^h \sigma_{\alpha 3} dx_3.$$

Dla konstrukcji cienkich, w których stosunek grubości do promienia krzywizny ρ_β ($\beta=1, 2$) jest mały, $2h/\rho_\beta \ll 1$, tensory $M_{\alpha\beta}$ i $N_{\alpha\beta}$ są symetryczne.

Zgodnie z założeniem płaskich przekrojów i prostych normalnych składowe tensora prędkości odkształcenia $\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta}$ w dowolnej warstwie x_3 wyrażają się przez tensor prędkości wydłużenia $\dot{\lambda}_{\alpha\beta}$ i tensor krzywizny powierzchni środkowej $\dot{\kappa}_{\alpha\beta}$:

$$(4.2) \quad \dot{\varepsilon}_{\alpha\beta}(x_3) = \dot{\lambda}_{\alpha\beta} + x_3 \dot{\kappa}_{\alpha\beta}.$$

Szereg badań dla konstrukcji plastycznych [68] i lepkoplastycznych [84] wykazał, że wpływ efektów ścinających na uplastycznienie i dalsze odkształcenia konstrukcji jest niewielki, jeśli $2h/R \ll 1$. Przyjmijemy zatem dalsze założenie upraszczające, że $\dot{\varepsilon}_{3\alpha} = \dot{\gamma}_\alpha = 0$ oraz że odpowiadające składowym wektora $\dot{\varepsilon}_{3\alpha}$ naprężenia $\sigma_{3\alpha}$ nie wchodzi do prawa fizycznego. Stan naprężenia w każdej warstwie powłoki traktować można jako płaski, a więc drugi niezmiennik tensora naprężenia J_2 oraz dewiator s_{ij} przyjmą postać

$$(4.3) \quad J_2 = \frac{1}{6} (3\sigma_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\alpha} \sigma_{\beta\beta}),$$

$$s_{\alpha\beta} = \frac{1}{6} (3\sigma_{\alpha\beta} - \sigma_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta}).$$

Wykorzystując powyższe związki wyspecyfikować można z (3.7) zlinearyzowane prawo konstytutywne w płaskim stanie naprężenia:

$$(4.4) \quad \dot{\varepsilon}_{\alpha\beta}^* = \frac{\gamma}{6k} [(3\sigma_{\alpha\beta} - \sigma_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta}) - (3\sigma_{\alpha\beta}^* - \sigma_{\gamma\gamma}^* \delta_{\alpha\beta})],$$

$$\dot{\varepsilon}_{33}^* = -\dot{\varepsilon}_{\gamma\gamma}^*.$$

Po odwróceniu równań (4.4) otrzymuje się ostatecznie

$$(4.5) \quad \sigma_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\beta}^* = \frac{2k}{\gamma} (\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta}^* + \dot{\varepsilon}_{\gamma\gamma}^* \delta_{\alpha\beta}).$$

Zgodnie z założeniem składowe tensora $\sigma_{\alpha\beta}^*$ spełniają statyczny warunek plastyczności w płaskim stanie naprężenia.

Prawo płynięcia dla powłok. Prawo to otrzymuje się przez odpowiednie scałkowanie funkcji (4.5) w przedziale grubości elementu wykorzystując definicję (4.1):

$$(4.6) \quad M_{\alpha\beta} - M_{\alpha\beta}^* = \frac{4h^3}{3} \frac{k}{\gamma} (\dot{\kappa}_{\alpha\beta}^* + \dot{\kappa}_{\gamma\gamma}^* \delta_{\alpha\beta}),$$

$$N_{\alpha\beta} - N_{\alpha\beta}^* = 4h \frac{k}{\gamma} (\dot{\lambda}_{\alpha\beta}^* + \dot{\lambda}_{\gamma\gamma}^* \delta_{\alpha\beta}).$$

W szczególnym przypadku powłok osiowo-symetrycznych $M_{12} = M_{21} = N_{12} = N_{21} = 0$ i z (4.6) uzyskuje się następujące związki wyprowadzone wcześniej [86]:

$$\begin{aligned}
 M_1 - M_1^* &= \frac{4h^3}{3} \frac{k}{\gamma} (2\dot{\kappa}_1 + \dot{\kappa}_2), \\
 M_2 - M_2^* &= \frac{4h^3}{3} \frac{k}{\gamma} (2\dot{\kappa}_2 + \dot{\kappa}_1), \\
 N_1 - N_1^* &= 4h \frac{k}{\gamma} (2\dot{\lambda}_1 + \dot{\lambda}_2), \\
 N_2 - N_2^* &= 4h \frac{k}{\gamma} (2\dot{\lambda}_2 + \dot{\lambda}_1),
 \end{aligned}
 \tag{4.7}$$

gdzie indeksy 1, 2 oznaczają kierunki główne w powłoce. Jeśli porównamy równania (4.6) lub (4.7) z odpowiednimi związkami dla lepkoplastycznych powłok, wyprowadzonymi na podstawie prawa płynięcia stowarzyszonego z warunkiem plastyczności Treski [7] i Hubera-Misesa [52], to uwagę zwraca prostota obecnych równań. Są one liniowe względem naprężeń i prędkości uogólnionych odkształceń i posiadają tę samą postać dla całej konstrukcji, tzn. nie wymagają rozpatrywania różnych obszarów, ponieważ opierają się na ciągłym warunku plastyczności. Efekty giętne i membranowe w równaniach (4.6) są ze sobą sprzężone ze względu na występowanie wyrazów $M_{\alpha\beta}^*$ i $N_{\alpha\beta}^*$. Jak dotąd o tensorach tych wiadomo, że spełniać one muszą statyczny warunek plastyczności Hubera-Misesa w sześciowymiarowej przestrzeni C_6 (naprężenia $\sigma_{\alpha\beta}^*$, z którego wynikają tensory $M_{\alpha\beta}$ i $N_{\alpha\beta}$, spełnia statyczny warunek plastyczności Hubera-Misesa w płaskim stanie naprężenia):

$$\Phi(M_{\alpha\beta}^*, N_{\alpha\beta}^*) = 0.
 \tag{4.8}$$

W celu jednoznacznego określenia tensorów $M_{\alpha\beta}^*$ i $N_{\alpha\beta}^*$ w każdym punkcie konstrukcji lepkoplastycznej, poddanej obciążeniu dynamicznemu, wprowadza się następującą hipotezę:

stan uogólnionego naprężenia $M_{\alpha\beta}^$, $N_{\alpha\beta}^*$ odpowiada rozwiązaniu problemu quasi-statycznego płynięcia konstrukcji sztywno-idealnie plastycznej przy tych samych warunkach brzegowych, które formułujemy dla rzeczywistego procesu dynamicznego.*

Motywacja powyższej hipotezy sprowadza się do następujących dwóch spostrzeżeń. Po pierwsze, stan naprężenia w konstrukcjach scharakteryzowany jest przez tzw. profil naprężenia. Profil ten jest jednoznacznie określony przez prawidłowo sformułowane warunki brzegowe. Zatem warunki brzegowe określają dość dokładnie profil naprężenia na powierzchni płynięcia $\Phi=0$; istnieje jednak w dalszym ciągu dowolność w wyborze $M_{\alpha\beta}^*$, $N_{\alpha\beta}^*$, gdyż różne rozkłady sił powierzchniowych mogą być w równowadze z wypadkowymi naprężeniami. Zauważmy dalej, że momenty i siły w konstrukcji są na podstawie prawa płynięcia jednoznacznie określone przez mechanizm płynięcia, tzn. pole prędkości przemieszczeń. W wielu badaniach doświadczalnych, np. [92], zwrócono uwagę, że pole prędkości w przeważającej części procesu dynamicznego nie zmienia się zbytnio i jest podobne do odpowiedniego pola dla procesu quasi-statycznego. Wynikający z tego ostatniego rozkład sił wewnętrznych $M_{\alpha\beta}^*$, $N_{\alpha\beta}^*$ będzie dobrą aproksymacją odpowiedniego pola $M_{\alpha\beta}^0$, $N_{\alpha\beta}^0$ zgodnie z definicją (3.6).

Wykorzystując liniowe równania równowagi dla powłok można zastąpić składowe $M_{\alpha\beta}^*$, $N_{\alpha\beta}^*$ przez pojedynczy wyraz reprezentujący wektor obciążeń zewnętrznych $p_\alpha(x_\alpha)$.

Konstrukcja może osiągnąć stan graniczny dla różnych rozkładów sił powierzchniowych. Przy wyborze najodpowiedniejszego rozkładu należy brać pod uwagę względy prostoty dalszego rozwiązywania równań, np. równomiernie rozłożone ciśnienie $p(x_\alpha) = \text{const}$. Jednocześnie rozkład ciśnień powinien być taki, aby odpowiadający mu mechanizm quasi-statycznego płynięcia jak najlepiej przybliżał spodziewane pole prędkości w procesie dynamicznym. W zastosowaniach późniejszych pokazane zostanie, że oba te żądania można ze sobą pogodzić.

Ponieważ w rozwiązaniu statycznym dla powierzchni płynięcia (4.8) efekty giętne i membranowe są sprzężone, wzajemne oddziaływanie momentów i sił membranowych w równaniach (4.6) lub (4.7) jest zapewnione przez występowanie tensorów $M_{\alpha\beta}^*$ i $N_{\alpha\beta}^*$. Należy podkreślić, że wielkości te nie muszą być dla całego procesu dynamicznego stałe. Na przykład w przypadku umiarkowanie dużych ugięć w płytach następuje redystrybucja sił i momentów tak, że $M_{\alpha\beta}^*$ i $N_{\alpha\beta}^*$ stają się funkcjami parametru procesu. Zagadnienie to omówione będzie dokładniej w rozdziale 6 przy okazji rozwiązywania konkretnych problemów brzegowych.

5. BADANIE DOKŁADNOŚCI ZLINEARYZOWANEGO PRAWA PŁYNIĘCIA

W tym rozdziale zbadane zostanie na kilku przykładach zagadnienie, w jakim stopniu wyprowadzone równania (4.6) aproksymują odpowiednie związki oparte na stowarzyszonym prawie płynięcia (3.3). Natomiast porównanie rozwiązań uzyskanych za pomocą równań (4.6) z wynikami doświadczeń przedstawione będzie w następnych dwóch rozdziałach. Przykłady dotyczyć będą kolejno:

- 1) quasi-statycznego płynięcia swobodnie podpartej płyty kołowej, obciążonej równomiernie rozłożonym ciśnieniem;
- 2) quasi-statycznego płynięcia cylindrycznej powłoki bez siły osiowej, obciążonej ciśnieniem wewnętrznym;
- 3) quasi-statycznego płynięcia nieskończonej powłoki cylindrycznej obciążonej pierścieniem sił;
- 4) dynamicznego płynięcia swobodnie podpartej płyty kołowej, obciążonej prostokątnym impulsem ciśnienia.

Rozważane typy konstrukcji są jedynymi, dla których stowarzyszone prawo konstytutywne, transformowane do przestrzeni sił uogólnionych, ma stosunkową prostą postać. We wszystkich przypadkach rozwiązania otrzymane na podstawie obecnej teorii określone są przez proste wyrażenia analityczne. Podobnie we wszystkich przypadkach rozwiązania uwzględniające nieliniowe związki (3.3) uzyskane zostały na drodze numerycznej. Przedstawione przykłady, z wyjątkiem powłoki cylindrycznej obciążonej ciśnieniem, stanowią wyniki własnych prac autora.

Płyta kołowa. W teorii momentowej dla płyt siły membranowe i odpowiadające im prędkości rozciągnięć są równe zero: $N_{\alpha\beta} = \dot{\lambda}_{\alpha\beta} = 0$. Kierunkami głów-

nymi jest kierunek promieniowy r i obwodowy φ . Ze związków (4.7) otrzymuje się wówczas

$$(5.1) \quad 2\dot{\kappa}_r + \dot{\kappa}_\theta = \frac{B}{M_0} (M_r - M_r^*), \quad 2\dot{\kappa}_\theta + \dot{\kappa}_r = \frac{B}{M_0} (M_\theta - M_\theta^*),$$

gdzie $M_0 = \sigma_0 h^2$, natomiast $B = 3\sqrt{3}\gamma/4h$. Ponieważ dla płyt kołowych kierunki naprężeń głównych wszystkich warstw pokrywają się, całkowanie równania (3.3) w przedziale grubości płyty nie zmienia typu związku. Stowarzyszone prawo płynięcia dla lepkoplastycznej płyty ma zatem postać

$$(5.2) \quad \dot{\kappa}_r = \frac{B}{M_0} \left(1 - \frac{M_0}{\sqrt{M_r^2 - M_r M_\theta + M_\theta^2}} \right) (2M_r - M_\theta),$$

$$\dot{\kappa}_\theta = \frac{B}{M_0} \left(1 - \frac{M_0}{\sqrt{M_r^2 - M_r M_\theta + M_\theta^2}} \right) (2M_\theta - M_r).$$

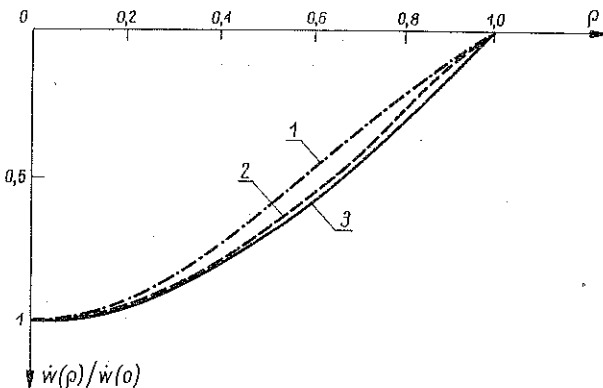
Odpowiednie formuły dla płyty sztywno-idealnie plastycznej przy warunku plastyczności Hubera-Misesa są następujące:

$$(5.3) \quad \dot{\kappa}_r = \lambda(2M_r - M_\theta), \quad \dot{\kappa}_\theta = \lambda(2M_\theta - M_r), \quad M_r^2 - M_r M_\theta + M_\theta^2 = M_0^2.$$

W przypadku swobodnego podparcia i obciążenia równomiernie rozłożonym ciśnieniem nośność graniczna płyty wynosi $p_0 = 6,51 M_0/R^2$. Lepkoplastyczne płynięcie nastąpi, jeśli ciśnienie przekracza wartość p_0 . Rozwiązanie dla prędkości ugięcia \dot{w} przy zlinearyzowanych równaniach (5.1), określone w pracy [85], ma postać

$$(5.4) \quad \dot{w}(\rho) = \frac{p - p_0}{256} [6\rho^4 - 28\rho^2 + 22],$$

gdzie $\rho = r/R$ jest bezwymiarowym promieniem płyty. Rozwiązanie numeryczne dla równań (5.2) podane zostało w pracy [80]; pole prędkości ugięcia dla materiału idealnie plastycznego (5.3) wyznaczył również numerycznie EASON [17]. Porównanie tych trzech rozwiązań przedstawione jest na rys. 10. Różnice w zlinearyzowanym



Rys. 10. Znormalizowane pole prędkości swobodnie podpartej płyty kołowej:

1—materiał sztywno-plastyczny, 2—materiał sztywno-lepkoplastyczny i stowarzyszone prawo płynięcia, 3—materiał sztywno-lepkoplastyczny i niestowarzyszone prawo płynięcia

połu prędkości są minimalne i z dokładnością do grubości linii niedostrzegalne dla związków (5.2) i (5.3). Oznacza to, że dodatkowe uwzględnienie własności lepkich materiału ma minimalny wpływ na rozkład naprężeń $M_{\alpha\beta}^*$ wzdłuż profilu naprężenia w płycie.

Powłoka cylindryczna. Powłoka cylindryczna bez siły osiowej swobodnie podparta na brzegu i obciążona równomiernym ciśnieniem wewnętrznym, badana była w pracach PABIANEK [53].

Przytoczymy tutaj najważniejsze wyniki ilustrujące oba rozważane prawa płynięcia. Jeśli za osie główne (1, 2) przyjąć oś z i promień powłoki r , to prawo płynięcia wyprowadzone na podstawie (3.3) ma następującą postać parametryczną:

$$(5.5) \quad \frac{M_1}{M_0} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\operatorname{ctg}^2 q \ln \frac{1 + \sin q}{1 - \sin q} - \frac{2}{\sin q} \right] \mp \frac{4\nu}{3\gamma},$$

$$\frac{N_2}{N_0} = \pm \frac{1}{2} \operatorname{ctg} q \ln \frac{1 + \sin q}{1 - \sin q} \pm \frac{\sqrt{3}}{\gamma} \nu \operatorname{ctg} q,$$

$$\dot{\lambda}_2 = \pm 2\nu \operatorname{ctg} q, \quad \dot{\kappa}_1 = \mp 2h \frac{\sqrt{3}}{2} \nu,$$

gdzie $N_0 = 2h\sigma_0$. Prawo płynięcia wyprowadzone z (4.6) przy założeniu $\dot{\kappa}_2 = 0$, $N_1 = 0$ jest znacznie prostsze:

$$(5.6) \quad M_1 - M_1^* = \frac{8hM_0}{3\sqrt{3}\gamma} \dot{\kappa}_1,$$

$$N_2 - N_2^* = \frac{N_0}{\sqrt{3}\gamma} (2\dot{\lambda}_2 + \dot{\lambda}_1),$$

$$N_1 - N_1^* = \frac{N_0}{\sqrt{3}\gamma} (2\dot{\lambda}_1 + \dot{\lambda}_2).$$

Pole prędkości w problemie quasi-statycznego płynięcia powłoki opisanej związkami (5.6) posiada postać

$$(5.7) \quad \dot{w} = \frac{4\sqrt{3}}{3} (p - p_0) [C_1 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x - C_2 \operatorname{ch} x \operatorname{sm} x - \operatorname{ch} x \cos x - 1],$$

gdzie p_0 jest nośnością graniczną powłoki, zależną od parametru geometrycznego $c^2 = 2L^2/Rh$.

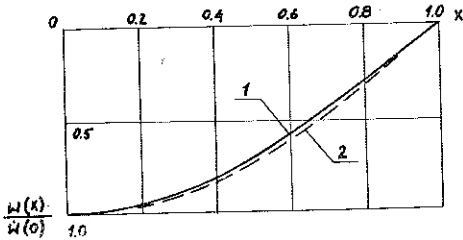
Rozwiązanie numeryczne dla równań (5.5) przy przyjęciu $c = 125$ pokazuje rys. 11. Widać, że w obu przypadkach znormalizowane pola prędkości różnią się nieznacznie.

Nieskończona powłoka cylindryczna. Powłoka ta obciążona pierścieniem sił $2Q$, studiowana była w ramach zlinearyzowanego prawa płynięcia (5.6) w pracach

[86 i 90]. Zakładając zerowanie się prędkości ugięcia \dot{w} i jej pochodnej \dot{w}' w nieskończoności otrzymuje się następujące wyrażenie na pole prędkości w powłoce:

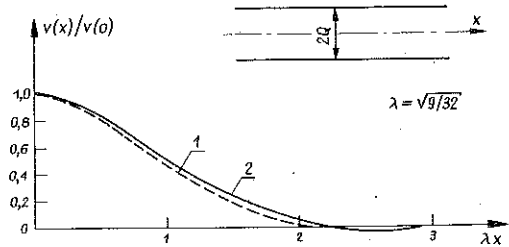
$$(5.8) \quad \dot{w}(x) = \frac{3\sqrt{3}\gamma\sqrt{\beta}}{8N_0\lambda^3} [Q - Q_0] e^{-\lambda x} (\cos \lambda x + \sin \lambda x),$$

gdzie $\beta = 2R/h$, $\lambda = \sqrt[4]{9/32}$, a nośność graniczna wynosi $Q_0 = 1,949 \sqrt{\beta/N_0}$.



Rys. 11. Porównanie znormalizowanych pól prędkości dla lepkoplastycznej powłoki cylindrycznej:

1-stowarzyszone prawo płynięcia, 2-niestowarzyszone prawo płynięcia



Rys. 12. Pola prędkości dla nieskończonej powłoki cylindrycznej:

1-materiał sztywno-plastyczny i stowarzyszone prawo płynięcia, 2-materiał lepkoplastyczny i niestowarzyszone prawo płynięcia

Odpowiednie rozwiązanie dla powłoki lepkoplastycznej, opisanej równaniami (5.5), nie jest znane w literaturze, ale ciekawe jest porównanie formuły (5.8) z rozwiązaniem SAWCZUKA i HODGE'A [69], otrzymanym dla ścisłego prawa płynięcia powłok sandwichowych z materiału sztywno-idealnie plastycznego (rys. 12). Przebieg znormalizowanego profilu prędkości ugięcia jest podobny z tym zastrzeżeniem, że zasięg uplastycznienia powłoki idealnie plastycznej jest skończony, a powłoka lepkoplastyczna płynie aż do nieskończoności.

Dynamiczne płynięcie płyty kołowej. Przedstawione do tej pory porównania stowarzyszonych i niestowarzyszonych praw płynięcia dotyczyły przypadków quasi-stacynarnego płynięcia. Płynięcie to dla małych ugięć charakteryzuje się stacynarnością pola prędkości przemieszczeń.

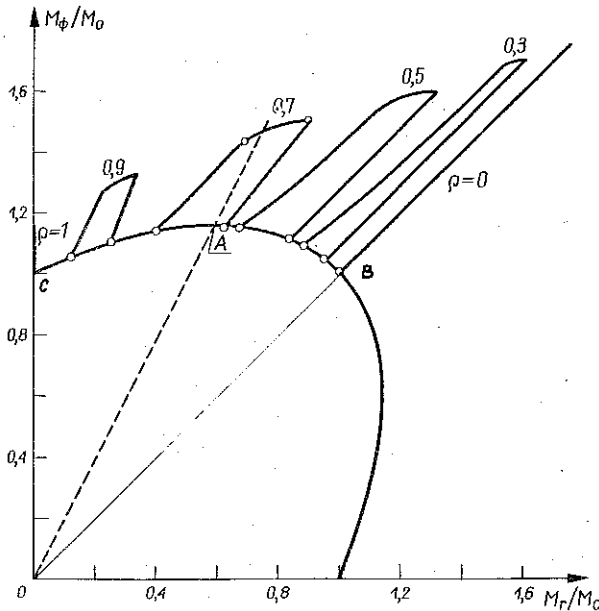
We wszystkich badanych przypadkach odpowiednie pola w problemach statycznych i dynamicznych tylko nieznacznie różniły się od siebie i to tłumaczy dużą dokładność rozwiązań uzyskanych w ramach zlinearyzowanych związków fizycznych. W problemach dynamicznych pole prędkości w konstrukcji jest na ogół niestacynarne i może ulegać znacznym zmianom w trakcie trwania procesu. Sprawdzenie stosowalności liniowej teorii mieć będzie w tym przypadku większe znaczenie praktyczne.

Rozważmy swobodnie podpartą płytę kołową obciążoną równomiernie rozłożonym prostokątnym impulsem ciśnienia o intensywności $p(t) = 10 M_0/R^2$ i czasie trwania $\tau = 10^{-4}$ s. Płyta w chwili $t=0$ jest nieruchoma i płaska. Ruch odbywa się w dwóch fazach. W pierwszej każda cząstka jest przyspieszana na skutek działania

ciśnienia. W drugiej fazie po zdjęciu obciążenia płyta porusza się w dalszym ciągu, ale prędkości maleją w miarę, jak energia kinetyczna ulega zamianie na pracę plastyczną.

Numeryczne rozwiązanie powyższego problemu brzegowego dla związków konstytutywnych (5.2) opisane zostało dokładnie w pracy [81]. Zastosowano tam niejawnie schematy różnicowe dla pochodnych czasowych i dla każdego przekroju względem czasu rozwiązywano iteracyjnie dwupunktowe zagadnienie brzegowe dla układu nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych.

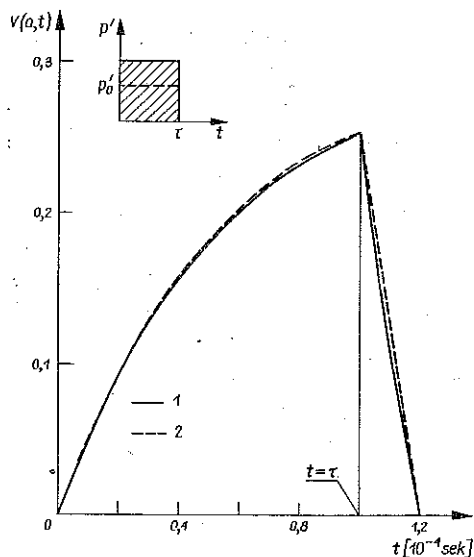
Ten sam problem brzegowy analizowany był w ramach przedstawionej tu teorii w [83]. Rozwiązanie uzyskano w postaci szybkozbieżnych szeregów nieskończonych. Dokładne omówienie techniki rozwiązywania zagadnień dynamicznych w przypadku prawa płynięcia (5.2) przedstawione będzie w następnym rozdziale; w tym miejscu podane zostaną niektóre gotowe wyniki związane z dyskusją dokładności równań (4.6).



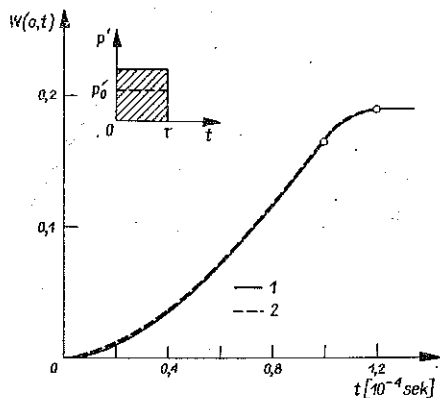
Rys. 13. Trajektorie momentów dla swobodnie podpartej lepkoplastycznej płyty pod działaniem prostokątnego impulsu ciśnienia. Wyniki obliczeń numerycznych dla modelu sztywno-lepkoplastycznego i stowarzyszonego prawa płynięcia

Sprawdzenie dokładności zaproponowanej hipotezy wygodnie jest przeprowadzić na płaszczyźnie M_r, M_θ (rys. 13). Ze względu na warunki brzegowe $M_r = M_\theta$ dla $r=0$ i $M_r=0$ dla $r=R$ profil naprężenia zawiera się między prostymi OB i OC . Pokazane linią grubą pętla są trajektoriami naprężeń dla różnych wartości promienia r w problemie dynamicznym dla równań (5.2). Punkt przecięcia wektora (M_r, M_θ) ze statyczną powierzchnią płynięcia, np. punkt A , reprezentuje zmienny w procesie dewiator s_{ij}^0 [por. równanie (3.5)]. Kółeczkami leżącymi na statycznej powierzchni plastyczności zaznaczono dla każdego promienia odpowiednią wartość

$M_{\alpha\beta}^*$ znaną z rozwiązania odpowiedniego problemu statycznego dla modelu idealnie plastycznego (5.3) [26]. Widać, że pętle są stosunkowo wąskie i redukują się do linii prostych na końcach profilu momentów. Największy błąd w wyborze wielkości z gwiazdkami popełnia się wewnątrz obszaru całkowania; warunki symetrii i podparcia powodują, że błąd ten maleje do zera na obu brzegach płyty $r=0$ i $r=R$.



Rys. 14. Zmiana ugięcia środka płyty w czasie: 1—rozwiązanie analityczne dla niestowarzyszonego prawa płynięcia, 2—rozwiązanie numeryczne dla stowarzyszonego prawa płynięcia



Rys. 15. Prędkość ugięcia środka płyty jako funkcji czasu:

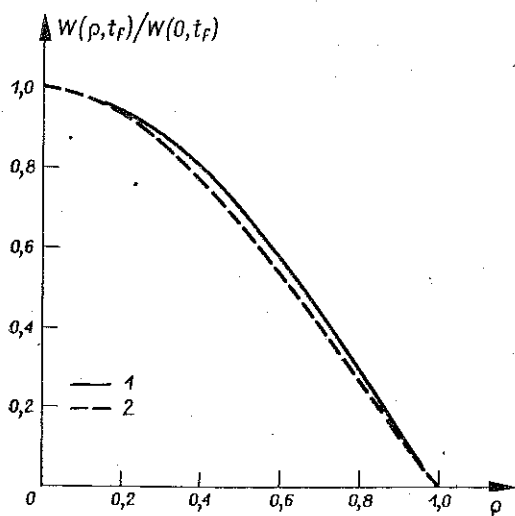
1—rozwiązanie analityczne dla niestowarzyszonego prawa płynięcia, 2—rozwiązanie numeryczne dla stowarzyszonego prawa płynięcia

Jak pokazują dalsze porównania, błąd ten tylko w niewielkim stopniu wpływa na wykres prędkości ugięć w trakcie procesu i na końcowe ugięcia płyty. Rysunki 14 i 15 przedstawiają zmianę ugięcia i prędkości ugięcia środka płyty w czasie dla rozwiązania analitycznego i numerycznego. Różnice są prawie niezauważalne. Ostateczny kształt zdeformowanej płyty jest również dla obu przypadków podobny (rys. 16). Powyższe wyniki potwierdzają poprawność przyjętej hipotezy przy linearyzacji równań konstytutywnych. Wyjątkowo dobra dokładność obecnej teorii w zastosowaniu do rozpatrywanego zagadnienia jest znowu wynikiem podobieństwa pól prędkości w procesie dynamicznym i statycznym.

W problemach brzegowych ze znanym początkowym polem prędkości dewiator s_{ij}^* różni się w pierwszej chwili znacznie od s_{ij}^0 ze względu na różnicę w aktualnym i statycznym polu prędkości. Jest to częściowo skompensowane przez fakt, że punkt naprężenia znajduje się w tym stadium ruchu daleko od statycznej powierzchni płynięcia i odstępstwo od własności normalności wektora ϵ_{ij} nie jest duże (α jest małe).

W dalszych stadiach ruchu prędkości maleją w miarę, jak energia kinetyczna zamieniona jest na pracę plastyczną i punkt naprężenia zbliża się do powierzchni $F=0$. Towarzyszy temu często «wygładzenie» pola prędkości, które upodobnia się

do statycznego pola prędkości. W rezultacie dewiacja od kierunku normalnego do chwilowej powierzchni płynięcia jest stosunkowo mała w trakcie całego procesu de-



Rys. 16. Profil trwałych ugięć płyty:

1-rozwiązanie analityczne dla niestowarzyszonego prawa płynięcia,
2-rozwiązanie numeryczne dla stowarzyszonego prawa płynięcia

formacji i niestowarzyszone prawo płynięcia stosować również można dla obciążeń «idealnym impulsem».

Wszystkie przedstawione w tym rozdziale wyniki dla procesów quasi-statycznych i dynamicznych dotyczyły konstrukcji kołowo-symetrycznych. Pokazano na przykładach, że stosowalność zlinearyzowanego prawa płynięcia jest dla takich konstrukcji wystarczająco udokumentowana. Brak jest natomiast jakichkolwiek danych porównawczych dla konstrukcji nie spełniających warunku osiowej symetrii, np. płyt prostokątnych lub otwartych powłok cylindrycznych.

Zagadnienie dla swobodnie podpartej płyty kwadratowej rozwiązane zostało w ramach liniowych związków fizycznych w [82]; nie znane są jednak odpowiednie wyniki dla dokładnych równań (3.3).

CZĘŚĆ DRUGA: ZASTOSOWANIA

6. METODA ROZWIĄZYWANIA ZAGADNIEŃ POCZĄTKOWO-BRZEGOWYCH

Wyprowadzenie równań opisujących dynamiczną deformację konstrukcji lepkoplastycznych i omówienie metod całkowania tych równań pokazane będzie na przykładzie zamocowanej płyty kołowej, obciążonej równomiernie rozłożonym impulsem ciśnienia. Rozpatrzone będą oddzielnie: teoria momentowa, odnosząca się do małych ugięć, oraz teoria momentowo-membranowa, która może być stosowana dla umiarkowanie dużych ugięć. W tym ostatnim przypadku płyta deformuje się podobnie jak mała wyniosła powłoka kulista. Wybrane zagadnienie jest więc reprezentatywne dla całej klasy osiowo-symetrycznych konstrukcji.

Sformułowanie problemu matematycznego dla małych ugięć. Odpowiednie prawo płynięcia wyprowadzone z (4.6) przy założeniu $N_{\alpha\beta} = \dot{\lambda}_{\alpha\beta} = 0$ dane jest przez wzór (5.1). Związki geometryczne w teorii momentowej mają postać

$$(6.1) \quad \dot{\kappa}_r = -\dot{w}'', \quad \dot{\kappa}_\theta = -\frac{1}{r} \dot{w}',$$

gdzie znakiem «prim» i kropką oznaczone są odpowiednio pochodne względem czasu i promienia płyty.

Równanie ruchu uwzględniające bezwładność ruchu poprzecznego ma postać

$$(6.2) \quad rM_r'' + 2M_r' - M_0' + rP - \mu r\ddot{w} = 0,$$

gdzie P oznacza ciśnienie zewnętrzne, a μ masę płyty na jednostkę pola powierzchni środkowej. Zakładamy, że każdy punkt płyty z wyjątkiem $r=R$ otrzymuje początkową prędkość $V_0 = I/\mu$, gdzie I jest intensywnością jednorodnie rozłożonego impulsu. Dalszy ruch płyty odbywa się kosztem nagromadzonej energii kinetycznej bez działania wyrazu rP .

Równania (5.1) i (6.2) zapisane zostały w wielkościach fizycznych. Dla wygody wprowadza się następujące wielkości bezwymiarowe:

$$(6.3) \quad w = \frac{W}{R}, \quad m_r = \frac{M_r}{M_0}, \quad m_0 = \frac{M_0}{M_0}, \quad n_r = \frac{N_r}{N_0}, \quad \tilde{I} = \frac{IR^2}{M_0 t_f^2},$$

$$\rho = \frac{r}{R}, \quad p = P \frac{R^2}{M_0}, \quad \alpha = \frac{\mu R^3}{M_0 t_f^2}, \quad \beta = \frac{2R}{h}, \quad \tau = \frac{t}{t_f}, \quad t_f = \frac{I}{P_0},$$

gdzie t_f odpowiada końcowi ruchu według rozwiązania dla płyty idealnie plastycznej. Pozostałe wielkości zdefiniowane zostały wcześniej.

Bezwymiarowa postać równania ruchu jest następująca:

$$(6.4) \quad \rho m_r'' + 2m_r' - m_0 - \alpha \rho \ddot{w} = 0.$$

Eliminując prędkości krzywizn z równań (5.1) i (6.1) otrzymujemy w bezwymiarowych wielkościach równania:

$$(6.5) \quad m_r - m_r^* = \frac{4}{3\tilde{\gamma}\beta} \left(-2\dot{w}'' - \frac{\dot{w}'}{\rho} \right), \quad m_0 - m_0^* = \frac{4}{3\tilde{\gamma}\beta} \left(-\dot{w}'' - \frac{2\dot{w}'}{\rho} \right),$$

gdzie bezwymiarowa stała lepkości wynosi $\tilde{\gamma} = \sqrt{3}\gamma t_f$. Zgodnie z hipotezą stan m_r^* , m_0^* znajduje się w statycznej równowadze:

$$(6.6) \quad \rho(m_r^*)'' + 2(m_r^*)' - (m_0^*)' - \rho p^*(\rho) = 0$$

oraz z definicji spełniać musi warunek plastyczności Hubera-Misesa (5.3). Istnieje jednak w dalszym ciągu dowolność w wyborze rozkładu ciśnienia $p^*(\rho)$ uplastyczniającego płytę. Ze względu na prostotę dalszych obliczeń przyjmujemy równomierne obciążenie całej powierzchni płyty. Obciążenie graniczne dla zamocowanych warunków brzegowych wynosi wówczas $p^* = 12,5$.

Odejmując stronami równania (6.4) i (6.6) otrzymuje się

$$(6.7) \quad \rho(m_r - m_r^*)'' + 2(m_r - m_r^*)' - (m_0 - m_0^*)' + \rho p^* - \alpha \rho \ddot{w} = 0.$$

Wstawiając do (6.7) funkcje (6.5) eliminuje się z tych równań momenty m_r , m_0 i uzyskuje się jedno równanie na ugięcie pionowe $w(\rho, t)$:

$$(6.8) \quad \nabla^4 \ddot{w} + a\alpha \ddot{w} + \rho p^* = 0,$$

gdzie $\nabla^2 = \partial^2/\partial\rho^2 + 1/\rho \cdot \partial/\partial\rho$ oznacza operator Laplace'a we współrzędnych cylindrycznych, przy czym $a = 3\tilde{\gamma}\beta/8$. Równanie (6.8) jest niejednorodnym równaniem

różniczkowym cząstkowym typu parabolicznego. Ze względu na czwarty rząd pochodnej względem promienia i drugi rząd pochodnej względem czasu wymagane są cztery warunki brzegowe i dwa warunki początkowe.

Momenty i prędkości krzywizn są związane ze sobą w sposób jednoznaczny przez prawo fizyczne (4.6). Stąd, w odróżnieniu do materiałów idealnie plastycznych, nieciągłości w polu prędkości ugięć i występowanie przegubów plastycznych jest dla lepkoplastycznych płyt niedopuszczalne. Na zamocowanym brzegu przyjmując zatem trzeba $\dot{w} = \dot{w}' = 0$ i podobnie w ośrodku płyty $\dot{w}' = 0$. Ze względu na symetrię w środku płyty $m_r = m_\theta$.

Również w pomocniczym problemie quasi-statycznym $m_r^* = m_\theta^*$; czyli podobna równość zachodzi dla różnic $m_r - m_r^* = m_\theta - m_\theta^*$. Wykorzystując prawo płynięcia warunek ten można wyrazić bezpośrednio przez prędkości ugięcia. Otrzymujemy ostatecznie

$$(6.9) \quad \begin{aligned} \dot{w}'' - \frac{\dot{w}'}{\rho} &= 0, & \dot{w}' &= 0 & \text{dla } \rho &= 0; \\ \dot{w}' &= 0, & \dot{w} &= 0 & \text{dla } \rho &= 1. \end{aligned}$$

Przyjmując obciążenie płyty idealnym impulsem i zakładając, że płyta w chwili początkowej jest płaska, warunki początkowe można napisać w postaci

$$(6.10) \quad w(\rho, 0) = 0, \quad \dot{w}(\rho, 0) = \begin{cases} \bar{I}/\alpha, & \text{jeśli } 0 \leq \rho < 1, \\ 0, & \text{jeśli } \rho = 1. \end{cases}$$

Równanie (6.8) łącznie z warunkami (6.9) i (6.10) stanowi prawidłowo sformułowany problem początkowo-brzegowy.

Postać równania (6.8) jest formalnie taka sama, jak w przypadku wymuszonych drgań cienkich płyt sprężystych z tą różnicą, że zamiast samych ugięć występują tutaj prędkości ugięć. Korzyści z takiego sformułowania są duże, ponieważ wiele metod całkowania równań opracowanych dla ciał sprężystych przenieść można z niewielkimi zmianami na przypadek konstrukcji lepkoplastycznych.

Analogia ta jest jednak tylko formalna, ponieważ deformacja ciał lepkoplastycznych związana jest z nieodwracalną dysypacją energii, wykluczającą występowanie drgań. Zjawiska odciażania i propagacji stref sztywnych w konstrukcjach są charakterystyczne dla rozpatrywanego tutaj modelu ciała.

Jest rzeczą godną podkreślenia, że równanie (6.8), opisujące ruch płyty, zostało wyprowadzone bez znajomości rozkładu momentów $m_r^*(\rho)$ i $m_\theta^*(\rho)$ wzdłuż promienia płyty. Ta własność naszej metody jest ważna w zastosowaniach praktycznych, ponieważ analityczne wyrażenia na rozwiązanie quasi-statyczne dla warunku plastyczności Hubera-Misesa nie są znane w literaturze. Zamiast $M_{\alpha\beta}^*$ w równaniu (6.8) pojawia się jeden skalarny wyraz $\rho p^*(\rho)$. Przyjęciu różnych rozkładów obciążeń $p^*(\rho)$ odpowiada różny stopień aproksymacji wielkości $M_{\alpha\beta}^*$. Decydując się na pewien szczególny rozkład jednostkowego ciśnienia $p^*(\rho)$, odpowiedni mnożnik obciążenia granicznego dobiera się zgodnie z metodami nośności granicznej.

Rozwiązanie. W przypadku gdy wyraz wymuszający w równaniu (6.8) jest stały, wygodną metodą rozwiązania tego równania jest metoda funkcji i wartości własnych. Nie wchodząc w szczegóły rachunkowe podamy od razu wzór na $w(\rho, t)$ spełniający (6.8), (6.9) i (6.10):

$$(6.11) \quad w(\rho, \tau) = \frac{I^2 R}{p^* \mu M_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_1(\lambda_n)}{\lambda_n^5 I_0(\lambda_n) J_0^2(\lambda_n)} \psi_n(\lambda_n, \rho) \left[\left(1 - e^{-\frac{\lambda_n^4 \tau}{\eta}}\right) \left(1 + \frac{\eta}{\lambda_n^4}\right) - \tau \right] \eta,$$

gdzie funkcje własne $\psi_n(\lambda_n, \rho)$ oznaczają

$$(6.12) \quad \psi_n(\lambda_n, \rho) = I_0(\lambda_n) J_0(\lambda_n, \rho) - J_0(\lambda_n) I_0(\lambda_n, \rho).$$

Parametr η w rozwiązaniu (6.11) wynosi $\eta = \alpha \alpha p^* \sqrt{I}$, a J_0 i I_0 są odpowiednio funkcjami Bessela i zmodyfikowanymi funkcjami Bessela pierwszego rodzaju ($\nu=0, 1$). Wartości własne λ_n są pierwiastkami równania przestępnego

$$(6.13) \quad I_0(\lambda_n) J_1(\lambda_n) + J_0(\lambda_n) I_1(\lambda_n) = 0.$$

Wartości pierwszych paru λ_n są następujące:

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
3,19619	6,30635	9,43955	12,5777	15,7165
λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	
18,8565	21,9972	25,1380	28,2790	

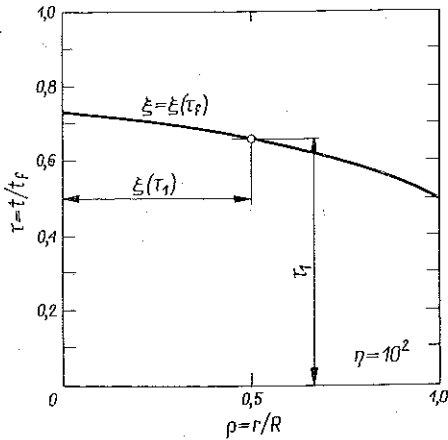
Ponieważ we wzorze (6.11) występuje pod sumą w mianowniku wyraz λ_n^5 , szereg ten jest szybko zbieżny. Dokładny dowód zbieżności rozwiązania podać można wykorzystując metodę zaproponowaną w pracy [54]. Wyrażenie na prędkość ugięcia otrzymać można różniczkując względem czasu wyraz po wyrazie (6.11).

Ruch płyty ustanie, kiedy prędkość w danym punkcie osiągnie zero lub też ugięcia osiągną maksimum. Równanie (6.11) dopuszcza formalnie występowanie ujemnych wielkości \dot{w} , ale sytuacja taka jest fizycznie niemożliwa, gdyż sztywna plastyczna konstrukcja zatrzyma się i w stanie tym będzie już pozostawać aż do wystąpienia następnych zaburzeń zewnętrznych. *Nieliniowość rozważanego problemu tkwi zatem w problemie odciążania.* Ponieważ kolejne funkcje własne $\psi_n(\lambda_n, \rho)$ osiągają maksima dla różnych czasów $\tau_f^{(n)}$, płyta nie zatrzyma się we wszystkich swoich punktach jednocześnie. Na płaszczyźnie fazowej (ρ, τ) rozróżnić można krzywą $\xi = \xi(\tau_f)$, która rozdziela obszar lepkoplastycznego płynięcia od obszaru sztywnego. Granicę tę określa następujące równanie:

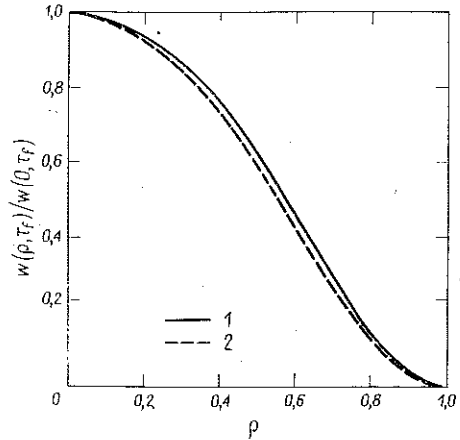
$$(6.14) \quad \frac{d}{dt} [w(\rho, \tau)]_{t=\tau_f} = 0.$$

Krzywa $\xi = \xi(\tau_f)$, znaleziona na drodze numerycznej dla wartości parametru $\eta = 100$, pokazana jest na rys. 17. Strefa sztywna propaguje się począwszy od zamocowanego brzegu dla $\tau = 0,5$ i osiąga środek płyty w czasie $\tau = 0,73$. Dla czasów

pośrednich $0,5 < \tau < 0,73$ deformuje się wewnętrzny obszar kołowy $0 < \rho < \xi$, podczas gdy zewnętrzny obszar pierścieniowy $\xi < \rho < 1$ jest sztywny. Podobne zjawisko propagacji stref sztywnych w lepkoplastycznym pręcie uderzającym w sztywną tarczę opisane zostało przez SYMONDSA i TINGA [76].



Rys. 17. Propagacja sztywnych stref w problemie impulsowego obciążenia płyty



Rys. 18. Końcowy profil ugięć zamocowanej płyty:

1—dokładne rozwiązanie analityczne, 2—rozwiązanie przybliżone (pierwszy wyraz szeregu)

Znając moment zatrzymania się każdego punktu płyty obliczyć można z (6.11) końcowe ugięcia. Profil trwałych ugięć dla $\eta = 100$ obliczony przy uwzględnieniu dziesięciu wyrazów szeregu przedstawiony jest na rys. 18 (linia ciągła). Linia kreskowana na tym samym rysunku zaznaczona jest rozwiązaniem uwzględniającym tylko jeden wyraz szeregu (6.11). Różnica obu rozwiązań jest bardzo mała. Upoważnia to do podania prostego rozwiązania przybliżonego.

Moment zerowania się pierwszej wartości własnej $\dot{w}(\xi, \tau_f^{(1)}) = 0$ obliczony z (6.14) wynosi

$$(6.15) \quad \tau_f^{(1)} = \frac{\eta}{\lambda_1^4} \ln \left(1 + \frac{\lambda_1^4}{\eta} \right).$$

Podstawiając $\tau_f^{(1)}$ do pierwszego wyrazu szeregu (6.11) i wykorzystując własności ortogonalności funkcji $\psi_n(\lambda_n, \rho)$ otrzymuje się

$$(6.16) \quad w(\rho, \tau_f) = \frac{I^2 R}{p^* \mu M_0} \frac{\lambda_1^4}{64} (1 - \rho^2)^2 \left[1 - \zeta \ln \left(1 + \frac{1}{\zeta} \right) \right],$$

gdzie $\zeta = \eta / \lambda_1^4$. W szczególności ugięcie środka płyty δ uzyskuje się z (6.16), przyjmując $\rho = 0$, $\lambda_1^4 = 3,196$ i $p^* = 12,5$:

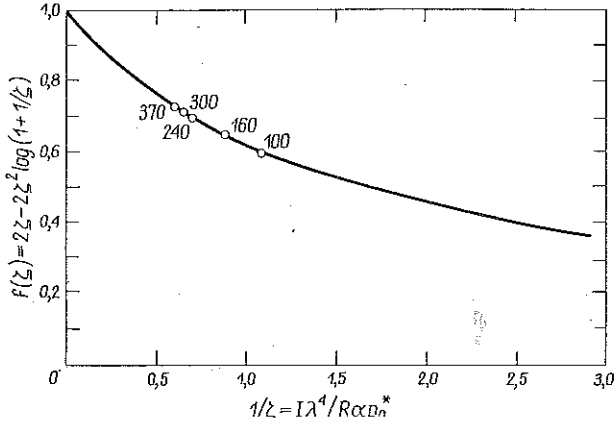
$$(6.17) \quad \frac{\delta}{R} = 0,54 \frac{I^2 R}{8 \mu M_0} \left[2\zeta - 2\zeta \ln \left(1 + \frac{1}{\zeta} \right) \right].$$

Przypadek szczególny materiału sztywno-idealnie plastycznego otrzymuje się z (6.15) i (6.17) przez przejście ze stałą lepkości do nieskończoności, $\gamma \rightarrow \infty$, co pociąga za sobą $\zeta \rightarrow \infty$. W granicy zarówno $\tau_f^{(1)}$ jak i wyrażenie w nawiasie kwadratowym w (6.17) dążą do jedności i w wielkościach fizycznych ugięcie środka płyty i czas trwania procesu wynoszą

$$(6.18) \quad \delta = 0,54 \frac{I^2 R^2}{8\mu M_0}, \quad t_f = \frac{I}{p^*}.$$

Rozwiązanie to pokrywa się z wcześniejszym wynikiem WANGA i HOPKINSA [79] dla płyty z materiału sztywno-idealnie plastycznego przy warunku plastyczności Treski z tą różnicą, że w tym ostatnim współczynnik liczbowy wynosił 0,56.

Odwrotnie, jeśli $\gamma \rightarrow \infty$ (stąd $\zeta \rightarrow 0$), co odpowiada materiałowi idealnie sztywnemu, to ugięcie wyliczone z (6.17) wynosi zero. Zmiana współczynnika $[2\zeta - 2\zeta^2 \ln(1 + 1/\zeta)]$ jako funkcja $1/\zeta$ przedstawiona jest na rys. 19 linią ciągłą. Wykres ten wskazuje na wzrost wytrzymałości płyty przy zmniejszaniu się stałej lepkości materiału.



Rys. 19. Zmniejszenie ugięć środka płyty spowodowane lepkością materiału

Z przeprowadzonej dyskusji rozwiązania dla teorii momentowej wynika, że opisuje ona w prosty sposób podstawowe efekty plastyczne i lepkie w procesach dynamicznych. Teoria ta dotyczy małych ugięć, co ogranicza w pewnym stopniu jej przydatność w zastosowaniach praktycznych. Znaczenie jej polega również na tym, że wyjaśniając rolę lepkości materiału w konstrukcjach lepkoplastycznych stwarza punkt wyjścia do badań nad efektami zmian wielkości geometrycznych w tych konstrukcjach.

7. UMIARKOWANIE DUŻE UGIĘCIA

Założenia upraszczające. Analiza skończonych ugięć płyt wymaga zasadniczej modyfikacji związków geometrycznych i równań równowagi oraz stwarza konieczność rozpatrywania stanu giętno-membranowego. Zgodnie z dyskusją przeprowadzoną w rozdziałach 2 i 4 przyjmuje się poprawność prawa płynięcia (4.7) również dla

umiarkowanie dużych ugięć. Pozostałe założenia upraszczające typu «statycznego» i «kinematycznego» są takie same jak w odpowiednich pracach DUSZEK [14 i 15] i JONESA [29 i 30], dotyczących konstrukcji idealnie plastycznych. W szczególności zaniedbując składową poziomą wektora przemieszczenia U , JONES posługiwał się następującymi związkami geometrycznymi:

$$(7.1) \quad \dot{\lambda}_r = w' \dot{w}', \quad \dot{\lambda}_\theta = 0, \quad \dot{\kappa}_r = -\dot{w}'', \quad \dot{\kappa}_\theta = -\frac{1}{r} \dot{w}'$$

oraz równaniem równowagi dynamicznej:

$$(7.2) \quad rM_r'' + 2M_r' - M_\theta' + N_\theta w' - rP - \mu r \ddot{w} = 0.$$

Dla ilustracji metody rozwiążemy ten sam przykład płyty zamocowanej rozważanej w rozdziale 6. W wielkościach bezwymiarowych zdefiniowanych za pomocą wzorów (6.3), równanie (7.2) można napisać w postaci:

$$(7.3) \quad rm_r'' + 2m_r' - m_\theta' + \beta n_\theta w' - \alpha \rho \ddot{w} = 0$$

przy założeniu, że w procesie dynamicznym wyraz wymuszający jest równy zeru. W stosunku do zagadnienia małych ugięć równanie (7.3) wzbogacone zostało o wyraz nieliniowy $\beta n_\theta w'$.

Prawo płynięcia (4.7) po wykorzystaniu równań geometrycznych (7.1) przyjmie postać

$$(7.4) \quad m_r - m_r^* = -\left(2\dot{w}'' + \frac{\dot{w}'}{\rho}\right) \frac{4}{3\tilde{\gamma}\beta}, \quad m_\theta - m_\theta^* = -\left(\dot{w}'' + 2\frac{\dot{w}'}{\rho}\right) \frac{4}{3\tilde{\gamma}\beta},$$

$$n_r - n_r^* = 2\dot{w}' w' \frac{1}{\tilde{\gamma}}, \quad n_\theta - n_\theta^* = \dot{w}' w' \frac{1}{\tilde{\gamma}}.$$

Dalsza różnica w stosunku do prostej teorii momentowej występuje w definicji stanu $M_{\alpha\beta}^*$, $N_{\alpha\beta}^*$. Zgodnie z hipotezą momenty i siły membranowe muszą równoważyć obciążenie zewnętrzne p^* (w_0) w problemie quasi-statycznego płynięcia konstrukcji przy tych samych warunkach brzegowych:

$$(7.5) \quad \rho(m_r^*)'' + 2(m_r^*)' - (m_\theta^*)' + \beta n_\theta^*(w^*)' - \rho p^*(w_0) = 0.$$

Z teorii nośności granicznej płyt przy umiarkowanie dużych ugięciach wiadomo, że obciążenie graniczne jest rosnącą funkcją (dla statecznych konfiguracji) parametru procesu. Jako parametr procesu wygodnie jest przyjąć ugięcie środka płyty w_0 [36 i 51]. Zależność $p^* = p^*(w_0)$ dla płyty zamocowanej przy warunku plastyczności Hubera-Misesa nie jest znane w literaturze.

Posłużyć się musimy rozwiązaniem przybliżonym CALLEDINE'A [8] (rys. 20). Część tego rozwiązania reprezentowana jest w postaci analitycznej przez parabolę

$$(7.6) \quad \frac{p^*}{p_0^*} = 1 + \frac{5}{12} \left(\frac{w_0}{2h}\right)^2 \quad \text{dla} \quad \frac{w_0}{2h} \leq \frac{2}{3},$$

pozostała część dla $w_0/2h > 2/3$ znaleziona została na drodze obliczeń numerycznych. Zaznaczone jest również na rysunku (linia przerywana) rozwiązanie membranowe

ONATA i HAYTHORNTHWAITA [51] otrzymane przy użyciu warunku plastyczności Treski, opisanym na elipsie Hubera-Misesa. Rozwiązanie to reprezentowane jest linią prostą

$$(7.7) \quad \frac{p^*}{p_0^*} = 1,11 \frac{w_0}{2h}.$$

Z rysunku 20 widać, że przy wzroście ugięcia rozwiązanie momentowo-membranowe dąży do rozwiązania membranowego.

Dobrym przybliżeniem krzywej Calledine'a w całym przedziale ugięć jest linia

$$(7.8) \quad \frac{p^*}{p_0^*} = \sqrt{1 + \left(\frac{w_0}{2h}\right)^2}.$$

We wzorach (7.6) – (7.8) wielkość p_0^* oznacza nośność graniczną z teorii momentowej, czyli $p_0^* = 12,5$.

Równania równowagi (7.5) i (7.3) zawierają wyrazy w' i $(w^*)'$ będące pochodnymi ugięcia odpowiednio w procesie statycznym i dynamicznym. Podobieństwo dynamicznego i quasi-statycznego profilu ugięcia stwierdzone zostało w pracy [92] (rys. 21). Linia przerywana jest rozwiązaniem numerycznym EASONA [17], linie ciągłe są końcowymi profilami ugięć płyt aluminiowych dla różnych wartości impulsu, zmierzonymi doświadczalnie [92].

W dalszym ciągu przyjmiemy założenie upraszczające, $w' = (w^*)'$. Jest ono zgodne z przyjętą hipotezą, ponieważ aproksymacja momentów $M_{\alpha\beta}^*$ i sił $N_{\alpha\beta}^*$ jest dokładna tylko w przypadku, kiedy statyczne i dynamiczne pola prędkości ugięć są podobne.

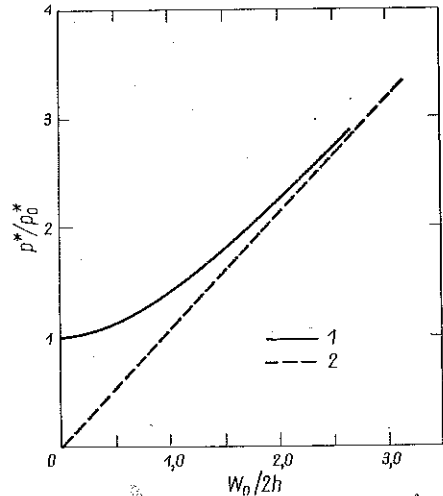
Odejmując stronami (7.2) i (7.5) otrzymujemy

$$(7.9) \quad \rho(m_r - m_r^*)'' + 2(m_r - m_r^*)' - (m_\theta - m_\theta^*)' + \beta(n_\theta - n_\theta^*)w' + \rho p^*(w_0) - \alpha \rho \ddot{w} = 0.$$

Podstawiając do (7.1) funkcję (7.4) dochodzimy do ostatecznej postaci równania opisującego w przybliżony sposób ruch płyty w zakresie umiarkowanie dużych ugięć:

$$(7.10) \quad L(w) \equiv \nabla^4 \dot{w} + \alpha \alpha \ddot{w} + \alpha p^*(w_0) + \frac{3\beta^2}{8} \dot{w}' w' w'' = 0.$$

Równanie (7.10) w porównaniu z (6.8) zawiera dodatkowy nieliniowy wyraz. Warunki brzegowe i początkowe takie same jak w przypadku małych ugięć dane są przez (6.9) i (6.10).



Rys. 20. Zależność obciążenia od ugięcia dla zamocowanej płyty kołowej:

1 – rozwiązanie momentowo-membranowe, 2 – rozwiązanie membranowe

Rozwiązanie i dyskusja. Ponieważ rozwiązanie początkowo-brzegowe problemu dla nieliniowego równania (7.10) w postaci analitycznej nie wydaje się możliwe, poszukiwać będziemy przybliżonego rozwiązania za pomocą metody Galerkin. Metoda ta stosowana jest szeroko w nieliniowej analizie drgań płyt i powłok [50].

Rozwiązania poszukuje się w postaci szeregu

$$(7.11) \quad w(\rho, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(\tau) \psi_n(\rho),$$

gdzie $\psi_n(\rho)$ tworzą zupełny układ funkcji ortogonalnych, spełniających warunki brzegowe, natomiast $w_n(\tau)$ są zmiennymi w czasie amplitudami. Dla płyty zamocowanej warunki brzegowe są spełnione, jeśli przyjąć

$$(7.12) \quad \psi_n(\rho) = (1 - \rho^2)^{n+2}, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Nieznane funkcje $w_n(\tau)$ określa się z układu równań

$$(7.13) \quad \int_0^1 L(w_n) \psi_i(\rho) \rho d\rho = 0, \quad i=0, 1, 2, \dots, n.$$

W rozwiązaniu dla małych ugięć pierwszy wyraz szeregu dawał dokładną aproksymację znormalizowanego profilu ugięcia (rys. 18). Z kolei w doświadczeniach dla umiarkowanie dużych ugięć (rys. 21), profil ugięcia zmieniał się nieznacznie z wielkością impulsu. Uwzględniając tylko jeden wyraz w szeregu (7.11) i dokonując całkowania (7.13), otrzymuje się następujące nieliniowe równanie różniczkowe zwyczajne, opisujące ruch środka płyty:

$$(7.14) \quad \ddot{w}_0 + \left(\frac{\lambda}{\alpha\alpha} \right)^4 (1 + S_1 \beta^2 w_0^2) \dot{w}_0 + \frac{10}{6\alpha} p^*(w_0) = 0,$$

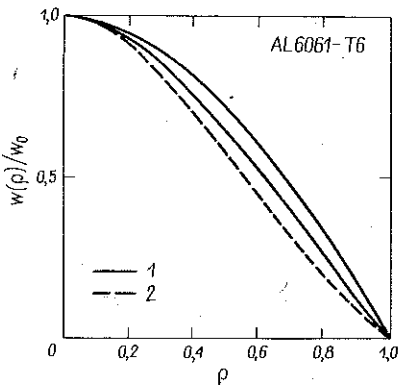
gdzie $\lambda=3,2$ a $S_1=1/375$. W granicznym przypadku małych ugięć $p^*(w_0)$ jest stałe, wyraz $S_1 \beta w_0^2$ może być pominięty i rozwiązaniem równania (7.14) jest wyrażenie (6.17). Jedyna różnica występuje w wartości własnej, która w dokładnym rozwiązaniu wynosi $\lambda_1=3,196$. Powyższe przejście graniczne świadczy, z jednej strony, o dokładności metody przybliżonej GALERKINA (7.13), z drugiej strony, pozwala na dokładne sprecyzowanie warunków początkowych. Wyznaczenie stałych całkowania w równaniu (7.14) wymaga znajomości prędkości początkowej środka płyty $\dot{w}_0(0)$; samo ugięcie dla $t=0$ wynosi zero, $w_0(0)=0$. Rozwiązanie przybliżone z jednym stopniem swobody (pierwszy wyraz szeregu) nie spełnia warunków początkowych (6.10) uwzględniających równomierny rozkład prędkości $\dot{w}(\rho, 0) = \dot{I}/\alpha$.

Energia przy prostokątnym rozkładzie prędkości ujęta jest przez poszczególne wyrazy szeregu (6.11) w pierwszym stadium ruchu, odpowiadającym małym ugięciom. Ponieważ pierwsze wyrazy szeregów (6.11) i (7.14) są identyczne, racjonalnym wyborem brakującego warunku początkowego dla równania (7.14) jest przyjęcie

rozkładu prędkości $\dot{w}(\rho, 0)$ dla pierwszego wyrazu (6.11). Różniczkując czas względem (6.11) i podstawiając $t=0$ i $\rho=0$ otrzymujemy

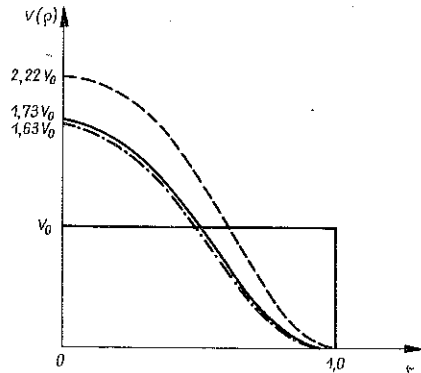
$$(7.15) \quad \dot{w}_0(0) = \frac{\lambda^4}{64} \frac{\bar{f}}{\alpha}.$$

Rzeczywisty rozkład prędkości początkowej i jego aproksymacja (7.15) pokazane są na rys. 22. Dla porównania pokazano linią przerywaną profil prędkości otrzymany przy założeniu, że cała początkowa energia kinetyczna określona jest pierwszym wyrazem. Kryterium to prowadzi do znacznego zawyżenia wartości $w_0(0)$, a co za tym idzie końcowych ugięć płyty. W rzeczywistości część energii objęta jest



Rys. 21. Profile trwałych ugięć dla zamocowanej płyty:

1—krzywe doświadczalne (Wierzbicki, Florence),
2—rozwiązanie Easona



Rys. 22. Różne metody aproksymacji początkowego pola prędkości

dalszymi wyrazami szeregu; ulega ona szybko dysypacji związanej ze zmianą postaci pola prędkości nie wpływając na wielkość końcowych ugięć konstrukcji. W przypadku kiedy nie znane jest rozwiązanie analityczne, pole początkowej prędkości wyznaczyć można według metody zaproponowanej przez SYMONDSA i MARTINA [100]

$$(7.16) \quad \int_0^1 \dot{w}(\rho, 0) \psi(\rho) \rho d\rho = \dot{w}_0(0) \int_0^1 \psi^2(\rho) \rho d\rho.$$

Udowodniono, że dla materiałów idealnie plastycznych obliczona ze wzoru (7.16) początkowa prędkość minimalizuje różnice między rzeczywistym rozwiązaniem i rozwiązaniem wykorzystującym rozdzielnie zmiennych. Metoda ta daje dobre wyniki również dla konstrukcji lepkoplastycznych, o czym świadczy porównanie warunków początkowych uzyskanych z (7.15) (linia ciągła) i (7.16) (linia kropkowa-nana; rys. 22.).

Wróćmy obecnie do równania (7.14). Wyraz $p^*(w_0)$, zgodnie z rozwiązaniem CALLEDINE'A (7.6), wyraża się przez w_0 w formie

$$(7.17) \quad p^*(w_0) = p_0^* (1 + S_2 \beta^2 w_0^2),$$

gdzie $S_2=1/38,4$. Przyjmując $S_1=S_2=S$ i dokonując zmiany zmiennych $\ddot{w}_0 = \dot{w}_0 dw_0/dw$ podać można rozwiązanie równania (7.14) w kwadraturach:

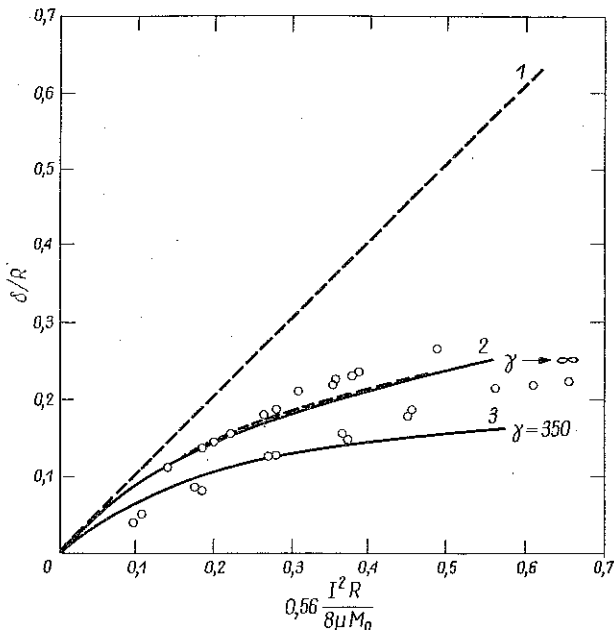
$$(7.18) \quad \frac{a\alpha}{\lambda^4} \dot{w}_0 - \left(\frac{a\alpha}{\lambda^4}\right)^2 \frac{10p_0^*}{6\alpha} \ln \left(\dot{w}_0 + \frac{10p_0^* \alpha}{6\lambda^4} \right) = - \left(w_0 + s\beta^2 \frac{w_0^2}{3} \right) + C.$$

Stałą C określa warunek początkowy (7.15).

Wielkość trwałych ugięć środka płyty δ otrzymamy przyjmując w (7.18) $\dot{w}_0=0$:

$$(7.19) \quad \frac{\delta}{R} + \frac{S\beta^2}{3} \left(\frac{\delta}{R} \right)^3 = 0,54 \frac{I^2 R}{8\mu M_0} \left[2\zeta - 2\zeta \ln \left(1 + \frac{1}{\zeta} \right) \right].$$

Zaniedbując wpływ zmian geometrycznych $S=0$ otrzymuje się z (7.19) rozwiązanie dla małych ugięć (6.17). Porównując oba rozwiązania widać, że wyrazy opisujące wpływ prędkości odkształcenia są w teorii momentowej i momentowo-membranowej identyczne. Podobnie proste wyrażenia analityczne na trwałe ugięcia płyty otrzymać można w przypadku granicznym $\gamma \rightarrow \infty$ dla funkcji $p_0^*(w_0)$ określonej wzorami (7.7) i (7.8), [92].



Rys. 23. Porównanie teorii i doświadczenia w problemie impulsowego obciążenia płyty:

1-teoria momentowa, materiał sztywno-idealnie plastyczny, 2-teoria momentowo-membranowa, materiał sztywno-idealnie plastyczny, 3-teoria momentowo-membranowa, materiał sztywno-lepkoplastyczny

Porównanie przewidywań naszej teorii z wynikami doświadczeń omawianych w rozdziale 2 [92] przedstawione jest na rys. 23. Górna ciągła linia otrzymana została z (7.19) przez przyjęcie $\gamma \rightarrow \infty$. Przebiega ona dość blisko punktów doświadczalnych, dla aluminium, ale dla dużych wartości impulsu teoria daje wartości zaniżone. Przyczyną tego są m.in. realizowane eksperymentalnie warunki brzegowe. Zamocowa-

nie nie pozwalało na obrót umożliwiając jednak płynięcie w kierunku promieniowym, podczas gdy w teorii przyjęto upraszczające założenie $U=0$.

Wpływ lepkości materiału opisany jest przez funkcję $f(\zeta)$ (rys. 19). Porównanie rozwiązania (7.19) z punktami doświadczalnymi dla miękkiej stali polegało na znalezieniu wartości stałej lepkości potrzebnej do uzyskania pełnej korelacji. Dla każdej wartości impulsu obliczony został na podstawie pomiarów stosunek ugięć płyty stalowej i aluminiowej; zawierał się on pomiędzy 0,6 i 0,72. Przyrównanie tego stosunku ugięć z funkcją $f(\zeta)$ dla kolejnych impulsów pozwalało na znalezienie odpowiadającej wartości ζ , a stąd, zgodnie z definicją, $\zeta = 3\sqrt{3}p_0^* \gamma \mu R^2 / I h \lambda^4$, obliczona była wartość γ . Na rys. 19 kółeczkami zaznaczone są znalezione tą drogą wartości γ , odpowiadające poszczególnym wartościom impulsu. Stała lepkości waha się w granicach od 100 do 370 s^{-1} . Wybierając pośrednią wartość $\gamma = 350 s^{-1}$ otrzymano na podstawie rozwiązania (7.19) krzywą aproksymującą wykres punktów doświadczalnych dla stali (dolna ciągła linia na rys. 23). Brak zgodności dla intensywnych impulsów wywołany jest wspomnianym efektem płynięcia płyty w kierunku promieniowym na zamocowanym brzegu.

Powyższa analiza wykazała, że model materiału z liniową lepkością opisuje w pierwszym przybliżeniu wpływ prędkości odkształcenia na trwałe deformacje konstrukcji. Dokładniejsze wyniki uzyskać można jedynie w ramach bardziej realistycznego modelu z nieliniową lepkością.

Jako szczególny przypadek naszej teorii otrzymuje się zadowalające rozwiązania dla konstrukcji sztywno-idealnie plastycznych w zakresie umiarkowanie dużych ugięć. Zwiększenie dokładności rozwiązania jest możliwe również przez dodatkowe uwzględnienie składowej poziomej wektora przemieszczenia U oraz przyjęcie ścisłej funkcji $p^*(w_0)$ dla warunku plastyczności Hubera-Misesa. Poprawki takie nie przedstawiają specjalnych trudności, ale wówczas odpowiednio zmodyfikowane równania różniczkowe zwyczajne opisujące ruch środka płyty należałoby całkować metodami numerycznymi.

8. OMÓWIENIE POZOSTAŁYCH ROZWIĄZAŃ

W poprzednich dwóch rozdziałach omówiono dokładnie metodę rozwiązywania zagadnień początkowo-brzegowych w ramach zlinearyzowanego prawa płynięcia dla lepkoplastycznych konstrukcji. Analizując przykład zamocowanej płyty kołowej zwrócono uwagę na wady i zalety obecnej teorii i przeprowadzono jej weryfikację doświadczalną. Przedstawiony przykład nie wyczerpuje wszystkich uzyskanych do tej pory rozwiązań. Omówimy z kolei pozostałe rozwiązania szczegółowe:

- 1) uderzenie pocisku w środek zamocowanej płyty kołowej,
- 2) impulsowe obciążenie swobodnie podpartej płyty kołowej oraz
- 3) impulsowe obciążenie swobodne podpartej powłoki cylindrycznej.

Pierwsze dwa problemy rozwiązane zostały przez autora w przypadku małych [33 i 83] i umiarkowanie dużych ugięć [91 i 87]. Trzeci problem rozważała w pracy doktorskiej PABIANEK [54] ograniczając się do małych ugięć.

Zagadnienie uderzenia. Zagadnienie uderzenia jest interesujące zarówno z punktu widzenia poznawczego jak i zastosowań praktycznych. Prowadzi ono do ciekawego zagadnienia matematycznego, które udało się rozwiązać w postaci analitycznej. Warto nadmienić, że nieznanne jest w literaturze rozwiązanie analogicznego problemu brzegowego ani w teorii plastyczności, ani w teorii sprężystości. Dlatego przedstawione będą dokładnie poszczególne etapy rozwiązania i zwrócona zostanie uwaga na precyzję matematyczną. Najpierw rozważony będzie przypadek małych ugięć; uogólnienie na umiarkowanie duże ugięcia będzie miało charakter przybliżony. Rozważmy zamocowaną płytę kołową i założmy, że w chwili $t=0$ w środek płyty uderza masa M poruszająca się z prędkością V . Zakładamy ponadto, że masa jest idealnie sztywna i promień jej jest zanedbywalny w stosunku do promienia płyty R . W chwili uderzenia masa ulega zahamowaniu i wynikające stąd opóźnienie powoduje powstanie punktowej siły tnącej T , działającej w środku płyty. Historia zmiany siły $T(t)$ w czasie jest nie znaną funkcją i musi być poszukiwana jako część rozwiązania. Stanowi to podstawową trudność matematyczną w obecnym zadaniu.

Warunki brzegowe mają postać

$$(8.1) \quad \begin{aligned} \dot{w} &= 0, & \dot{w}' &= 0 & \text{dla } r &= R, \\ \lim_{r \rightarrow 0} \dot{w} &< \infty, & \lim_{r \rightarrow 0} 2\pi r T &= [M\ddot{w}]_{r=0}, \end{aligned}$$

a warunki początkowe

$$(8.2) \quad \begin{aligned} \dot{w}(\rho, 0) &= 0 & \text{dla } r &\neq 0, \\ \dot{w}(\rho, 0) &= V & \text{dla } r &= 0. \end{aligned}$$

Występuje tu nieciągłość w początkowym polu prędkości w punkcie $r=0$. Podobna nieciągłość występowała w przypadku obciążenia impulsowego na zamocowanym końcu płyty. Jako stowarzyszony problem quasi-statyczny wybieramy zagadnienie siły punktowej działającej w punkcie $r=0$. Dla warunku plastyczności Hubera-Misesa graniczna wartość tej siły wynosi $T^* = 4\pi M_0 / \sqrt{3}$.

Wykorzystując równanie równowagi momentów

$$(8.3) \quad (rM_r)' - M_\theta = rT$$

oraz prawo płynięcia można wyrazić ostatni warunek brzegowy (8.1) całkownie w prędkościach:

$$(8.4) \quad \lim_{r \rightarrow 0} 2\pi r \frac{2M_0}{3B} \frac{d}{dr} (\nabla^2 \dot{w}) = - \left[\frac{4\pi M_0}{\sqrt{3}} - M\ddot{w} \right]_{r=0}.$$

Ponieważ problem dla małych ugięć wygodniej jest rozwiązywać w samych prędkościach, wprowadźmy nowe wielkości bezwymiarowe

$$(8.5) \quad v = \frac{\dot{w}}{BR^2}, \quad \rho = \frac{r}{R}, \quad \alpha = \frac{3BR^4\mu}{2M_0}, \quad \beta = \frac{M}{\mu R^2},$$

gdzie $B=3\sqrt{3}\gamma/4h$ oraz parametr β jest stosunkiem masy pocisku do masy płyty. Dla problemu z siłą punktową równanie ruchu nie zawiera wyrazu niejednorodnego. Odpowiednikiem (6.8) jest w tym przypadku równanie

$$(8.6) \quad \nabla^4 v + \alpha \dot{v} = 0.$$

Warunek brzegowy (8.4) we współrzędnych bezwymiarowych posiada postać

$$(8.7) \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} 2\pi\rho \frac{d}{d\rho} (\nabla^2 v) = [-2\pi\sqrt{3} - \alpha\beta\dot{v}]_{\rho=0}.$$

Rozwiązanie (8.6), spełniające warunki (8.7), (8.1) i (8.2), może być wyrażone przez funkcję

$$(8.8) \quad v(\rho, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \psi_n(\rho) e^{-\frac{\lambda_n^4 t}{\alpha}} - f_0(\rho),$$

gdzie $\psi_n(\rho)$ jest rozwiązaniem następującego równania różniczkowego zwyczajnego:

$$(8.9) \quad \nabla^4 \psi_n + \lambda_n^4 \psi_n = 0,$$

przy warunkach brzegowych

$$(8.10) \quad \psi_n(1) = 0, \quad \left[\frac{d}{d\rho} \psi_n(\rho) \right]_{\rho=1} = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \psi_n < \infty,$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} 2\pi\rho \frac{d}{d\rho} (\nabla^2 \psi_n) = \beta \lambda_n^4 \psi_n^4(0),$$

oraz gdzie $f_0(\rho)$ spełnia równanie

$$(8.11) \quad \nabla^4 f_0 = 0$$

i warunki

$$(8.12) \quad f_0(1) = 0, \quad \left[\frac{d}{d\rho} f_0(\rho) \right]_{\rho=1} = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} f_0 < \infty, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} 2\pi\rho \frac{d}{d\rho} (\nabla^2 f_0) = 2\pi\sqrt{3}.$$

Rozwiązaniem równania (8.9) jest funkcja

$$(8.13) \quad \psi_n(\rho) = J_0(\lambda_n, \rho) + C_1 Y_0(\lambda_n, \rho) + C_2 I_0(\lambda_n, \rho) + C_3 K_0(\lambda_n, \rho),$$

gdzie J_0, I_0, Y_0 i K_0 oznaczają funkcje Bessela pierwszego i drugiego rodzaju. Równanie określające wartości własne λ_n otrzymuje się z warunków (8.10)

$$(8.14) \quad J_0(\lambda_n) I_1(\lambda_n) + J_1(\lambda_n) I_0(\lambda_n) - \frac{\lambda_n^2 \beta}{8} \left\{ \left[Y_0(\lambda_n) + \frac{2}{\pi} K_0(\lambda_n) \right] \times \right.$$

$$\left. \times [J_1(\lambda_n) + I_1(\lambda_n)] - \left[Y_1(\lambda_n) + \frac{2}{\pi} K_1(\lambda_n) \right] [Y_0(\lambda_n) - I_0(\lambda_n)] \right\} = 0,$$

przy czym funkcje własne po wyliczeniu stałych są następujące:

$$(8.15) \quad \psi_n(\rho) \frac{1}{2} [J_0(\lambda_n, \rho) + I_0(\lambda_n, \rho)] - \frac{\lambda_n^2 \beta}{8} \left[Y_0(\lambda_n, \rho) + \frac{2}{\pi} K_0(\lambda_n, \rho) \right] - \\ - \frac{\alpha_n}{2} [J_0(\lambda_n, \rho) - I_0(\lambda_n, \rho)],$$

gdzie

$$(8.16) \quad \alpha_n = \frac{J_0(\lambda_n) + I_0(\lambda_n) - \frac{\lambda_n^2 \beta}{4} \left[Y_0(\lambda_n) + \frac{2}{\pi} K_0(\lambda_n) \right]}{J_0(\lambda_n) - I_0(\lambda_n)}$$

Przy zmianie parametru β od zera do nieskończoności wartości własne maleją od pierwiastków równania

$$(8.17) \quad J_0(\lambda_n) I_1(\lambda_n) - J_1(\lambda_n) I_0(\lambda_n) = 0,$$

które są stabilizowane, do odpowiednich pierwiastków równania

$$(8.18) \quad \left[Y_0(\lambda_n) + \frac{2}{\pi} K_0(\lambda_n) \right] [J_1(\lambda_n) + I_1(\lambda_n)] - \\ - \left[Y_1(\lambda_n) + \frac{2}{\pi} K_1(\lambda_n) \right] [J_0(\lambda_n) - I_0(\lambda_n)] = 0.$$

Pierwsza wartość własna wynosi $\lambda_1 = 0$. Zbadanie zachowania się pierwszego pierwiastka przy $\beta \rightarrow \infty$ jest ważne dla dalszej analizy. Rozkładając równanie (8.18) w szereg potęgowy względem λ_1 i pomijając wyrazy w potęgę wyższej niż 5 otrzymujemy

$$(8.19) \quad \lambda_1 - \frac{\lambda_1^5}{96} - \frac{\lambda_1^5 \beta}{16\pi} = 0,$$

skąd

$$(8.20) \quad \lambda_1^4 = \frac{16\pi}{\beta} \left(1 + \frac{\pi}{6\beta} \right).$$

Rozwinięcie asymptotyczne (8.20) wskazuje na bardzo wolną zmianę pierwszej wartości własnej jako funkcji parametru β . Na przykład dla $\beta = 0$, $\lambda_1 = 3,2$ oraz gdy $\beta = 800$ odpowiada $\lambda_1 = 0,5$. Asymptotyczne rozwinięcie dla wyższych wartości własnych ($n = 2, 3$) ma postać

$$(8.21) \quad \operatorname{tg} \left(\lambda_n - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{8}{\lambda_n^2 \beta},$$

co wskazuje, że wartości pierwiastków zmieniają się w granicach

$$(8.22) \quad n\pi - \frac{\pi}{2} < \lambda_n < n\pi.$$

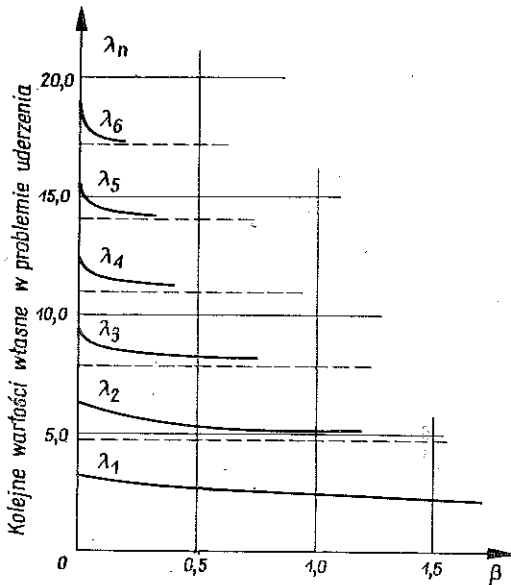
Wykres pierwszych sześciu wartości własnych w zależności od parametru β pokazany jest na rys. 24.

Pozostają jeszcze do wyznaczenia z warunków początkowych współczynniki A_n w rozwiązaniu (8.8). Funkcje własne $\psi_n(\rho)$ nie są ortogonalne w zwykłym sensie, ale mogą być uważane jako ortogonalne z wagą $\rho [1 + \beta\delta(\rho)]$, gdzie $\delta(\rho)$ jest funkcją Diraca:

$$(8.23) \quad \delta(\rho) = 0 \quad \text{dla} \quad \rho \neq 0, \quad 2\pi \int_0^1 \delta(\rho) \rho d\rho = 1.$$

Zdefiniujmy obecnie iloczyn skalarny

$$(8.24) \quad (\psi_n, \psi_m) = \int_0^1 \rho [1 + \beta\delta(\rho)] \psi_n(\rho) \psi_m(\rho) d\rho, \quad \|\psi_n\| = \sqrt{(\psi_n, \psi_n)}.$$



Rys. 24. Zależność wartości własnych od stosunku mas pocisku i płyty

Omiijając szczegóły obliczeń, z warunku (8.2) otrzymuje się następujące wyrażenia na A_n :

$$(8.25) \quad A_n \|\psi_n\|^2 - (f_0, \psi_n) = \beta V_0 \psi_n(0),$$

gdzie

$$(8.26) \quad \|\psi_n\|^2 = \frac{(\psi_n'')^2}{4\lambda_n^4}, \quad (f_0, \psi_n) = \frac{2\sqrt{3}}{\lambda_n^4} \left(1 - \frac{\lambda_n^4 \beta}{32\pi}\right).$$

Podstawiając powyższe wyrażenia do (8.8) dochodzi do ogólnej postaci rozwiązania rozważanego problemu

$$(8.27) \quad v(\rho, t) = \beta V \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(\rho) \left\{ \frac{1}{\|\psi_n\|^2} e^{-\frac{\lambda_n^4 t}{\alpha}} - \frac{(f_0, \psi_n)}{\|\psi_n\|^2} [1 - e^{-\frac{\lambda_n^4 t}{\alpha}}] \right\}.$$

Pokażemy obecnie, że szereg (8.27) jest szybko zbieżny dla $\beta > 1$. W tym celu obliczymy współczynniki rozkładu dla dużych n . Znajdując z (8.15) $\psi_n''(0)$,

$$(8.28) \quad (\psi_n)'' = \frac{2J_0(\lambda_n)I_0(\lambda_n) - \frac{\lambda_n^4 \beta}{4} \left[\frac{2}{\pi} K_0(\lambda_n)J_0(\lambda_n) + I_0(\lambda_n)Y_0(\lambda_n) \right]}{J_0(\lambda_n) - I_0(\lambda_n)},$$

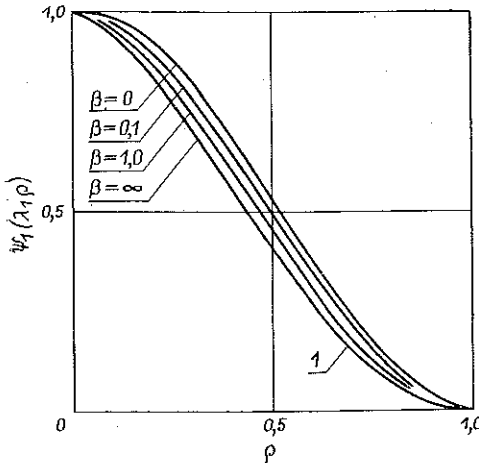
i podstawiając do (8.26) otrzymujemy dla dużych n

$$(8.29) \quad \frac{1}{\|\psi_n\|^2} = \frac{64\pi}{\beta^2 n^3}, \quad \frac{(f_0, \psi_n)}{\|\psi_n\|^2} = -\frac{4\sqrt{3}}{\beta h^3}.$$

Funkcja $f_0(\rho)$, znaleziona z rozwiązania (8.11) i (8.12), wynosi

$$(8.30) \quad f_0(\rho) = \frac{\sqrt{3}}{8} [1 - \rho^2(1 - 2\ln \rho)].$$

Opisuje ona prędkości ugięć w problemie statycznym pod działaniem siły punktowej. Rysunek 25 wskazuje na podobieństwo pierwszej funkcji własnej $\psi_1(\lambda_1, \rho)$, obliczonej przy różnych wartościach β , do funkcji $f_0(\rho)$.



Rys. 25. Wykres pierwszej funkcji własnej $\psi_1(\lambda_1, \rho)$ dla kilku wartości parametru β :

I -znormalizowany profil ugięć w problemie quasi-statycznym

Wynika stąd, że dobre przybliżenie rozwiązania (8.27) otrzymuje się uwzględniając tylko jeden wyraz w szeregu i zastępując $\psi_1(\lambda_1, \rho)$ przez $f_0(\rho)$:

$$(8.31) \quad v(\rho, t) = Af_0(\rho)e^{-\frac{\lambda_1^2 t}{a}} - f_0(\rho).$$

Wielkość stałej A dobiera się w odpowiedni sposób z warunków początkowych. Załóżmy, że w chwili początkowej część energii kinetycznej pocisku przekazana jest płycie, co znajduje odbicie w postaci rozkładu prędkości początkowej $V_0 f_0(\rho)/f_0(0)$; następuje więc nagle zmiana profilu prędkości. Zmiana taka jest dopuszczalna w ramach rozważanego modelu ciała sztywno-lepkoplastycznego, ponieważ prędkość propagacji fal jest nieskończona i zaburzenie przyłożone do środka płyty przenosi się natychmiast do dowolnego punktu płyty. Wartość $V_0 < V$ znajdujemy z równania zachowania energii

$$(8.32) \quad \frac{M}{2} (V^2 - V_0^2) = 2\pi R^2 \mu \int_0^1 \left\{ \frac{f_0(\rho)}{f_0(0)} \right\}^2 \rho d\rho,$$

skąd otrzymujemy

$$(8.33) \quad V_0 = \frac{V}{1 + \frac{4}{10\beta}} \quad \text{oraz} \quad A = V_0 + \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Moment zatrzymania się płyty, obliczony z warunku (6.17), wynosi

$$(8.34) \quad t_f = -\frac{\alpha}{\lambda_1^4} \ln \frac{\sqrt{3}/8}{V_0 + \sqrt{3}/8},$$

a odpowiadające mu trwałe ugięcie środka płyty

$$(8.35) \quad \delta = \frac{6\mu R^2 V^2}{\sqrt{3} M_0 \lambda_1^4} \frac{1}{1 + \frac{4}{10\beta}} \left[2\eta - 2\eta^2 \ln \left(1 + \frac{1}{\eta} \right) \right],$$

gdzie

$$\eta = \frac{\sqrt{3R^2 B}}{8V} \sqrt{1 + \frac{4}{10\beta}}.$$

Prostą interpretację wzoru (8.35) otrzymuje się mnożąc obie strony przez obciążenie graniczne $T^* = 4\pi M_0 / \sqrt{3}$:

$$(8.36) \quad \frac{4\pi M_0}{\sqrt{3}} \delta = \frac{16\pi}{\beta \lambda_1^4} \cdot \frac{1}{1 + \frac{4}{10\beta}} \cdot \frac{1}{2} M V^2 \left[2\eta - 2\eta^2 \ln \left(1 + \frac{1}{\eta} \right) \right].$$

Lewa strona (8.36) jest dysypacją energii w ekwiwalentnym procesie quasi-statycznym. Prawa strona przedstawia energię kinetyczną pocisku zmniejszoną o czynnik zależny od η i β . Wyraz «depkościowy» jest taki sam, jak w rozwiązaniu dla impulsowego obciążenia płyty, i został przedyskutowany w rozdziale 6. Wyraz zależny od β jest funkcją masy pocisku M oraz bezwładności płyty μ . Przypadek $\beta \rightarrow \infty$ odpowiada nieważkiej płycie ($\mu=0$) i łatwo wykazać posługując się wzorem (8.20), że wyraz ten dąży do jedności. Energia kinetyczna pocisku rozprasza się (dla $\eta \rightarrow \infty$) całkowicie na pracę plastyczną. Dla skończonych wartości β wyraz opisujący bezwładność płyty i pocisku nieznacznie przekracza jedność. Jest to wynikiem przybliżonego założenia odnośnie początkowego przekazywania energii (8.32).

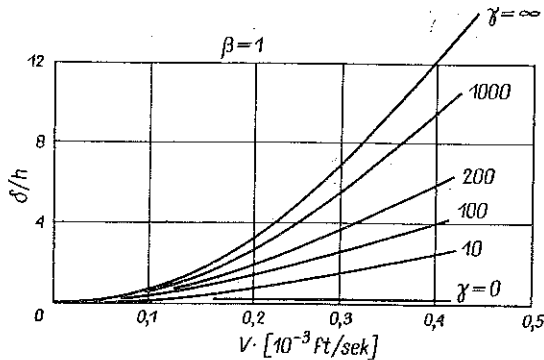
Wykres zależności bezwymiarowego ugięcia środka płyty δ/R od początkowej prędkości V dla różnych wielkości stałych lepkości γ i stosunku mas β pokazany jest na rys. 26 i 27.

Powyższe rozwiązanie otrzymane zostało we wspólnej pracy autora z J. M. KELLY'EM [33]. Weryfikacja eksperymentalna rozwiązania teoretycznego (8.36) przedstawiona jest w pracy [34]. Płyty z miękkiej stali C1012 o wymiarach $R \times 2h = 4 \times 1/4$ zamocowane na obwodzie poddawane były uderzeniu stalowych pocisków cylindrycznych o masie 10 g i 31 g i średnicy 0,454. Prędkość pocisków wahała się

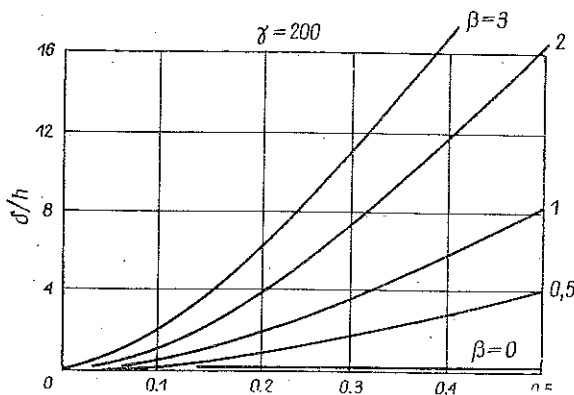
w granicach od 500 do 1500 ft/s. W doświadczeniach mierzono jedynie trwale ugięcia środka zamocowanych płyt.

Ponieważ stosunek promienia pocisku do promienia płyty był w doświadczeniach skończony oraz użyte pociski były lekkie w porównaniu z masą płyty (β małe), przeto niektóre założenia naszej uproszczonej teorii nie były spełnione i rozwiązanie teoretyczne zostało w pracy [34] nieznacznie zmodyfikowane. Zmiany polegały na:

- 1) przyjęciu skończonej powierzchni działania siły pod pociskiem ρ_0 ;
- 2) przyjęciu równomiernego rozkładu ciśnienia pod pociskiem; wynika stąd inna wartość całkowitej siły uplastyczniającej oraz
- 3) przyjęciu początkowego rozkładu prędkości na podstawie pierwszego wyrazu rozwinięcia (8.27) zamiast warunku (8.32).



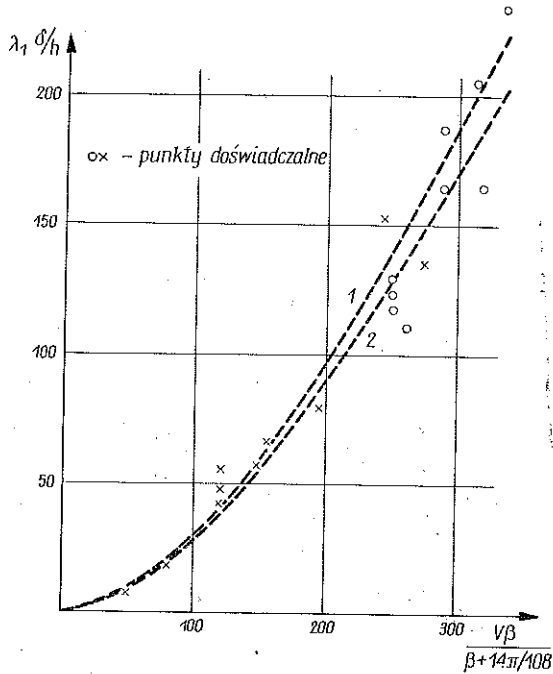
Rys. 26. Zależność bezwymiarowego ugięcia środka płyty od prędkości pocisku dla kilku wartości lepkości materiału



Rys. 27. Zależność ugięcia środka płyty od prędkości pocisku dla wybranych wartości stosunku mas β

Przy powyższych założeniach otrzymano zadowalającą zgodność teorii i doświadczenia (rys. 28). Dwie krzywe teoretyczne na powyższym rysunku odpowiadają dwu różnym wartościom obciążenia granicznego P_0 , ponieważ istnieje niepewność co do

wyboru wartości nośności granicznej płyty poddanej działaniu ciśnienia na części powierzchni. Maksymalne ugięcia uzyskane w doświadczeniach były rzędu grubości płyty i to tłumaczy zadowalającą korelację wyników zilustrowanych na rys. 28.



Rys. 28. Porównanie teorii i doświadczenia w problemie uderzenia pocisku w płytę:

1-krzywa teoretyczna dla $\gamma = 400$, $P_0 = 2300$ kG, 2-krzywa teoretyczna dla $\gamma = 400$, $P_0 = 3000$ kG

Uogólnienie rozwiązania przybliżonego. Rozważmy uogólnienie rozwiązania dla dużych β (8.36) na przypadek umiarkowanie dużych przemieszczeń. Pomijając w (8.36) wyraz zależny od β mamy

$$(8.37) \quad P_0 \delta = \frac{1}{2} MV^2 \left[2\eta - 2\eta^2 \ln \left(1 + \frac{1}{\eta} \right) \right],$$

gdzie P_0 oznacza obciążenie graniczne. W teorii umiarkowanie dużych ugięć nośność graniczna zależy od przemieszczenia środka płyty $P_0(w_0)$ i przez analogię do (8.37) otrzymujemy

$$(8.38) \quad \int_0^\delta P(w_0) dw_0 = \frac{1}{2} MV^2 \left[2\eta - 2\eta^2 \ln \left(1 + \frac{1}{\eta} \right) \right].$$

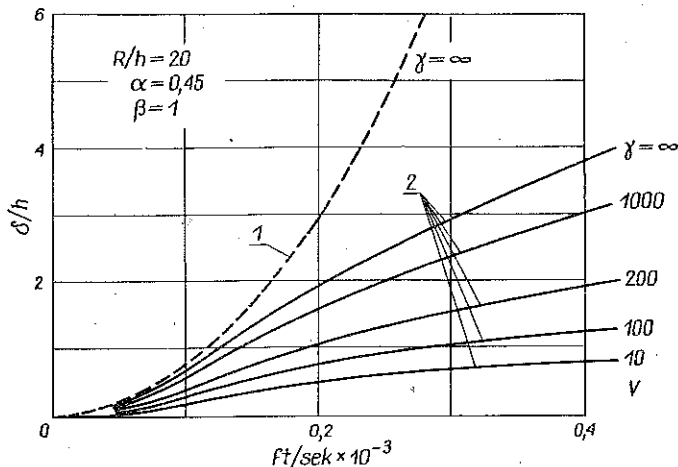
Podobnie jak w poprzednim przypadku lewa strona (8.38) przedstawia dysypację energii w odpowiadającym procesie quasi-statycznym. Przyjmując za ONATEM i HAYTHORNTHWAITEM [51] dla siły punktowej

$$(8.39) \quad P(w_0) = P_0 \left[1 + \alpha \left(\frac{w_0}{2h} \right)^2 \right],$$

dochodzimy do wzoru

$$(8.40) \quad P_0 \left[\frac{\delta}{h} + \frac{\alpha}{3} \left(\frac{\delta}{h} \right)^3 \right] = \frac{1}{2} MV^2 \left[2\eta - 2\eta^2 \ln \left(1 + \frac{1}{\eta} \right) \right],$$

opisującego w przybliżony sposób łączny wpływ lepkości materiału i zmian wielkości geometrycznych na trwałe ugięcia płyty zamocowanej w problemie uderzenia. Ilustracją rozwiązania (8.40) jest rys. 29 sporządzony dla wybranych wartości parametrów procesu $R/h=20$, $\alpha=0,45$, $\beta=1$ oraz stałych materiałowych, opisujących miękką stal CR 1018.



Rys. 29. Wpływ nieliniowości geometrycznej na trwałe ugięcie środka płyty w problemie uderzenia:
1—rozwiązanie momentowe, 2—rozwiązanie momentowo-membranowe

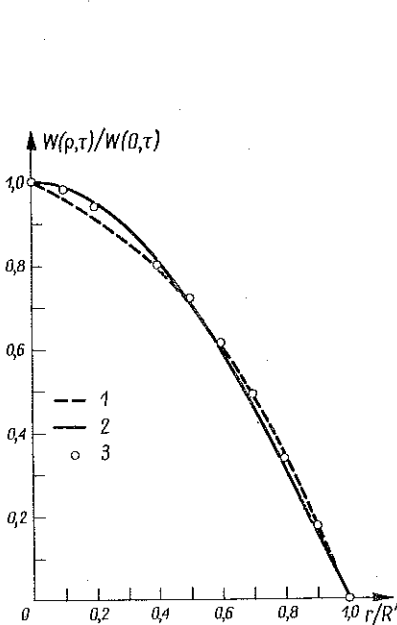
Płyta swobodnie podparta obciążona idealnym impulsem ciśnienia. Metoda rozwiązania jest analogiczna do przypadku płyty zamocowanej. Zamiast warunku brzegowego $w'=0$ przyjąć trzeba zerowanie się momentu promieniowego $m_r=0$ dla $r=R$. Powoduje to zmianę wartości i funkcji własnych oraz statycznego ciśnienia uplastyczniającego, które w przypadku warunku plastyczności Hubera-Misesa wynosi $p^*=6,51$. Przybliżone rozwiązanie w teorii momentowej ma postać

$$(8.41) \quad \delta = 0,96 \frac{I^2 R}{8 \mu M_0} \left[2\xi - 2\xi \ln \left(1 + \frac{1}{\xi} \right) \right],$$

gdzie $\xi = 3p^* \alpha / 2\lambda_1^4 \bar{I}$. W granicznym przypadku $\gamma \rightarrow \infty$ rozwiązanie (8.41) pokrywa się z dokładnością 3% z odpowiednim wynikiem Wanga dla materiału idealnie plastycznego [78].

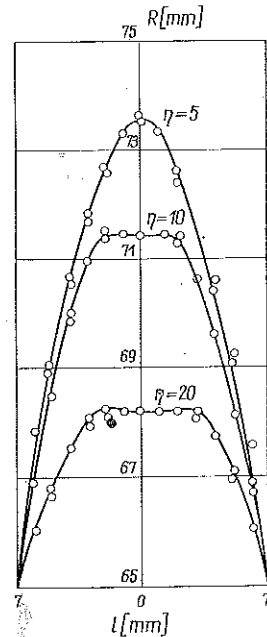
Profile końcowych trwałych ugięć dla obu rozwiązań porównane są na rys. 30. Kółkami oznaczono punkty doświadczalne zaczerpnięte z pracy FLORENCE'A [18]. Omawiana teoria nie dopuszcza do powstania nieciągłości w pochodnej pola przemieszczeń w środku płyty i dlatego daje lepszą zgodność z doświadczeniem. Szcz-

główne rozwiązania dla małych i umiarkowanie dużych ugięć podane są odpowiednio w pracach [83 i 87]. W tym ostatnim przypadku przeprowadzono porównanie z cytowanymi doświadczeniami FLORENCE'A [18]. Ponieważ użyta w tych doświadczeniach stal CR 1018 charakteryzuje się małą wrażliwością na prędkość odkształcenia (γ jest duże), przeto różnice pomiędzy ugięciami wynikającymi z teorii momentowej Wanga (linia przerywana) i wartościami zmierzonymi tłumaczyć należy głównie zmianami wielkości geometrycznych problemu.



Rys. 30. Profile końcowych ugięć płyty kołowej przy obciążeniu impulsowym:

1—rozwiązanie dla materiału idealnie plastycznego, 2—obecne rozwiązanie analityczne, 3—punkty doświadczalne dla $I=0,436$ (Florence)



Rys. 31. Porównanie obecnej teorii i doświadczeń (Wierzbicki, Andrzejewski) w problemie impulsowego obciążenia powłoki cylindrycznej

Dla płyty swobodnie podpartej uzyskano również rozwiązanie przy obciążeniu prostokątnym impulsem ciśnienia. Problem ten omówiony został w rozdziale 5 przy okazji dyskusji dokładności teorii.

Powłoka cylindryczna. Powłoka swobodnie podparta, obciążona równomiernie rozłożonym impulsem idealnym i prostokątnym analizowana była przez PABIANEK [54]. Celem tych badań było wykazanie stosowalności obecnej teorii w przypadku powłok cylindrycznych. Uzyskano rozwiązania ściśle metodą funkcji i wartości własnych oraz proste rozwiązania przybliżone. W granicznym przejściu $\gamma \rightarrow \infty$ otrzymano znane wyniki HODGE'A i JONESA [23 i 28] dla powłok idealnie plastycznych. Rozwiązanie Pabianek poddane było sprawdzeniu doświadczalnemu we wspólnej pracy autora z H. ANDRZEJEWSKIM [93]. We wstępnej serii doświadczeń badano 9 próbek cylindrycznych o wymiarach $2R \times 2h \times L = 130 \times 3 \times 60$ mm. Deformacja plastyczna wywołana była przez eksplozję ładunku wybuchowego równomiernie

rozłożonego wzdłuż osi cylindra. Fala obciążenia przenosiła się na powłokę za pośrednictwem wody. Zwiększanie energii dostarczanej do powłoki uzyskiwano przez zmianę grubości detonowanego lontu. Zmierzone profile trwałych ugięć powłoki porównywano z rozwiązaniem teoretycznym otrzymanym przez numeryczne sumowanie 10 wyrazów szeregu (rys. 31).

Otrzymuje się zadowalającą zgodność dla małych ugięć, powstałe różnice dla dużych wartości impulsu są wynikiem zmian wielkości geometrycznych, których teoria nie uwzględniała.

Wnioski końcowe. Na podstawie analizy uzyskanych rozwiązań i przeprowadzonych porównań można sformułować następujące ogólne wnioski:

1) liniowe prawo płynięcia dla lepkoplastycznych konstrukcji stanowi dobre przybliżenie odpowiedniego nieliniowego związku konstytutywnego dla materiału sztywno-lepkoplastycznego;

2) rozwiązania problemów brzegowych a zwłaszcza obliczony końcowy kształt zdeformowanej konstrukcji i maksymalne trwałe ugięcie dają wyniki zgodne z doświadczeniem;

3) przedstawiona metoda pozwala na łatwą analizę zmiany postaci pola prędkości (tzw. «mode transition») przy obciążeniu impulsowym pozwalając na dokładny wybór warunków początkowych dla rozwiązań przybliżonych;

4) w granicznym przypadku obecna teoria pozwala na uzyskanie rozwiązań dla materiału sztywno-idealnie plastycznego;

5) zaproponowane prawo konstytutywne umożliwia łączny opis liniowych własności lepkich materiałów i nieliniowych efektów zmian geometrii konstrukcji.

Zaproponowana teoria podaje zatem praktyczny i prosty sposób wyznaczania deformacji konstrukcji plastycznych i lepkoplastycznych poddanych obciążeniom dynamicznym.

9. OSZACOWANIE DEFORMACJI DLA CIAŁ LEPKOPLASTYCZNYCH

W przedstawionej metodzie linearyzacji równań lepkoplastycznych powłok istotną rolę odgrywa definicja stanu porównawczego $M_{\alpha\beta}^*$, $N_{\alpha\beta}^*$. Pokazane zostało, że w teorii małych ugięć stan ten zdefiniowany jest przez obciążenie graniczne $p^*(\rho)$, ale istnieje pewna dowolność w doborze rozkładu sił powierzchniowych. W teorii umiarkowane duże ugięcia wprowadzało się dodatkowo założenie o stacjonarności pola prędkości, przy czym wartość końcowych ugięć zależała od sposobu określenia warunków początkowych. Chociaż poprawność teorii potwierdzona została w wielu doświadczeniach, to jednak w przypadku braku danych eksperymentalnych trudno jest określić dokładność rozwiązań przybliżonych.

W związku z tym dużego znaczenia praktycznego nabierają metody, które przy znacznie słabszych założeniach pozwalają oszacować pewne podstawowe parametry procesu dynamicznego. Górne, bezpieczne oszacowania na maksymalne trwałe ugięcia i dolne oszacowania na czas pracy konstrukcji sztywno-idealnie plastycznych

podał MARTIN [42]. Wyprowadzenie podobnych twierdzeń dla materiałów sprężysto-plastycznych i plastycznych ze wzmocnieniem zawierają prace [43 i 44].

Opierając się na warunku stateczności Druckera dla materiałów niesprężystych (3.2) oraz wykorzystując zasadę prac wirtualnych, można uogólnić teorię oszacowań na przypadek ciał lepkoplastycznych. W tym rozdziale przedstawione będą odpowiednie wyniki w zakresie liniowych związków geometrycznych. Dla dużych ugięć twierdzenie o pracach wirtualnych w opisie Lagrange'a ma bardziej złożoną postać i nie można uzyskać z (3.2) prostych oszacowań ujmujących łączny wpływ lepkości i zmian wielkości geometrycznych. Oszacowania w przypadku problemów geometrycznie nieliniowych otrzymać można jedynie w granicznym przypadku materiałów idealnie plastycznych, dla których postulat stateczności (3.2) sprowadza się do prostej nierówności. Zagadnieniu temu poświęcony będzie następny rozdział.

Ogólna nierówność. Postulat stateczności Druckera głosi, że całkowita praca potrzebna do przeprowadzenia ciała z jednego stanu $\sigma_{ij}^{(1)}, \dot{\epsilon}_{ij}^{(1)}$ w drugi $\sigma_{ij}^{(2)}, \dot{\epsilon}_{ij}^{(2)}$ w skończonym czasie $0 < t < t_f$ musi być nieujemna

$$(9.1) \quad \int_0^{t_f} dt \int_V (\sigma_{ij}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(2)}) (\dot{\epsilon}_{ij}^{(1)} - \dot{\epsilon}_{ij}^{(2)}) dV \geq 0.$$

Załóżmy z kolei, że ciało o objętości V i regularnej powierzchni A poddane zostało pewnemu procesowi deformacji, w którym siły powierzchniowe nie wykonują żadnej pracy. Ciało porusza się wyłącznie na skutek dostarczonej w chwili $t=0$ energii kinetycznej; początkowe pole prędkości wynosi $\dot{u}_i^0(x_i)$, $x_i \in V$. Skorzystajmy z dowolności wyboru stanu 1 i 2 w nierówności (9.1) i przyjmijmy za stan pierwszy kompletne rozwiązanie postawionego problemu dynamicznego $\sigma_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij}(t)$, $\dot{\epsilon}_{ij}^{(1)} = \dot{\epsilon}_{ij}(t)$, $\dot{u}_i^{(1)} = \dot{u}_i(t)$. Niech stan drugi oznacza rozwiązanie problemu quasi-statycznego dla identycznego ciała, obciążonego siłami powierzchniowymi T_i^* . Zakładamy dalej stałość naprężeń i prędkości odkształceń w problemie porównawczym $\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}^{(2)} = \text{const}$, $\dot{\epsilon}_{ij}^* = \dot{\epsilon}_{ij}^{(2)} = \text{const}$ oraz $\dot{u}_i^* = \dot{u}_i^{(2)} = \text{const}$ dla $0 \leq t \leq t_f$.

Podobna definicja stanu porównawczego wprowadzona była w związku z linearyzacją równań Hohenemsera-Pragera. Różnica obu definicji polega na tym, że tutaj problem quasi-statyczny rozwiązywany jest na podstawie tego samego prawa fizycznego co rozważany problem dynamiczny.

Rozwiązanie pomocniczego problemu statycznego zawiera zawsze jeden swobodny parametr. Dla materiału idealnie plastycznego jest nim skalarny mnożnik w polu prędkości przy stałych i danych siłach zewnętrznych. W materiale lepkoplastycznym istnieje jednoznaczna zależność T_i^* i \dot{u}_i^* , ale sama wartość sił zewnętrznych może być dowolna, byleby przekraczała wartość nośności granicznej. Nierówność (9.1) można przekształcić za pomocą zasady prac wirtualnych, przyjmując zerowanie się sił masowych F_i . Zgodnie z zasadą d'Alemberta naprężenia $\sigma_{ij}(t)$ są w równowadze z siłą $-\rho \ddot{u}_i$. Podobnie σ_{ij}^* jest w równowadze z T_i^* . Z drugiej strony pola prędkości odkształceń $\dot{\epsilon}_{ij}$ i $\dot{\epsilon}_{ij}^*$ są zgodne odpowiednio z \dot{u}_i i \dot{u}_i^* .

Stosując zasadę prac wirtualnych do zdefiniowanych czterech par wielkości statycznych i kinematycznych można napisać:

$$\begin{aligned}
 \int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV &= \int_V -(\rho \ddot{u}_i) \dot{u}_i dV = \frac{d}{dt} \int_V -\frac{\rho}{2} \dot{u}_i \dot{u}_i dV, \\
 \int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^* dV &= \int_V -(\rho \ddot{u}_i) \dot{u}_i^* dV = \frac{d}{dt} \int_V -\rho \dot{u}_i \dot{u}_i^* dV, \\
 \int_V \sigma_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij} dV &= \int_A T_i^* \dot{u}_i dA = \frac{d}{dt} \int_A T_i^* u_i dA, \\
 \int_V \sigma_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}^* dV &= \int_A T_i^* \dot{u}_i^* dA = \frac{d}{dt} \int_A T_i^* u_i^* dA.
 \end{aligned}
 \tag{9.2}$$

Podstawiając (9.2) do (9.1) i całkując względem czasu przy warunkach $t=0$, $u_i=0$, $\dot{u}_i=\dot{u}_i^0$, $t=t_f$, $u_i=u_i^f$, $\dot{u}_i=0$ otrzymujemy

$$\int_V \frac{1}{2} \mu \dot{u}_i^0 \dot{u}_i^0 dV + t_f \int_A T_i^* \dot{u}_i^* dA - \int_V \mu \dot{u}_i^* \dot{u}_i^0 dV - \int_A T_i^* u_i^f dA \geq 0.
 \tag{9.3}$$

Pierwszy wyraz w (9.3) oznacza energię kinetyczną E_K wprowadzoną do układu. Wzór (9.3) przedstawia globalną nierówność energetyczną; można z niej wyciągnąć następujące wnioski praktyczne:

1) oszacowanie ugięć podać można jedynie dla punktów \bar{x}_i na zewnętrznej powierzchni ciała A ;

2) z wyrażenia energetycznego wyznaczyć można tylko jedną skalarną wielkość, np. bezwzględną wartość ugięcia $\delta = \|\dot{u}_i^f\|$;

3) aby obliczyć δ trzeba znać *a priori* kierunki wektora ugięcia n_i , $u_i^f = n_i \delta$ w danym procesie dynamicznym. Dla problemów kołowo-symetrycznych warunek ten jest spełniony;

4) siła statyczna T_i^* musi być siłą punktową działającą wzdłuż wektora n_i ;

5) dla ciała trójwymiarowego siła punktowa prowadzi do osobliwości, natomiast konstrukcje cienkościenne dwu i jednowymiarowe mogą przenosić siły punktowe;

6) nierówność (9.3) spełniona jest, jeżeli w czasie t_f ruch wszystkich punktów ciała ustaje jednocześnie lub jeśli strefy sztywne zaczynają się propagować począwszy od punktu \bar{x}_i .

Uwzględniając wnioski 1-4 nierówności (9.3) przepisać można w prostszej postaci

$$E_K + t_f T^* \dot{u}^0 - \int_V \mu \dot{u}_i^* \dot{u}_i^0 dV - T^* \delta \geq 0,
 \tag{9.4}$$

gdzie T^* i \dot{u}^0 oznaczają bezwzględne wartości siły i prędkości działające w kierunku wektora n_i .

Zastosowanie do płyt idealnie plastycznych. Nierówność (9.4) spełniona jest dla szerokiej klasy materiałów statecznych, w szczególności dla materiałów idealnie plastycznych. Przedstawimy najpierw implikacje, jakie daje nierówność w tym ostatnim przypadku; ułatwi to interpretację (9.4) w zastosowaniu do materiałów lepkoplastycznych oraz wyjaśni niektóre punkty dotychczasowej metody Martina.

Rozważmy swobodnie podpartą płytę kołową i założmy, że w chwili $t=0$ dana jest jednorodna prędkość V_0 . Początkowa energia kinetyczna płyty wynosi

$$(9.5) \quad E_K = \frac{1}{2} \pi \mu R^2 V_0^2.$$

Jako siłę powierzchniową T^* przyjmijmy siłę punktową działającą w środku płyty w kierunku jej osi. Z rozwiązania statycznego problemu nośności granicznej przy warunku plastyczności Hubera-Misesa wiadomo, że

$$(9.6) \quad T^* = 2\pi M_0, \quad \dot{u}^* = \dot{u}_0^* (1 - \sqrt{\rho}).$$

Podstawiając (9.5) i (9.6) do (9.4) i wprowadzając bezwymiarowe ugięcie δ , czas t i parametr α :

$$(9.7) \quad \delta = \frac{4M_0 u^f}{\mu R^2 V_0^2}, \quad t = \frac{10M_0 t_f}{\mu R^2 V_0}, \quad \alpha = \frac{4}{10} \frac{\dot{u}_0^*}{V_0},$$

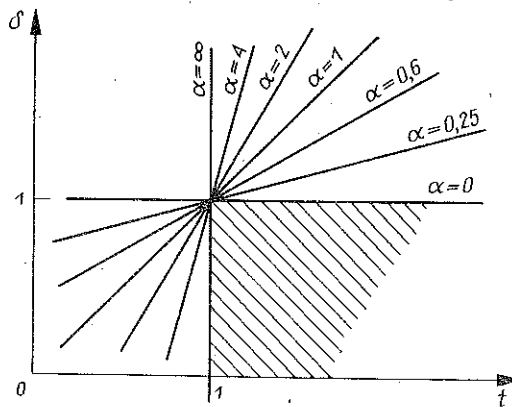
otrzymujemy nierówność

$$(9.8) \quad 1 + \alpha t - \alpha - \delta \geq 0 \quad \text{dla} \quad 0 < \alpha < \infty.$$

Na płaszczyźnie δ, t aktualnie trwałe ugięcie i czas pracy musi leżeć w obszarze ograniczonym (9.8). Dla każdej wartości parametru α linia ograniczająca jest linią prostą przechodzącą przez punkt (1,1). Krzywa ograniczająca obszar dopuszczalnych deformacji jest obwiednią rodziny linii prostych, rys. 32. Eliminując parametr α łatwo wykazać, że równanie obwiedni ma postać

$$(9.9) \quad t \geq 1, \quad \delta \leq 1.$$

Oszacowanie identyczne z (9.9) otrzymał również MARTIN [42] na nieco innej drodze, zakładając kolejno statycznie dopuszczalne pole naprężeń i kinematycznie dopuszczalne pole prędkości odkształceń oraz stosując warunek stateczności dla materiału idealnie plastycznego.



Rys. 32. Obszar dopuszczalnych deformacji dla materiału idealnie plastycznego

Zastosowanie do płyt lepkoplastycznych. Rozważmy przykłady płyty kołowej zamocowanej. Jako pomocniczy problem quasi-statyczny przyjmijmy również

siłę punktową T^* działającą w środku. Zależność między T^* i \dot{u}^* , podana w pracy [33] dla prawa płynięcia (4.6), jest następująca:

$$(9.10) \quad \dot{u}^* = (T^* - T_0) \frac{3\sqrt{3}\gamma R^2}{32hM_0} [1 - \rho^2(1 - 2\ln\rho)],$$

gdzie $T_0 = 4\pi M_0 / \sqrt{3}$ oznacza stytyczną nośność graniczną płyt idealnie plastycznych. Podstawiając do (9.4) wyrażenie na energię (9.5) oraz na \dot{u}^* otrzymujemy

$$(9.11) \quad \Phi(\delta, t, p) \equiv 1 + t\beta(p-1) - \beta(p-1) - p\delta \geq 0 \quad \text{dla} \quad 1 \leq p < \infty,$$

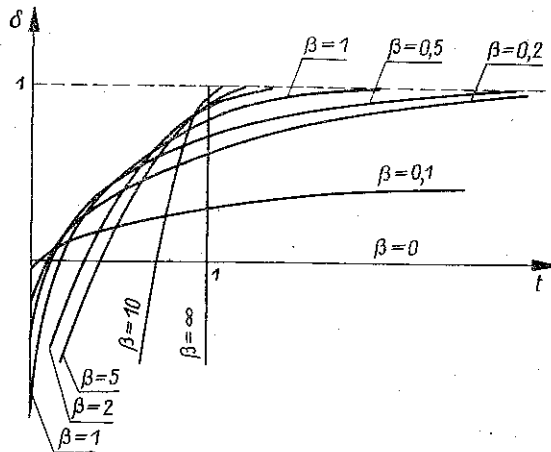
gdzie bezwymiarowe wielkości zdefiniowane są następująco:

$$(9.12) \quad \delta = \frac{8M_0 u^f}{\sqrt{3}\mu R^2 V_0^2}, \quad t = \frac{16M_0 t_f}{\sqrt{3}\mu R^2 V_0}, \quad p = \frac{\sqrt{3}T^*}{4\pi M_0}, \quad \frac{1}{\beta} = \frac{16}{3} \frac{V_0 h}{\gamma R^2}.$$

Dla każdej wartości parametru p krzywa graniczna jest na płaszczyźnie δ, t linią prostą. Równanie $\Phi(\delta, t, p) = 0$ przedstawia więc jednoparametrową rodzinę linii prostych. Eliminując parametr p w zwykły sposób przez przyjęcie $d\Phi/dp = 0$ otrzymujemy granicę obszaru dopuszczalnych deformacji:

$$(9.13) \quad \frac{\delta^2}{\beta} + 2\delta t + \beta t^2 + 2\delta - 2(2+\beta)t + \beta = 0 \quad \text{dla} \quad 0 \leq t \leq 1 + \frac{1}{\beta},$$

$$\delta = 1 \quad \text{dla} \quad t > 1 + \frac{1}{\beta}.$$



Rys. 33. Obszar dopuszczalnych deformacji dla materiału lepkoplastycznego przy różnych wartościach parametru β

Równanie (9.13) przedstawia parabolę, która jest zawsze styczna do prostych $t=0$ i $\delta=1$. Punkty styczności oraz obrót osi symetrii paraboli i jej rozwarcie zależą od wartości parametru β , czyli zgodnie z definicją (9.12) od lepkich własności materiału. Krzywe graniczne dla kilku reprezentatywnych wartości β pokazane są na rys. 33.

Dla $\gamma = \beta = 0$ równanie (9.13) degeneruje się do równania linii prostej $\delta = 0$. Dla $\gamma = \beta \rightarrow \infty$ otrzymuje się rozwiązanie (9.9) dla materiału idealnie plastycznego. Dla pośrednich wartości parametru β nierówność (9.13) nie daje bezpośredniego oszacowania na wartość trwałych ugięć, ale uzależnia tę wartość od czasu trwania procesu. Dlatego przedstawiona metoda może być wykorzystana do znajdowania jednej wielkości, kiedy znana jest druga wielkość. Tak więc pożądana jest znajomość lub pomiar δ lub t , co pozwoli przewidzieć z (9.13) odpowiednio t lub δ . Na przykład stosunkowo łatwo jest zmierzyć trwałe ugięcie konstrukcji δ .

Metoda oszacowań pozwala na szybkie podanie dolnej granicy na czas trwania procesu, który w przeciwnym przypadku mógłby być zmierzony przy użyciu skomplikowanej aparatury elektronicznej.

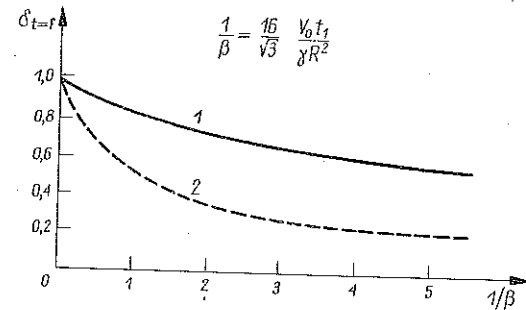
Osobne oszacowanie na δ i t uzyskać można tylko dla materiałów idealnie plastycznych.

Porównanie dokładności obecnej metody z wcześniejszymi wynikami MARTINA [45] i dokładnymi rozwiązaniami (6.17) przedstawione jest na rys. 34 dla $\beta = 1$, co odpowiada średniej wartości parametrów użytych w doświadczeniach FLORENCE'A [92].

Widać, że znalezione z (9.13) oszacowania przewyższają prawie dwukrotnie dokładne wartości. Jest to wysoka cena, jaką płacimy za uzyskaną pewność, że ścisłe rozwiązanie znajdzie się zawsze poniżej znalezionej górnej oceny ugięcia.

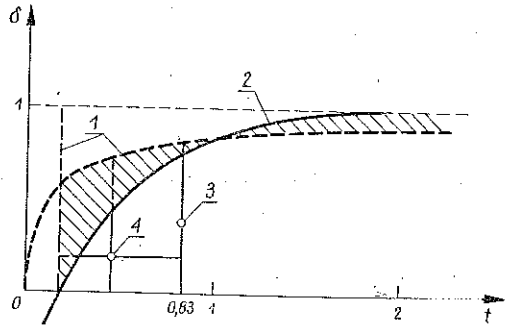
Wpływ lepkości materiału na zmniejszenie się ugięć środka płyty zbadać można łatwo ustalając w (9.13) wartość t . Dla $t = 1$ otrzymuje się

$$(9.14) \quad \delta = \frac{2}{1/\beta} (-1 + \sqrt{1 + 1/\beta}).$$



Rys. 35. Wpływ lepkości materiału na ugięcia środka płyty:

1-obecna teoria, również oszacowanie Martina, 2-rozwiązanie ścisłe



Rys. 34. Porównanie oszacowań wg różnych rozwiązań:

1-krzywa ograniczająca Martina; 2-obecne oszacowanie, 3-ścieśle rozwiązanie Wanga i Hopkinsa dla płyty idealnie plastycznej, 4-ścieśle rozwiązanie dla płyty lepkoplastycznej

Porównanie dokładnego rozwiązania (6.17) z oszacowaniem (9.14) przedstawione jest na rys. 35. Jakościowy charakter obu wykresów jest podobny.

We współrzędnych bezwymiarowych zdefiniowanych przez (9.12) oba wzory (6.17) i (9.14) pokazują zależność δ odpowiednio od parametrów ζ i β . Ponieważ

$1/\zeta = \lambda_1^4/\eta = 4,9/3 V_0 h/\gamma R$ z dokładnością do mnożnika definicją parametrów ζ i β jest taka sama. Świadczy to o przydatności proponowanej metody oszacowań przy jakościowej analizie efektów lepkich. Metoda ta identyfikuje we właściwy sposób szereg podstawowych parametrów procesu dynamicznego i pozwala na przybliżone wyznaczanie wartości maksymalnych ugięć konstrukcji, pomocne przy wstępnych projektach inżynierskich.

10. OSZACOWANIA W TEORII, UMIARKOWANIE DUŻYCH UGIĘĆ

Skończone odkształcenia. Punktem wyjścia twierdzeń udowodnionych w poprzednim rozdziale był postulat stateczności Druckera i zasada mocy wirtualnych dla nieskończonych odkształceń. Podczas gdy formalne uogólnienie tych pojęć na przypadek skończonych deformacji nie przedstawia trudności, powstają kłopoty przy właściwej interpretacji procesu dynamicznego i porównawczego procesu statycznego.

Jeśli przez T_i , F_i i σ_{ij} oznaczyć dowolny układ sił powierzchniowych, objętościowych i naprężeń, znajdujący się w równowadze w chwili t , a przez v_i i V_{ij} układ prędkości i prędkości odkształceń spełniających warunki zgodności, to zasada mocy wirtualnych, odniesiona do ciała odkształconego, ma postać:

$$(10.1) \quad \int_{S(t)} T_i^{(1)} v_i^{(2)} dS + \int_{V(t)} F_i^{(1)} v_i^{(2)} dV = \int_{V(t)} \sigma_{ij}^{(1)} V_{ij}^{(2)} dV,$$

gdzie T_i są składowymi sił powierzchniowych na jednostkę aktualnej powierzchni S , F_i są składowymi sił masowych na jednostkę aktualnej objętości V .

Gradient deformacji V_{ij} wynosi:

$$(10.2) \quad V_{ij}^{(2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i^{(2)}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{(2)}}{\partial x_i} \right),$$

gdzie x_i oznacza aktualne (przestrzenne) współrzędne.

W równości (10.1) układy statyczny i kinematyczny mogą być wybrane zupełnie niezależnie od siebie. Z dowolności tej korzystało się w istotny sposób przy wyrowadzaniu nierówności szacującej dla nieskończone małych odkształceń. Jako układ T_i, F_i, σ_{ij} przyjmowano np. rozwiązanie porównawczego problemu statycznego, natomiast stan v_i, V_{ij} odpowiadał rzeczywistemu rozwiązaniu problemu dynamicznego. Zasada mocy wirtualnych (10.1) napisana została dla pewnej ustalonej chwili t .

Twierdzenia dotyczące oszacowań mają charakter energetyczny i występuje konieczność całkowania funkcji (10.1) względem czasu w granicach $(0, t_f)$. W badanym procesie dynamicznym i niezależnym, porównawczym quasi-statycznym występują w przypadku skończonych odkształceń dwie różne od siebie funkcje ruchu $x = \chi^{(1)}(X, t)$ i $x = \chi^{(2)}(X, t)$. Granice obszarów całkowania $V(t)$ i $S(t)$ zależą od czasu i zmieniają się w obu procesach inaczej. Metoda Eulera jest zatem niewygodna przy poszukiwaniu oszacowań, ponieważ nie wiadomo po jakich granicach przeprowadzać należy całkowanie.

Wady tej nie posiada metoda Lagrange'a, gdzie całkowanie odbywa się po nieodkształconej powierzchni S^0 i objętości V^0 . Stan wyjściowy może być w procesie

statycznym i dynamicznym taki sam. Istnieje jednak w dalszym ciągu niejednoznaczność przy transformacji (10.1) z opisu przestrzennego do materialnego. Aby wyjaśnić tę sprawę bliżej ustalmy najpierw, że całkowanie w (10.1) dotyczy powierzchni $S^{(1)}(t)$ i objętości $V^{(1)}(t)$ w procesie statycznym. Ze względu na zależności

$$(10.3) \quad F_i^0 = F_i \frac{dV}{dV^0}, \quad T_i^0 = T_i \frac{dS}{dS^0},$$

lewa strona (10.1) transformuje się do układu materialnego natychmiastowo:

$$(10.4) \quad \int_{S^{(1)}(t)} T_i^{(1)} v^2 dS + \int_{V^{(1)}(t)} F_i^{(1)} v_i^{(2)} dV = \int_{S^0} T_i^{0(1)} v_i^{(2)} dS^0 + \int_{V^0} F_i^{0(1)} v_i^{(2)} dV^0.$$

Pozostaje jeszcze przetransformować prawą stronę. Zależność pomiędzy aktualną współrzędną x_i , początkową współrzędną X_i oraz wektorem przemieszczenia u_i w problemie statycznym ma postać

$$(10.5) \quad x_i^{(1)} = X_i^{(1)} + u_i^{(1)}.$$

Dla materiału nieściśliwego tensor naprężenia Pioli-Kirchoffa i tensor Cauchy'ego σ_{rs} związane są formułą

$$(10.6) \quad S_{ij} = \sigma_{rs} \frac{\partial X_i}{\partial x_r} \frac{\partial X_j}{\partial x_s}.$$

Podstawiając (10.6) do prawej strony (10.1) otrzymujemy

$$(10.7) \quad \int_{V^{(1)}(t)} \sigma_{ij}^{(1)} v_{ij}^{(2)} dV = \int_{V^0} s_{ij}^{(1)} \dot{E}_{ij}^{(1,2)} dV^0,$$

gdzie

$$(10.8) \quad \dot{E}_{ij}^{(1,2)} = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j}^{(2)} + \dot{u}_{j,i}^{(2)} + \dot{u}_{k,i}^{(2)} \dot{u}_{k,j}^{(1)} + \dot{u}_{k,j}^{(2)} \dot{u}_{k,i}^{(1)})$$

jest pewną miarą prędkości odkształcenia, w której występują wielkości zarówno z procesu statycznego (1) jak i dynamicznego (2). Wzór (10.8) nie da się otrzymać przez materialne różniczkowanie jakiegokolwiek dobrze zdefiniowanej miary odkształceń Greena. Ostatecznie (10.1) w opisie materialnym przyjmie postać

$$(10.9) \quad \int_{S^0} T_i^{0(1)} v_i^{(2)} dS^0 + \int_{V^0} F_i^{0(1)} v_i^{(2)} dV^0 = \int_{V^0} s_{ij}^{(1)} \dot{E}_{ij}^{(1,2)} dV^0.$$

Podobnie jak w opisie Eulera układ $F_i^{0(1)}$, $T_i^{0(1)}$ oraz $s_{ij}^{(1)}$ jest w równowadze, tzn.

$$(10.10) \quad (s_{ji}^{(1)} + s_{jk}^{(1)} u_{i,k}^{(1)})_{,j} = F_i^{0(1)}, \quad (s_{ji}^{(1)} + s_{jk}^{(1)} u_{i,k}^{(1)}) = T_i^{0(1)},$$

gdzie n_j oznacza jednostkowy wektor normalny do niezdefiniowanej powierzchni S^0 . Układ kinematyczny $\dot{E}_{ij}^{(1,2)}$ i $v^{(2)}$ zależy od układu statycznego za pośrednictwem definicji (10.8).

Jedynie w przypadku, kiedy oba układy (1) i (2) odpowiadają temu samemu procesowi, tensor \dot{E}_{ij} staje się pochodną materialną tensora Greena

$$(10.11) \quad E_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{i,k} u_{k,j}).$$

Wyprowadzenie twierdzenia o mocach wirtualnych (10.9) w opisie Lagrange'a podali w tym szczególnym przypadku HABBITT, MARCAL, RICE [21] oraz LANCE i SOECHTING [37].

Przypuśćmy obecnie, że w granicach całek (10.1) występuje objętość i powierzchnia ciała deformowanego w procesie dynamicznym. Otrzymamy wówczas następujący odpowiednik (10.1) w opisie Lagrange'a:

$$(10.12) \quad \int_{S^0} T_i^{0(1)} v_i^{(2)} dS^0 + \int_{V^0} F_i^{0(1)} v_i^{(2)} dV^0 = \int_{V^0} s_{ij}^{(1)} \dot{E}_{ij}^{(2)} dV^0.$$

W równaniach równowagi dla procesu (1) wystąpią gradienty przemieszczeń w procesie (2)

$$(10.13) \quad (s_{ji}^{(1)} + s_{jk}^{(1)} u_{i,k}^{(2)})_{,j} = F_i^{0(1)}, \quad (s_{ji}^{(1)} + s_{jk}^{(1)} u_{i,k}^{(2)}) n_j = T_i^{0(1)}.$$

Sprzęgnięcie procesu statycznego i kinematycznego następuje tutaj przez równania równowagi (10.13). Ze względu na to sprzężenie nie wiadomo, jakie wielkości mają wchodzić do postulatu stateczności materiału. Sama definicja stateczności materiału sztywno-plastycznego w zakresie dużych odkształceń jest jeszcze niedostatecznie zbadana i spotyka się w literaturze szereg nieporozumień na ten temat, np. [72].

Z wymienionych powodów wynika, że uogólnienie twierdzeń szacujących na przypadek skończonych deformacji nie wydaje się w obecnej chwili możliwe.

Umiarkowanie duże ugięcia. Zgodnie z założeniem (rozdział 2 i 7) w każdym przekroju ścianki konstrukcji odkształcenia są małe; można zatem stosować szczególną postać postulatu stateczności Druckera dla infinitesimalnych deformacji ciała sztywno-idealnie plastycznego

$$(10.14) \quad (\sigma_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\beta}^*) \dot{\epsilon}_{\alpha\beta} \geq 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2,$$

gdzie stan porównawczy $\sigma_{\alpha\beta}^*$ znajduje się wewnątrz lub na powierzchni płynięcia (4.3).

Całkując (10.14) po grubości elementu przy zachowaniu hipotezy Love'a-Kirchhoffa (4.2), otrzymuje się

$$(10.15) \quad (M_{\alpha\beta} - M_{\alpha\beta}^*) \dot{\kappa}_{\alpha\beta} + (N_{\alpha\beta} - N_{\alpha\beta}^*) \dot{\lambda}_{\alpha\beta} \geq 0.$$

Jest to warunek stateczności w dowolnym punkcie powierzchni środkowej uplastycznej konstrukcji.

Rozważmy przypadek impulsowego obciążenia konstrukcji. Wartość energii kinetycznej wprowadzonej do układu oznaczmy przez E_K . Niech $M_{\alpha\beta}$, $N_{\alpha\beta}$, $\dot{\kappa}_{\alpha\beta}$ i $\dot{\lambda}_{\alpha\beta}$ oznaczają odpowiednie wielkości statyczne i kinematyczne w procesie dynamicznym oraz $M_{\alpha\beta}^*$ i $N_{\alpha\beta}^*$ niech odpowiadają rozwiązaniu porównawczego problemu

quasi-statycznego. Całkując nierówności (10.15) po objętości konstrukcji i czasie trwania procesu otrzymuje się:

$$(10.16) \quad \int_A dA \int_0^{t_f} (M_{\alpha\beta} \dot{\kappa}_{\alpha\beta} + N_{\alpha\beta} \dot{\lambda}_{\alpha\beta}) dt \geq - \int_A dA \int_0^{t_f} (M_{\alpha\beta}^* \dot{\kappa}_{\alpha\beta} + N_{\alpha\beta}^* \dot{\lambda}_{\alpha\beta}) dt,$$

gdzie A jest polem powierzchni środkowej konstrukcji, a t oznacza czas trwania deformacji plastycznych. Lewa strona (10.16) określa całkowitą pracę plastyczną w procesie dynamicznym; równa jest ona dostarczonej energii kinetycznej E_K . Prawą stronę należy dalej przekształcić wykorzystując równanie równowagi i związki geometryczne dla danego typu konstrukcji.

W celu uproszczenia zapisu dalsze rozważania dotyczyć będą umiarkowanie dużych ugięć płyt. W tym przypadku równania równowagi przyjmą postać

$$(10.17) \quad \begin{aligned} N_{\alpha\beta, \alpha} &= 0, & M_{\alpha\beta, \alpha} &= Q_\beta, \\ Q_{\alpha, \alpha} + N_{\alpha\beta} w_{, \alpha\beta} + \mu p &= 0, \end{aligned}$$

związki geometryczne będą następujące [99]:

$$(10.18) \quad \begin{aligned} \dot{\lambda}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (\dot{U}_{\alpha, \beta} + \dot{U}_{\beta, \alpha} + \dot{w}_{, \alpha} w_{, \beta} + w_{, \alpha} \dot{w}_{, \beta}), \\ \dot{\kappa}_{\alpha\beta} &= -\dot{w}_{, \alpha\beta}. \end{aligned}$$

Wyrażenie pod całką czasową po prawej stronie (10.16) przekształci się:

$$(10.19) \quad \begin{aligned} \int_A (M_{\alpha\beta}^* \dot{\kappa}_{\alpha\beta} + N_{\alpha\beta}^* \dot{\lambda}_{\alpha\beta}) dA &= \int_A (M_{\alpha\beta}^* + w N_{\alpha\beta}^*) \dot{w}_{, \alpha\beta} dA = \\ &= \int_A (M_{\alpha\beta}^* + w^* N_{\alpha\beta}^*) \dot{w}_{, \alpha\beta} dA + \int_A (w - w^*) N_{\alpha\beta}^* \dot{w}_{, \alpha\beta} dA = \\ &= \int_A p(w_0^*) \dot{w} dA + \int_A (w - w^*) N_{\alpha\beta}^* \dot{w}_{, \alpha\beta} dA. \end{aligned}$$

Podstawiając (10.19) do (10.16) otrzymujemy

$$(10.20) \quad E_K \geq \int_0^{t_f} dt \int_A p(w_0^*) \dot{w} dA + \int_0^{t_f} dt \int_A (w - w^*) N_{\alpha\beta}^* \dot{w}_{, \alpha\beta} dA,$$

gdzie $p(w_0^*)$ jest obciążeniem granicznym w porównawczym problemie statycznym.

Dla danego rozkładu ciśnienia wartość mnożnika zależy od wielkości ugięcia w danym punkcie płyty w_0^* . Wielkości ugięć w procesie statycznym w^* i dynamicznym w są od siebie niezależne. Należy teraz tak dobrać w^* , aby druga całka w (10.20) była nieujemna. Ogólnie rozwiązanie tego problemu jest niejednoznaczne i nie zawsze jest możliwe bez dodatkowych założeń, ponieważ zarówno w jak i w^* zmienia się w trakcie procesu. W wielu ważnych problemach inżynierskich można tak znormalizować w^* , aby druga całka w nierówności (10.20) była nieujemna. Mamy wówczas

$$(10.21) \quad E_K \geq \int_0^{t_f} dt \int_A p(w_0^*) \dot{w} dA, \quad w_0^* = w_0^*(w_0).$$

Zmieniając porządek całkowania i zauważając, że $\dot{w} dt = dw$, otrzymujemy

$$(10.22) \quad E_K \geq \int_A dA \int_0^{w_0^f} p(w_0) dw_0,$$

gdzie $w^f = w(t)|_{t=t_f}$. W przypadku działania siły punktowej wzór (10.22) redukuje się do

$$(10.23) \quad E_K \geq \int_0^{w_0^f} p(w_0) dw_0.$$

W celu znalezienia oszacowań na trwałe ugięcia konstrukcji powstałe w wyniku działania obciążenia impulsowego potrzebna jest zależność siły od ugięcia w odpowiednim problemie statycznym.

Przykład. Rozważmy swobodnie podpartą płytę kołową, której wszystkie cząstki z wyjątkiem brzegu posiadają w chwili $t=0$ jednorodną prędkość V_0 . Całkowita dostarczona energia kinetyczna wynosi

$$(10.24) \quad E_K = \frac{1}{2} \pi \mu R^2 V_0^2.$$

Jako porównawczy problem quasi-statyczny przyjmijmy siłę punktową P działającą w środku płyty. LANCE i ONAT [36] i ostatnio CALLEDINE [8] podali następującą zależność nośności granicznej od ugięcia:

$$(10.25) \quad p(w_0) = 2\pi M_0 \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{w_0}{2h} \right)^2 \right],$$

zakładając pole prędkości płyty w formie stożka $w(r)/w(0) = 1 - r/R$.

Odpowiednikiem drugiej całki w (10.20) jest całka

$$(10.26) \quad \int_0^R [(w - w^*)' r N_r^*] \dot{w} dr.$$

Można łatwo wykazać, że całka ta jest w przypadku swobodnie podpartej płyty nieujemna, jeśli wprowadzić następującą normalizację ugięcia w^* [89]

$$(10.27) \quad \left[\frac{w^*(r, t)}{w(r, t)} \right]_{r=0} = 1.$$

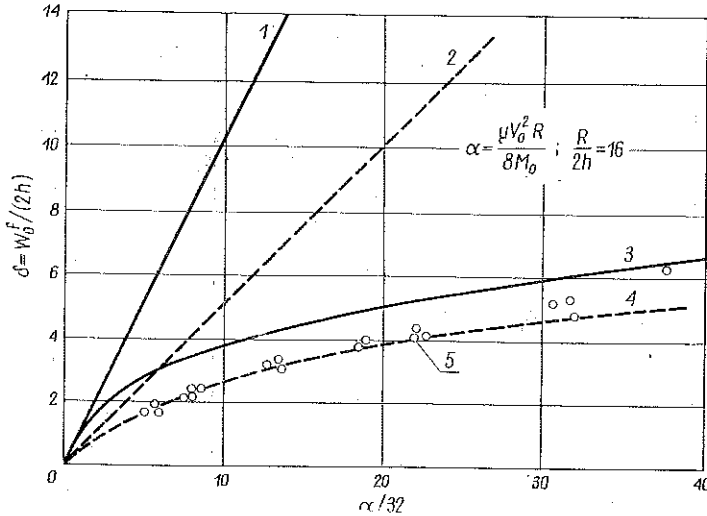
Podstawiając (10.25) i (10.24) do (10.23) i całkując otrzymuje się oszacowanie na ugięcie środka płyty

$$(10.28) \quad \frac{w_0^f}{2h} + \frac{1}{9} \frac{(w_0^f)^3}{(2h)^3} \leq \frac{\mu R^2 V_0^2}{8M_0 h}.$$

Przyjmując, tak jak w doświadczeniach FLORENCE'A [18], $R/2h = 16$ i oznaczając $K = \mu V_0^2 R^2 / 8M_0$, $\delta = w_0^f / 2h$, otrzymamy z (10.28) nierówność

$$(10.29) \quad \delta + \frac{1}{9} \delta^3 \leq 32K.$$

Porównanie naszych oszacowań dla umiarkowanie dużych ugięć z poprzednimi rozwiązaniami tego samego problemu i rezultatami doświadczeń przedstawione jest na rys. 36. Widać, że krzywa ograniczająca (10.29) przebiega blisko punktów doświadczalnych w całym badanym przedziale ugięć $0 < \delta < 6$. Ponadto dokładność oszacowań rośnie ze wzrostem deformacji.



Rys. 36. Ugięcie środka płyty w funkcji bezwymiarowego impulsu:

1-oszacowanie Martina, teoria momentowa, 2-rozwiązanie Wanga, teoria momentowa, 3-obecne oszacowanie, teoria momentowo-membranowa, 4-rozwiązanie Jonesa, teoria momentowo-membranowa, 5-punkty doświadczalne dla aluminium (Florence)

Uwagi końcowe. Przedstawione w dwóch ostatnich rozdziałach metody przybliżone pozwalają na proste i zarazem efektywne oszacowanie podstawowych parametrów procesu dynamicznego. Zaletą tych metod jest ogólność; udowodnione twierdzenia stosują się do ośrodka trójwymiarowego i do cienkościennych konstrukcji, a ponadto uwzględniać można zarówno własności plastyczne jak i lepkie materiału. W celu uzyskania oszacowań na trwałe przemieszczenia oraz czas trwania procesu dynamicznego wystarczy znajomość początkowej energii kinetycznej w danym problemie dynamicznym oraz kompletnego rozwiązania pomocniczego problemu statycznego.

Ogólność proponowanej metody oszacowań posiada również pewne wady. Zaliczyć do nich należy przede wszystkim niezależność rozwiązania od rozkładu początkowej prędkości przemieszczenia w ciele przy stałej wartości energii kinetycznej. Nie można się zatem spodziewać dużej dokładności wspomnianej metody. W rzeczywistości we wszystkich znanych przykładach wartość oszacowań przekraczała prawie dwukrotnie rozwiązanie ściśle. Wyniki te posiadać mogą jednak duże znaczenie praktyczne we wstępnych projektach inżynierskich. Dokładniejsze rezultaty daje zaproponowana metoda linearyzacji, omówiona szczegółowo w I części pracy.

Dalsze badania nad dynamiką konstrukcji niesprężystych są konieczne w celu uwzględnienia bardziej realistycznego modelu materiału i podania dokładnego opisu rzeczywistego ruchu ciała.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. E. A. APPLEBY, W. PRAGER, *A problem in viscoplasticity*, J. Appl. Mech., **29**, 2, 381-384, 1962.
2. J. BEJDA, *Propagation of two-dimensional stress waves in elastic viscoplastic material*, Proc. 12-th International Congress of Applied Mechanics, Ed. M. Hetenyi, Berlin, Springer 1969.
3. J. BEJDA, *Propagation of plane and axially symmetric two-dimensional elastic-viscoplastic waves*, Revue Roumaine des Sciences Tech., **15**, 2, 1970.
4. J. BEJDA, *A solution of the wave problem for elastic/visco-plastic beams*, J. Mécanique, **6**, 2, 263-282, 1967.
5. L. D. BERTHOLF, C. H. KARNES, *Axisymmetric elastic-plastic wave propagation 6061-T6 aluminium bars of finite length*, J. Appl. Mech., **36**, 3, 1969.
6. S. R. BODNER, P. S. SYMONDS, *Experimental and theoretical investigation of the plastic deformation of cantilever beams subjected to impulsive loading*, J. Appl. Mech., **29**, 4, 719-728, 1962.
7. G. I. BYKOWCEW, T. D. SEMYKINA, *O lepkoplastycznym płynięciu płyt kołowych i powłok obrotowo symetrycznych*, Izv. AN SSSR, **4**, 68-76, 1964.
8. C. R. CALLEDINE, *Simple ideas in the large-deflection plastic theory of plates and slabs*, Engineering Plasticity, Ed. J. Heyman, F. A. Leckie, Cambridge University Press 1968.
9. R. J. CLIFTON, *A difference method for plane problems in dynamic elasticity*, Quart. Appl. Math., **25**, 1, 1967.
10. B. D. COLEMAN, W. NOLL, *The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity*, Arch. Rat. Mech. Anal., **13**, 167-178, 1963.
11. N. CRISTESCU, *Dynamic Plasticity*, North Holland Publ. Comp., Amsterdam 1967.
12. D. C. DRUCKER, *A definition of stable inelastic materials*, J. Appl. Mech., **26**, 1, 101, 1959.
13. T. A. DUFFY, S. W. KEY, *Experimental-theoretical correlation of impulsively loaded clamped circular plate*, Exp. Mech., **9**, 6, 241-249, 1969.
14. M. K. DUSZEK, *Plastic analysis of cylindrical shells subjected to large deflections*, Arch. Mech., **18**, 5, 599-614, 1966.
15. M. K. DUSZEK, *Plastic analysis of shallow spherical shells at moderately large deflections*, Proc. IUTAM Symposium, Copenhagen 1967, Ed. F. Niordson, Springer 1969.
16. M. K. DUSZEK, *Równania teorii dużych ugięć powłok plastycznych*, Prace IPPT 13/1971.
17. G. EASON, *Velocity fields for circular plates with the von Mises yield condition*, J. Mech. Phys. Solids, **6**, 231-235, 1958.
18. A. L. FLORENCE, *Circular plate under a uniformly distributed impulse*, Int. J. Solids Structures, **1**, 2, 37-47, 1966.
19. A. L. FLORENCE, *Annular plate under a transverse line impulse*, AIAA Journal, **3**, 9, 1726-1732, 1965.
20. A. L. FLORENCE, *Buckling of visco-plastic cylindrical shells due to impulsive loading*, AIAA Journal, **6**, 532-537, 1968.
21. H. D. HIBBIT, P. V. MARCAL, J. R. RICE, *A finite element formulation for problems of large strain and large displacement*, Int. J. Solids Structures, **6**, 8, 1069-1086, 1970.
22. J. B. HADDOW, *A linearized theory of visco-plasticity*, Int. J. Solids Structures, **3**, 4, 533-542, 1967.
23. P. G. HODGE, *The influence of blast characteristics on the final deformation of circular cylindrical shells*, J. Appl. Mech., **23**, 617-624, 1956.
24. P. G. HODGE, *The Mises yield condition for rotationally symmetric shells*, Quart. Appl. Math., **18**, 305-311, 1961.
25. K. HOHENEMSER, W. PRAGER, *Über die Ansätze der Mechanik isotroper Continua*, ZAMM, **12**, 216, 1932.
26. H. G. HOPKINS, *On the plastic theory of plates*, Proc. Roy. Soc. London, A **241**, 153-179, 1957.
27. *Impact and Slamming*, Report of Committee 8, 4-th Int. Ship Structures Congress, Tokyo 1970.

28. N. JONES, *The influence of large deflections on the behaviour of rigid-plastic cylindrical shells loaded impulsively*, J. Appl. Mech., **37**, 2, 416-425, 1970.
29. N. JONES, *Finite deflections of a rigid viscoplastic strainhardening annular plate loaded impulsively*, J. Appl. Mech., **35**, 2, 349-356, 1968.
30. N. JONES, *Finite deflections of a simply supported rigid-plastic annular plate loaded dynamically*, Int. J. Solids Structures, **4**, 6, 593-603, 1968.
31. N. JONES, *Impulsive loading of a simply supported circular rigid-plastic plate*, J. Appl. Mech., **35**, 1, 59-65, 1968.
32. JOW-AN HSI, *Some studies in the dynamic plastic deformation of plates and shells*, Ph. D. Thesis, University of Waterloo, September 1967.
33. J. M. KELLY, T. WIERZBICKI, *Motion of a circular viscoplastic plate subject to projectile impact*, ZAMP, **18**, 2, 236-246, 1967.
34. J. M. KELLY, T. R. WILSHAW, *A theoretical and experimental study of projectile impact on clamped circular plates*, Proc. Roy. Soc. London, A **306** 435-447, 1968.
35. J. M. KELLY, *Non-linear constitutive relations for plane shock propagation in viscoplastic solids*, Arch. Mech., **22**, 1, 93-110, 1970.
36. R. H. LANCE, E. T. ONAT, *A comparison of experiments and theory in the plastic bending of circular plates*, J. Mech. Phys. Solids, **10**, 301, 1962.
37. R. H. LANCE, J. F. SOECHTING, *A displacement bounding principle in finite plasticity*, Int. J. Solids Structures, **6**, 8, 1103-1118 1970.,
38. J. W. LEECH, E. A. WITMER, T. H. H. PIAN, *Numerical calculation technique for large elastic-plastic transient deformations of thin shells*, AIAA Journal, **6**, 12, 2352-2359, 1968.
39. Ju. R. LEPIK, *Dynamika kołowych i pierścieniowych płyt z materiału sztywno-plastycznego wrażliwego na prędkość odkształcenia*, Prikladna Miechanika, **5**, 1, 60-66, 1969.
40. U. S. LINDHOLM, *Dynamic deformation of metals*, Colloquium on Behaviour of Metals under Dynamic Loading, Chicago 1965.
41. P. M. NAGHDI, S. A. MURCH, *On the mechanical behaviour of viscoelastic/plastic solids*, J. Appl. Mech., **30**, 321-328, 1963.
42. J. B. MARTIN, *Impulsive loading theorems for rigid-plastic continua*, J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE, **90**, 107-132, 1964.
43. J. B. MARTIN, *A displacement bound technique for elastic continua subjected to a certain class of dynamic loading*, J. Mech. Phys. Solids, **12**, 165-176, 1964.
44. J. B. MARTIN, *A displacement bound principle for inelastic continua, subjected to certain class of dynamic loading*, J. Appl. Mech., **32**, 1-6, 1965.
45. J. B. MARTIN, *Time and displacement bound theorems for viscous and rigid-visco-plastic continua subjected to impulsive loading*, Proc. 3rd Southeastern Conf., Columbia 1966.
46. T. S. MENTEL, *The plastic deformation due to impact of a cantilever beam with an attached tip mass*, J. Appl. Mech., **25**, 515-524, 1958.
47. Z. MRÓZ, *On forms of constitutive laws for elastic-plastic solids*, Arch. Mech., **18**, 3-35, 1966.
48. S. MURAKAMI, J. BEJDA, *Two-dimensional cylindrical problems of elastic/viscoplastic wave propagation*, Arch. Mech., **23**, 2, 199-211, 1971.
49. L. V. NIKITIN, *Transverse elastic/visco-plastic wave propagation in beams and plates*, Inż. Sbornik, **30**, 32-46, 1960.
50. J. L. NOWIŃSKI, *Large amplitude oscillation of triangular plates*, J. Franklin Inst., **273**, 1965.
51. E. T. ONAT, R. M. HAYTHORNTHWAITE, *The load carrying capacity of circular plates at large deflection*, J. Appl. Mech., **23**, 49-55, 1956.
52. A. PABIANEK, *Constitutive equations for viscoplastic rotationally symmetric shells with Huber-Mises yield condition*, Arch. Mech., **21**, 6, 827-836, 1969.
53. A. PABIANEK, *Lepkoplastyczne płynięcie powłoki walcowej przy warunku plastyczności Hubera-Misesa*, Rozpr. Inż., **18**, 2, 1971.
54. A. PABIANEK, *Dynamic loading of rigid-viscoplastic cylindrical shell*, Arch. Mech., **21**, 2, 199-211, 1969.

55. E. W. PARKES, *The permanent deformation of a cantilever struck transversely at its tip*, Proc. Roy. Soc. London, A **288**, 462-476, 1955.
56. N. PERRONE, *A mathematically tractable model of strain-hardening rate sensitivity plastic flow*, J. Appl. Mech., **31**, 1, 210-211, 1960.
57. N. PERRONE, *Impulsively loaded strain-rate sensitive plates*, J. Appl. Mech., **34**, 2, 380-384, 1967.
58. P. PERZYNA, *The constitutive equations for rate sensitive plastic materials*, Quart. Appl. Math., **20**, 321-332, 1963.
59. P. PERZYNA, *The constitutive equations for work-hardening and rate sensitive plastic materials*, Proc. Vibr. Probl., **4**, 281-290, 1963.
60. P. PERZYNA, *On physical foundations of viscoplasticity*, 12-th Int. Congr. Appl. Mech., Stanford 1968.
61. P. PERZYNA, *Thermodynamic theory of viscoplasticity*, Advances in Applied Mechanics, **12**, 1971.
62. P. PERZYNA, *Thermodynamics of rheological materials with internal changes*, J. Mécanique, **10**, 1971.
63. P. PERZYNA, W. WOJNO, *Thermodynamics of a rate sensitive plastic material*, Arch. Mech., **20**, 499-511, 1968.
64. W. PRAGER, *Linearization in viscoplasticity*, Öster. Ing. Arch., **15**, 1-4, 152-157, 1961.
65. R. D. RICHTMYER, *Difference methods for initial value problems*, Interscience Publ., London 1957.
66. A. SAWCZUK, *On formulation of large deflection theory for perfectly plastic shells*, Proc. Natl. Bulgarian Conf. Appl. Mech., Varna 1969.
67. A. SAWCZUK, M. K. DUSZEK, *O związkach podstawowych teorii powłok plastycznych*, Rozpr. Inż., **18**, 4, 1970.
68. A. SAWCZUK, M. K. DUSZEK, *A note on the interaction of shear and bending in plastic plates*, Arch. Mech., **15**, 411, 1963.
69. A. SAWCZUK, P. G. HODGE, *Comparison of yield conditions for circular cylindrical shells*, J. Franklin Inst., **269**, 5, 362-374, 1960.
70. J. A. SEILER, B. A. COTTER, P. S. SYMONDS, *Impulsive loading of elastic-plastic beams*, J. Appl. Mech., **23**, 4, 515-521, 1956.
71. *Slaming of Ships*, a Critical Review of the Current State of Knowledge, Ship Structure Committee, 1970.
72. B. STORAKERS, *On finite deformation and failure of nonlinear viscoplastic structures*, Ph.D. Thesis, Royal Technical University Stockholm, 1969.
73. P. S. SYMONDS, *Survey of methods of analysis for plastic deformations of structures under dynamic loading*, Brown University Report 1-67, June 1967.
74. G. S. SZAPIRO, *Uderzenie w sztywno-plastyczną płytę pierścieniową*, PMM, **23**, 1, 234-241, 1959.
75. *Teoria Plastyczności*, praca zbiorowa pod redakcją W. Olszaka, P. Perzyny i A. Sawczuka, PWN, Warszawa 1965.
76. T. C. T. TING, P. S. SYMONDS, *Longitudinal impact on viscoplastic rods-linear stress-strain rate law*, J. Appl. Mech., **31**, 199-207, 1964.
77. C. TRUESDELL, W. NOLL, *The non-linear field theories of mechanics*, Encyclopedia of Physics III/3, Berlin 1965, Springer.
78. A. J. WANG, *The permanent deflection of a plastic plate under blast loading*, J. Appl. Mech., **22**, 375-376, 1955.
79. A. J. WANG, H. G. HOPKINS, *On the plastic deformation of built-in circular plate under impulsive loading*, J. Mech. Phys. Solids, **3**, 22-37, 1954.
80. T. WIERZBICKI, *Bending of rigid-viscoplastic circular plates*, Arch. Mech., **16**, 5, 1964.
81. T. WIERZBICKI, *Dynamics of rigid-viscoplastic circular plates*, Arch. Mech., **17**, 851, 1965.
82. T. WIERZBICKI, *Response of rigid-viscoplastic circular and square plates to dynamic loading*, Techn. Report No 162, Stanford University 1966.

83. T. WIERZBICKI, *Impulsive loading of rigid viscoplastic plates*, Int. J. Solids Structures, 3, 635-647, 1967.
84. T. WIERZBICKI, *On the bending-shear interaction in viscoplastic flow of circular plates*, Biul. PAN, 17, 3, 153-159, 1969.
85. T. WIERZBICKI, *A method of approximate solution of boundary value problems for rigid viscoplastic structures*, Acta Mechanica, 3, 1, 56-66, 1976.
86. T. WIERZBICKI, *Non-associated constitutive law in viscoplasticity with application to dynamics of plates and shells*, Acta Mechanica, 11, 1, 1971.
87. T. WIERZBICKI, *Large deflections of strain rate sensitive plate loaded impulsively*, Arch. Mech., 21, 1, 67-79, 1969.
88. T. WIERZBICKI, *On the region of admissible deformations in impulsive loading problems*, J. Mech. Phys. Solids, 19, 6, 1970.
89. T. WIERZBICKI, *Bounds on large dynamic deformations of structures*, J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE, 96, 267-276, 1970.
90. T. WIERZBICKI, *Viscoplastic flow of rotationally symmetric shells with particular application to dynamic loading*, Prace IPPT 1/1968.
91. T. WIERZBICKI, J. M. KELLY, *Finite deflection of a circular viscoplastic plate subject to projectile impact*, Int. J. Solids Structures, 4, 1081-1092, 1968.
92. T. WIERZBICKI, *A theoretical and experimental investigation of impulsively loaded clamped circular viscoplastic plates*, Int. J. Solids Structures, 6, 553-568, 1970.
93. T. WIERZBICKI, H. ANDRZEJEWSKI, *An experimental and theoretical study of impulsively loaded viscoplastic cylindrical shells*, Prace IPPT 11/1969.
94. M. L. WILKINS, *Finite difference scheme for calculating problems in two space dimensions and time*, J. Comp. Physics, 5, 1970.
95. M. L. WILKINS, *Calculation of elastic-plastic flow*, Methods in Computational Physics, vol. 3, Academic Press 1964.
96. E. A. WITMER, H. A. BALMER, J. W. LEECH, T. H. H. PIAN, *Large dynamic deformations of beams, circular rings, circular plates and shells*, 1, 8, 1848-1857, 1963.
97. E. A. WITMER, E. N. CLARK, H. A. BALMER, *Experimental and theoretical studies of explosive induced large dynamic and permanent deformations of simple structures*, Exp. Mech., 7, 2, 56-66, 1967.
98. W. WOJEWÓDZKI, *Dynamic buckling of a visco-plastic cylindrical shell subjected to axial impact*, Arch. Mech., 23, 1, 73-92, 1971.
99. A. SAWCZUK, *Large deflections of rigid-plastic plates*, Proc. 11-th Int. Congress of Appl. Mech., Munich 1964.
100. J. B. MARTIN, S. P. SYMONDS, *Mode approximations for impulsively loaded rigid-plastic structures*, J. Eng. Mech. Division, Proc. ASCE, 92, No EM5, 4366, 1966.
101. P. PERZYNA, *Teoria Lepkosprężystości*, PWN Warszawa 1966.

Резюме

ДИНАМИКА ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Представлены два приближенных метода анализа динамических процессов в тонкостенных конструкциях. Принята жестко-идеально пластическая и жестко-вязко-пластическая модели материала.

Метод линеаризации определяющих уравнений на основе неассоциированного закона текучести, дает возможность определить переменный во времени профиль прогибов оболочки и найти конечную форму деформированной конструкции. В свою очередь, метод оценки дает быструю оценку величины максимального прогиба и времени работы конструкции. Оба метода иллюстрируются на примерах решений краевых задач для пластинок и оболочек. Точность полученных решений определяется путем сравнения с экспериментальными данными.

SUMMARY

DYNAMICS OF VISCOPLASTIC SHELLS

Two approximate methods of analysis of dynamical processes in thin-walled structures are discussed in the paper. The rigid — perfectly plastic and rigid — viscoplastic models are considered.

The method of linearization of the constitutive equations based upon the non-associated flow law makes it possible to determine the time-dependent profile of the shell deflection and to establish the final shape of the deformed structure. The method of estimation, on the other hand, allows for a quick determination of the maximum deflection and the *response time* of the structure. Both methods are illustrated by examples of solutions of a number of boundary value problems for plates and shells. The accuracy of the solutions derived is determined by comparison with the experimental data.

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 czerwca 1971 r.
