

NIELINIOWE ZAGADNIENIE STATECZNOŚCI SPRĘŻYTEJ TRÓJWARSTWOWEJ OTWARTEJ POWŁOKI WALCOWEJ

WACŁAW SZYC (POZNAŃ)

WSTĘP

Powierzchniowe konstrukcje nośne trójwarstwowe i wielowarstwowe znajdują ostatnio coraz szersze zastosowania w budowie pojazdów (głównie w konstrukcjach lotniczych) dzięki swym niewątpliwym zaletom, wśród których największe znaczenie posiada stosunkowo duża sztywność przy małym ciężarze własnym. Ma to również swoje odbicie w rozwoju prac teoretycznych z dziedziny płyt i powłok wielowarstwowych. Wśród wielu problemów poruszonych w tych pracach ważne miejsce zajmują zagadnienia stateczności. Metoda rozwiązania tych problemów została opracowana przez M. STEINA i J. MAYERSA [1]. Dostosowali oni klasyczną teorię Donella w ten sposób, aby można było uwzględnić deformacje powłoki trójwarstwowej, uwarunkowane ścinaniem. Równania nieliniowej utraty stateczności sformułowane zostały przez C. T. WANGA [2], natomiast nieliniową analizę utraty stateczności przeprowadzili C. T. WANG i G. V. R. RAO [3]. Wpływ wstępnych odchyień od geometrycznego kształtu powłoki przeanalizowali H. W. MARCH i E. W. KUENZI [4], natomiast przebieg utraty stateczności i stany zakrytyczne badał R. J. SYLVESTER [5]. W ostatnich latach zagadnienia stateczności powłok trójwarstwowych rozwijane były szeroko przez uczonych radzieckich. Wśród ważniejszych pozycji należy wymienić przede wszystkim monografię E. I. GRIGOLUKA i P. P. CZUŁKOWA [6], poświęconą rozwiązaniu zagadnień stateczności sprężytej powłok walcowych i stożkowych niesymetrycznej budowy z tzw. «sztywnym» wypełniaczem przy małych ugięciach. Na podstawie równania wariacyjnego Lagrange'a wyprowadzono równania równowagi oraz rozwiązano szereg liniowych zagadnień stateczności przy różnych obciążeniach. Wartości obciążeń krytycznych uzależniono od szeregu parametrów fizycznych i geometrycznych, przedstawiając wyniki obliczeń w formie wielu wykresów. Zagadnienie lokalnej utraty stateczności powłoki walcowej rozwiązano dla różnych rodzajów obciążenia w pracy L. M. KURSZINA [7] przy jednoczesnym określeniu warunków umożliwiających stosowanie w tych zagadnieniach uproszczenia polegającego na nieuwzględnieniu sztywności zginania warstw nośnych. Rozwiązaniu podobnego problemu z uwzględnieniem poprzecznej ściśliwości wypełniacza poświęcona jest praca N. K. GALIMOWA [8].

W niniejszej pracy podjęto analizę stateczności otwartej trójwarstwowej powłoki walcowej pod wpływem sił ściskających, przyłożonych do jej swobodnie podpartych

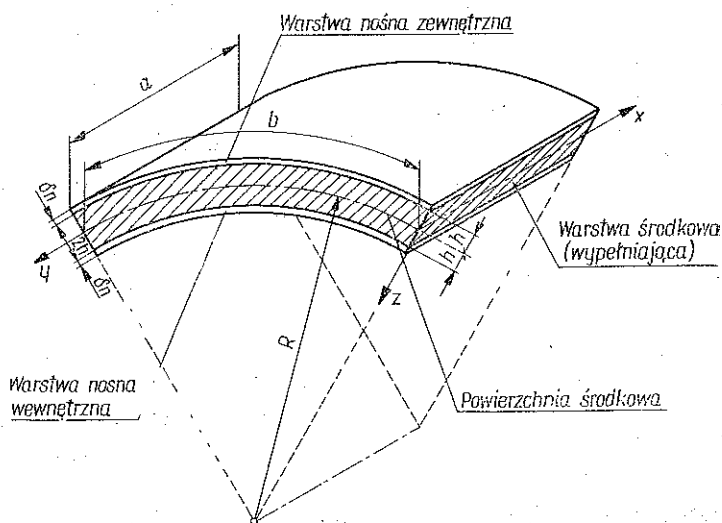
brzegów. Zagadnienie rozwiązano na podstawie związków teorii nieliniowej i poza wyznaczeniem obciążeń krytycznych przeanalizowano również przebieg utraty stateczności. Głównym celem pracy jest analiza wpływu wstępnych odchyień od geometrycznie idealnego kształtu, a także podstawowych parametrów geometrycznych (grubość warstw) i fizycznych (sztywność) materiału powłoki na przebieg utraty stateczności. Jedynym założeniem upraszczającym dla modelu izotropowego wypełniacza jest przyjęcie jego nieściśliwości w kierunku normalnym do powierzchni powłoki. Uproszczenie to, jak wykazał L. E. BRIUKKER [9], jest dopuszczalne w szerokim zakresie praktycznie ważnych przypadków konstrukcji trójwarstwowych.

1. ZAŁOŻENIA I PODSTAWOWE ZALEŻNOŚCI

Rozpatrzmy trójwarstwową otwartą powłokę walcową składającą się z dwu cienkich warstw nośnych (zewnętrznej i wewnętrznej) o jednakowych izotropowych własnościach sprężystych i tej samej grubości oraz z warstwy środkowej (wypełniającej) o odpowiednio mniejszym module sprężystości.

Na powierzchni środkowej powłoki przyjmujemy ortogonalny układ współrzędnych x, y, z , przy czym środek układu znajduje się w jednym z naroży powłoki. Oś x przebiega wzdłuż tworzącej powłoki, prostopadła do niej oś y leży na powierzchni środkowej, oś z skierowana jest prostopadle do powierzchni środkowej z dodatnim zwrotem ku środkowi krzywizny. Wymiary powłoki w kierunku osi x i y oznaczmy odpowiednio przez a i b , grubość warstw nośnych przez δ_n , a grubość warstwy wypełniającej przez $2h$. Promień zakrzywienia powierzchni środkowej powłoki wynosi R (rys. 1). Założymy ponadto, że

— brzegi powłoki są swobodnie podparte tak, że możliwe jest jedynie wystąpienie reakcji w kierunku prostopadłym do powierzchni środkowej;

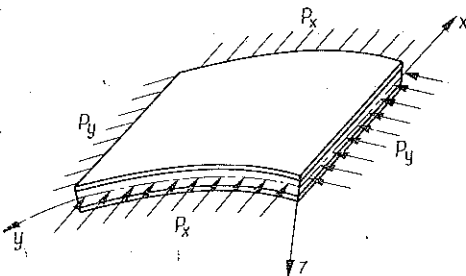


Rys. 1.

— powłoka obciążona jest wzdłuż brzegów siłami ciągłymi p_x , działającymi w kierunku tworzących oraz stycznie p_y do powierzchni środkowej powłoki w kierunku obwodowym (rys. 2);

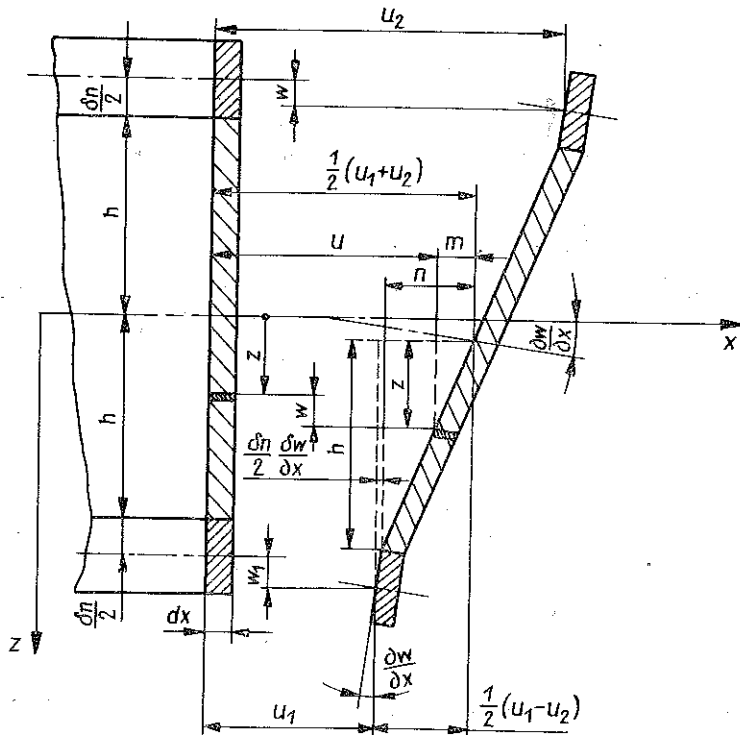
— obciążenie to nie zależy od zmiennych x i y .

Zależności geometryczne pomiędzy składowymi stanu przemieszczenia u, v, w dowolnego punktu powłoki, a przemieszczeniami punktów leżących na powierzchniach środkowych warstw nośnych wewnętrznej u_1, v_1, w_1 i zewnętrznej u_2, v_2, w_2 , określimy opierając się na założeniu tzw. linii łamanej [10]. W myśl tego założenia proste prostopadłe do powierzchni środkowych poszczególnych warstw przed odkształceniem pozostają prostymi i po odkształceniu, jednak w przypadku warstwy wypełniającej nie są już one prostopadłe do powierzchni środkowej powłoki. Zakłada się ponadto, że przemieszczenia promieniowe w punktów poszczególnych warstw nie zależą od współrzędnej z .



Rys. 2.

W związku z tymi założeniami w warstwach nośnych panuje płaski stan naprężeń, natomiast w warstwie środkowej pomija się jedynie naprężenia normalne



Rys. 3.

w kierunku promieniowym. Zgodnie z hipotezą linii łamanej przemieszczenia u, v, w w kierunkach osi x, y, z wyniosą (rys. 3)

dla warstw nośnych (wewnętrznej i zewnętrznej)

$$(1.1) \quad \begin{aligned} u &= u_1 - \left(z \mp h \mp \frac{\delta n}{2} \right) \frac{\partial w_1}{\partial x}, \\ v &= v_1 - \left(z \mp h \mp \frac{\delta n}{2} \right) \frac{\partial w_1}{\partial y}; \end{aligned}$$

dla warstwy środkowej mamy natomiast (rys. 3)

$$u = \frac{1}{2} (u_1 + u_2) - m, \quad m = n \frac{z}{h}, \quad n = \frac{1}{2} (u_2 - u_1) - \frac{\delta n}{2} \frac{\partial w}{\partial x},$$

a więc

$$(1.2) \quad u = \frac{1}{2} \left[u_1 + u_2 + \frac{z}{h} \left(u_1 - u_2 + \delta_n \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right].$$

Dla wszystkich warstw powłoki przyjmujemy $w = w_1 = w_2$.

Odształcenia powłoki przy dużych ugięciach określone są znanymi związkami geometrycznymi:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \end{aligned}$$

gdzie ε i γ są wydłużeniem względnym i kątem odkształcenia postaciowego w odpowiednim kierunku lub płaszczyźnie.

2. RÓWNANIA RÓWNOWAGI

Jeśli w ciele sprężystym znajdującym się w stanie równowagi pojawią się małe wirtualne przemieszczenia, to, jak wiadomo, równowaga zostanie zachowana pod warunkiem, że przyrost całkowitej energii potencjalnej układu $\delta\pi = 0$, przy czym $\pi = U - A$, gdzie U jest energią potencjalną wewnętrznych sił sprężystości oraz A jest pracą sił zewnętrznych (powierzchniowych i masowych). Otrzymamy zatem związek

$$(2.1) \quad \delta U - \delta A = 0,$$

na podstawie którego można wyprowadzić równanie równowagi elementu trójwarstwowej powłoki walcowej.

Energia odkształcenia sprężystego poszczególnych warstw wynosi

$$(2.2) \quad U_i = \frac{1}{2} \int_V [\sigma_{xi} \varepsilon_{xi} + \sigma_{yi} \varepsilon_{yi} + \tau_{xyi} \gamma_{xyi} + (\tau_{xzi} \gamma_{xzi} + \tau_{yzi} \gamma_{yzi})] dV,$$

$$i = 1, 2, 3,$$

przy czym $i = 1, 2$ dla warstw nośnych (wewnętrznej i zewnętrznej), $i = 3$ dla warstwy środkowej oraz

$$(2.3) \quad U = \sum_{i=1}^3 U_i.$$

Dwa ostatnie składniki we wzorach (2.2) pomija się w odniesieniu do warstw nośnych wobec małej ich grubości (z założenia). Wyrażając naprężenia σ i τ w odpowiednich kierunkach przez odkształcenia ε i γ wg prawa Hooke'a i uwzględniając formuły (1.1)–(1.3), całkując względem zmiennej z w odpowiednich granicach wykorzystując zależności (2.2) i (2.3), otrzymamy

$$(2.4) \quad U = (B+B_s) \int_0^a \int_0^b \left\{ \left[\frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]^2 + \left[\frac{\partial v_\alpha}{\partial y} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]^2 + \right. \\ \left. + 2\nu \left[\frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \left[\frac{\partial v_\alpha}{\partial y} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} (1-\nu) \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial y} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy + B \int_0^a \int_0^b \left\{ \left[\left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_\beta}{\partial y} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial u_\beta}{\partial x} \frac{\partial v_\beta}{\partial y} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} (1-\nu) \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial y} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy + D \int_0^a \int_0^b \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy + \frac{D_s}{h^2} \int_0^a \int_0^b \left[\left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x} + \frac{\delta_n}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial v_\beta}{\partial y} + \frac{\delta_n}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x} + \frac{\delta_n}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial v_\beta}{\partial y} + \frac{\delta_n}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (1-\nu) \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial y} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x} + \delta_n \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy + \frac{G}{h} \int_0^a \int_0^b \left\{ \left[u_\beta + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(h + \frac{\delta_n}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right]^2 + \left[v_\beta + \left(h + \frac{\delta_n}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial y} \right]^2 \right\} dx dy,$$

gdzie

$$B_s = \frac{E_s h}{1-\nu^2}, \quad D_s = \frac{E_s h^3}{3(1-\nu^2)}, \quad B = \frac{E_n \delta_n}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{E_n \delta_n^3}{12(1-\nu^2)}$$

są sztywnościami rozciągania i zginania warstw środkowej i nośnych; E_s i E_n są to moduły Younga materiału warstw, G oznacza moduł sprężystości postaciowej materiału warstwy środkowej oraz ν współczynnik przewężenia względnego (Poissona).

Przemieszczenia sprowadzone oznaczono w sposób następujący

$$u_\alpha = \frac{1}{2}(u_1 + u_2),$$

$$u_\beta = \frac{1}{2}(u_1 - u_2), \quad v_\alpha = \frac{1}{2}(v_1 + v_2), \quad v_\beta = \frac{1}{2}(v_1 - v_2).$$

Wprowadzając funkcję (2.4) do równania (2.1), przyjmując na pracę sił zewnętrznych [obciążenia powierzchniowe $q(x, y)$] całkę

$$A = \int_0^a \int_0^b q w \, dx \, dy$$

i wykonując określone wariacje, otrzymamy równanie wariacyjne, z którego zgodnie z lematem podstawowym rachunku wariacyjnego [11] dostaniemy równania różniczkowe równowagi elementu powłoki trójwarstwowej, a także zespół warunków brzegowych zagadnienia. Równania równowagi uzyskamy z przyrównania do zera wyrażen zawierających wariacje tego samego argumentu i spełnionych na całej powierzchni powłoki, tj. występujących pod znakiem całki powierzchniowej. Warunki brzegowe otrzymamy w podobny sposób z funkcji dotyczących brzegu powłoki częściowo scałkowanych, tj. występujących pod znakiem całki pojedynczej. W myśl powyższego otrzymuje się następujące równania równowagi wyrażone w składowych stanu przemieszczenia:

$$(2.5) \quad \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial x \partial y} - \frac{\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} +$$

$$+ \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial y^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial y} +$$

$$+ \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{h}{G} \left(B + \frac{D_s}{h^2} \right) \left(\frac{\partial^2 u_\beta}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v_\beta}{\partial x \partial y} \right) + \frac{D_s \delta_n}{2 G h} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) -$$

$$- u_\beta - \left(h + \frac{\delta_n}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{h}{G} \left(B + \frac{D_s}{h^2} \right) \left(\frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v_\beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_\beta}{\partial y^2} \right) + \frac{D_s \delta_n}{2 G h} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) -$$

$$- v_\beta - \left(h + \frac{\delta_n}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial y} = 0,$$

$$\begin{aligned}
 (2.5) \quad & 2(B+B_s) \left\{ \frac{1}{R} \left[\frac{\partial v_\alpha}{\partial y} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + v \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + \frac{v}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \right. \\
 & \left. + \frac{\partial w}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2} + \frac{1-v}{2} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial y^2} + \frac{1+v}{2} \frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial x \partial y} - \frac{v}{R} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1-v}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{1+v}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial w}{\partial y} \left(\frac{1+v}{2} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x \partial y} + \frac{1-v}{2} \frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial y^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial y} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{1-v}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1+v}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left[\frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + v \frac{\partial v_\alpha}{\partial y} - v \frac{w}{R} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{v}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left[\frac{\partial v_\alpha}{\partial y} - \frac{w}{R} + v \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{v}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \\
 & \quad \left. + (1-v) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} - \left(2D + \frac{D_s \delta_n^2}{2h^2} \right) \Delta \Delta w - \\
 & \quad - \frac{D_s \delta_n}{h^2} \Delta \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x} + \frac{\partial v_\beta}{\partial y} \right) + 2 \frac{G}{h} \left(h + \frac{\delta_n}{2} \right) \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[u_\beta + \left(h + \frac{\delta_n}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right] + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left[v_\beta + \left(h + \frac{\delta_n}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial y} \right] \right\} - q = 0,
 \end{aligned}$$

gdzie Δ jest operatorem Laplace'a.

Równania te w podobny sposób uzyskał L. M. KURSZIN [12]. Równania (2.5)_{1,2} odpowiadają równaniom rzutów sił na kierunki osi x i y . Równania (2.5)_{3,4} stanowią warunki równowagi momentów względem osi x i y . Natomiast równanie (2.5)₅ jest równaniem rzutu sił na oś z .

3. FUNKCJE NAPRĘŻEŃ I PRZEMIESZCZEŃ. RÓWNIANIA WYJŚCIOWE

Otrzymane równania równowagi (2.5) odpowiednio przekształcimy sprowadzając zagadnienie do układu trzech równań różniczkowych zwanych równaniami wyjściowymi. Siły normalne N_x, N_y i styczne S_{xy} działające w przekrojach $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ powłoki otrzymamy całkując odpowiednie naprężenia σ_x, σ_y i τ_{xy} po obszarze jej grubości. Opierając się na prawie Hooke'a i związkach (1.1)–(1.3) siły te wyrazić można przez składowe stanu przemieszczenia:

$$\begin{aligned}
 (3.1) \quad & N_x = 2(B+B_s) \left[\frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + v \frac{\partial v_\alpha}{\partial y} - v \frac{w}{R} + \frac{1}{2} v \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right], \\
 & N_y = 2(B+B_s) \left[\frac{\partial v_\alpha}{\partial y} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + v \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + \frac{1}{2} v \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right], \\
 & S_{xy} = (1-v)(B+B_s) \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right).
 \end{aligned}$$

Wprowadzając funkcję naprężeń F przedstawimy siły normalne i styczne w postaci

$$(3.2) \quad N_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad N_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad S_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.$$

Ponadto przyjmujemy funkcję przemieszczeń ψ określoną zależnością

$$(3.3) \quad \psi = \frac{\partial u_\beta}{\partial x} + \frac{\partial v_\beta}{\partial y}.$$

Po odpowiednich przekształceniach z wykorzystaniem wzorów (3.1), (3.2) i (3.3) z równań równowagi (2.5) otrzymamy następujący układ trzech równań różniczkowych:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} & \left(2D - \frac{D_s \delta_n}{h}\right) \Delta \Delta w - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - L(w, F) - 2 \left[B \left(h + \frac{\delta_n}{2} \right) + \frac{1}{3} B_s h \right] \Delta \psi + q = 0, \\ & \Delta \psi - \frac{G}{h \left(B + \frac{1}{3} B_s \right)} \psi = \frac{G \left(h + \frac{\delta_n}{2} \right)}{h \left(B + \frac{1}{3} B_s \right)} \Delta w - \frac{D_s \delta_n}{2h^2 \left(B + \frac{1}{3} B_s \right)} \Delta \Delta w, \\ & \Delta \Delta F + 2(B + B_s)(1 - \nu^2) \left[\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} L(w, w) \right] = 0. \end{aligned}$$

Dla skrócenia zapisu wprowadzono tu nieliniowy operator różniczkowy

$$L(f_1, f_2) = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y}.$$

Równanie (3.4)₁ jest równaniem równowagi, a równanie (3.4)₂ równaniem zgodności odkształceń powłoki trójwarstwowej. Odpowiadają one swą postacią znanym równaniom powłok jednowarstwowych. Dodatkowe równanie (3.4)₃ jest równaniem zgodności przemieszczeń powłoki trójwarstwowej.

4. WARUNKI BRZEGOWE

Poza równaniami równowagi otrzymamy ze związku (2.1), jak to opisano w części drugiej niniejszej pracy, układ warunków brzegowych zagadnienia. Warunki brzegowe mają charakter alternatywny, tj. zależny od sposobu podparcia i obciążenia brzegów powłoki. Zgodnie z założeniami przyjętymi w części pierwszej przyjmą one postać:

dla brzegów krzywoliniowych $x=0$, $x=a$

$$(4.1) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -p_x, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0, \\ & \left(B + \frac{D_s}{h^2} \right) \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_\beta}{\partial y} \right) + \frac{D_s \delta_n}{2h^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0, \end{aligned}$$

$$(4.1) \quad v_\beta = 0, \quad w = 0,$$

$$[c.d.] \quad \left(2D + \frac{D_s \delta_n^2}{2h^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{D_s \delta_n}{h^2} \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_\beta}{\partial y} \right) = 0;$$

dla brzegów prostoliniowych $y=0$, $y=b$

$$(4.2) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -p_y, \quad u_\beta = 0,$$

$$\left(B + \frac{D_s}{h^2} \right) \left(\frac{\partial v_\beta}{\partial y} + \nu \frac{\partial u_\beta}{\partial x} \right) + \frac{D_s \delta_n}{2h^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0, \quad w = 0,$$

$$\left(2D + \frac{D_s \delta_n^2}{2h^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{D_s \delta_n}{h^2} \left(\frac{\partial v_\beta}{\partial y} + \nu \frac{\partial u_\beta}{\partial x} \right) = 0.$$

Przy formułowaniu powyższych warunków wzięto pod uwagę również związki (3.1) i (3.2).

Warunki (4.1)₁ i (4.2)₂ określają brzegowe wartości sił normalnych N_x i N_y , które muszą być oczywiście równe przyłożonym do brzegów powłoki siłom zewnętrznym. Warunki (4.1)₂ i (4.2)₁ oznaczają zerowanie sił stycznych S_{xy} na swobodnie podpartych brzegach powłoki. Zależności (4.1)₅ i (4.2)₅ są warunkami oznaczającymi zerowe ugięcie brzegów powłoki. Równania (4.1)₄ i (4.2)₃ przedstawiają warunki, w myśl których na brzegach powłoki nie zachodzą obroty w płaszczyznach prostopadłych do powierzchni środkowej powłoki, a stycznych do jej brzegów. Pozostałe warunki oznaczają znikanie momentów zginających na brzegach.

5. FUNKCJA UGIĘCIA. RÓWNANIA ZGODNOŚCI ODKSZTAŁCEŃ ORAZ PRZEMIESZCZEŃ

Ponieważ wiadomo, że na przebieg utraty stateczności powłoki duży wpływ mają ewentualne początkowe odchylenia od geometrycznie idealnego kształtu powłoki (tzw. wstępne ugięcie), wprowadzimy do równań podstawowych (3.4) na miejsce ugięcia (w) wyrażenie w postaci $w + w_0$, gdzie $w_0(x, y)$ oznaczać będzie wstępne (początkowe) przemieszczenie punktów powłoki w kierunku osi z . Zakładamy, że przemieszczenie to pojawiło się w powłoce jeszcze przed jej obciążeniem. Ugięcie wstępne wprowadzimy tylko do wyrazów nieliniowych równań (3.4) i przy założeniu, że w_0 jest małe w porównaniu z w , a zatem że

$$L(w + w_0, w + w_0) \approx L(w + 2w_0, w).$$

Po tych przekształceniach otrzymamy następujący układ równań różniczkowych:

$$(5.1) \quad \left(2D - \frac{D_s \delta_n}{h} \right) \Delta \Delta w - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - L(w + w_0, F) - 2 \left[B \left(h + \frac{\delta_n}{2} \right) + \frac{1}{3} B_s h \right] \Delta \psi + q = 0,$$

$$\Delta \psi - \frac{G \psi}{h \left(B + \frac{1}{3} B_s \right)} = \frac{G \left(h + \frac{\delta_n}{2} \right)}{h \left(B + \frac{1}{3} B_s \right)} \Delta w + \frac{D_s \delta_n}{2h^2 \left(B + \frac{1}{3} B_s \right)} \Delta \Delta w = 0,$$

$$(5.1) \quad \Delta \Delta F + 2(B+B_s)(1-\nu^2) \left[\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} L(w+2w_0, w) \right] = 0.$$

[c.d.]

Przyjmujemy, że funkcja aproksymująca ugięcie ma postać podwójnego szeregu:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin m\alpha x \sin n\beta y,$$

przyjmując w pierwszym przybliżeniu [13] jeden wyraz szeregu i zakładając, że przy deformacji powłoki zachodzi zjawisko tworzenia się jednej półfali ugięcia zarówno w kierunku podłużnym jak i obwodowym, otrzymamy

$$(5.2) \quad w(x, y) = W \sin \alpha x \sin \beta y.$$

Podobnie funkcję wstępnego ugięcia obierzemy w formie

$$(5.3) \quad w_0(x, y) = W_0 \sin \alpha x \sin \beta y.$$

W formułach (5.2) i (5.3) wprowadzono następujące oznaczenia: W, W_0 oznaczają odpowiednie ugięcia środka powłoki, punktu o współrzędnych

$$x = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{b}{2}, \quad \alpha = \frac{\pi}{a}, \quad \beta = \frac{\pi}{b}.$$

Tak dobrana funkcja ugięcia spełnia oczywiście warunki brzegowe (4.1)₅ i (4.2)₅.

Wprowadzenie przyjętej funkcji ugięcia do równań (5.1)_{2,3} umożliwia niezależne od siebie rozwiązanie tych równań oraz określenie funkcji naprężeń i przemieszczeń w postaci

$$(5.4) \quad F = (B+B_s)(1-\nu^2) \left[\frac{1}{16} W(W+2W_0) \left(\frac{\beta^2}{\alpha^2} \cos 2\alpha x + \frac{\alpha^2}{\beta^2} \cos 2\beta y \right) + \frac{2\alpha^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2} \frac{W}{R} \sin \alpha x \sin \beta y \right] - \frac{p_x y^2}{2} - \frac{p_y x^2}{2},$$

$$\psi = \frac{(\alpha^2+\beta^2) \left[G \left(h + \frac{\delta_n}{2} \right) + \frac{D_s \delta_n}{2h} (\alpha^2+\beta^2) \right]}{(\alpha^2+\beta^2) \left(B + \frac{1}{3} B_s \right) h + G} W \sin \alpha x \sin \beta y.$$

Spełnione są oczywiście warunki brzegowe (4.1)₁ i (4.2)₂, a dwa ostatnie wyrazy funkcji (5.4)₁ uwzględniają naprężenia stanu błonowego, pochodzące od obciążeń przyłożonych do brzegów powłoki.

6. ZASTOSOWANIE METODY BUBNOWA-GALERKINA

Rozwiązanie równania równowagi (5.1)₁ przeprowadzimy metodą Bubnowa-Galerkina. Równanie wariacyjne napiszemy w postaci

$$(6.1) \quad \int_0^a \int_0^b X \delta w(x, y) dx dy = 0,$$

gdzie δw oznacza wariację ugięcia spełniającą warunki brzegowe oraz gdzie

$$(6.2) \quad X = D_0 \Delta \Delta w - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - L(w + w_0, F) - 2B_0 \Delta \psi + q$$

jest lewą stroną równania (5.1)_t. Wprowadzono tu następujące oznaczenia: sprowadzona sztywność zginania

$$D_0 = 2D - \frac{D_s \delta_n}{h};$$

sprowadzona sztywność rozciągania

$$B_0 = B \left(h + \frac{\delta_n}{2} \right) + \frac{1}{3} B_s h.$$

Na podstawie związku (5.2) przyjmujemy

$$(6.3) \quad \delta w = \delta W \sin \alpha x \sin \beta y.$$

Podstawiając (6.2) i (6.3) do równania (6.1) oraz wykorzystując związki (5.2)–(5.4) po wykonaniu całkowania otrzymamy następujące równanie algebraiczne:

$$(6.4) \quad W(W + W_0) \delta_n \left(1 + \frac{B_s}{B} \right) (1 - \nu^2) \left[\frac{\pi^2}{32} (\alpha^4 + \beta^4) (W + 2W_0) - \frac{16}{3R} \frac{\alpha^4 \beta^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} \right] - \\ - \frac{\delta_n}{R} \left(1 + \frac{B_s}{B} \right) (1 - \nu^2) W \left[\frac{\beta^2}{3} (W + 2W_0) - \frac{\pi^2 \alpha^4}{2R(\alpha^2 + \beta^2)^2} \right] + 4 \frac{p_y \delta_n}{BR} + \\ + \frac{\pi^2 \delta_n}{4} \frac{D_0}{B} (\alpha^2 + \beta^2)^2 W + \frac{\pi^2 \delta_n}{4B} (W + W_0) (\alpha^2 p_x + \beta^2 p_y) + \\ + \frac{\pi^2 \delta_n B_0 (\alpha^2 + \beta^2)^2 \left[G \left(h + \frac{\delta_n}{2} \right) + \frac{D_s \delta_n}{2h} (\alpha^2 + \beta^2) \right]}{2B \left[(\alpha^2 + \beta^2) \left(B + \frac{1}{3} B_s \right) h + G \right]} W = 0.$$

Pominięto przy tym obciążenie powierzchniowe $q(x, y)$, którego w rozpatrywanym zagadnieniu nie uwzględnia się.

Wprowadźmy następujące bezwymiarowe parametry:

$$\zeta = \frac{W}{h}, \quad \zeta_0 = \frac{W_0}{h}, \quad \lambda = \frac{\delta_n}{h}, \quad \kappa = \frac{a}{h}, \quad \gamma = \frac{a}{b},$$

$$\eta = \frac{R}{h}, \quad \theta = \frac{Gh}{B}, \quad \rho = \frac{E_s}{E_n}, \quad \hat{p}_x = \frac{p_x}{B}, \quad \hat{p}_y = \frac{p_y}{B},$$

$$\xi = \frac{p_y}{p_x}, \quad \hat{t} = \frac{p_x}{p_{kr}},$$

gdzie p_{kr} oznacza górną krytyczną wartość obciążenia statycznego powłoki geometrycznie idealnej, którego wyznaczenie zostanie omówione w dalszej części rozważań.

Równanie (6.4) można teraz przedstawić w postaci

$$(6.5) \quad \hat{p}_x = \frac{1}{K_4 + K_5(\zeta + \zeta_0)} [K_1(\zeta + \zeta_0)(\zeta + 2\zeta_0)\zeta + K_2(\zeta + \zeta_0)\zeta + K_3\zeta].$$

Stałe K_i ($i=1, \dots, 5$) określone są przez bezwymiarowe parametry:

$$K_1 = \frac{\pi^6(\lambda + \rho)(1 + \gamma^4)(1 - \nu^2)}{32\kappa^4}, \quad K_2 = -\frac{16\pi^2\gamma^2(\lambda + \rho)(1 - \nu^2)}{3\eta\kappa^2(1 + \gamma^2)^2},$$

$$K_3 = \frac{\pi^2}{\eta}(\lambda + \rho)(1 - \nu^2) \left[\frac{1}{2\eta(1 + \gamma^2)^2} - \frac{\gamma^2}{3\kappa^2} \right] + \frac{\pi^6(1 + \gamma^2)^2}{2\kappa^2} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\lambda}{6\kappa^2} \left(\frac{1}{2}\lambda^2 - \rho \right) + \frac{\left[\lambda \left(1 + \frac{1}{2}\lambda \right) + \frac{1}{3}\rho \right] \left[\theta \left(1 + \frac{1}{2}\lambda \right) + \frac{1}{6} \frac{\pi^2\rho}{\kappa^2} (1 + \gamma^2) \right]}{\pi^2(1 + \gamma^2) \left(1 + \frac{1}{3} \frac{\rho}{\lambda} \right) + \theta\kappa^2} \right\},$$

$$K_4 = -4\xi \frac{\lambda}{\eta}, \quad K_5 = \frac{\pi^4\lambda}{4\kappa^2}(1 + \gamma^2\xi).$$

Z równania (6.5) możemy uzyskać górną krytyczną wartość obciążenia statycznego dla powłoki bez odchyień od kształtu geometrycznie idealnego zakładając, że

$$\zeta_0 = 0, \quad \xi \rightarrow 0.$$

Wyznamy górne obciążenie krytyczne dla powłoki obciążonej jedynie siłami rozłożonymi w sposób ciągły p_x na brzegach $x=0$ i $x=a$. Zatem, wobec $p_y=0$,

mamy $\xi=0$ oraz $K_4=0$, $K_5 = \frac{\pi^4\lambda}{4\kappa^2}$. Stąd

$$(6.6) \quad \hat{p}_{kr} = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \hat{p}_x(\zeta_0=0) = \frac{K_3}{K_5} = \frac{4}{\pi^2\eta\lambda}(\lambda + \rho)(1 - \nu^2) \left[\frac{\kappa^2}{2\eta(1 + \gamma^2)^2} - \frac{1}{3}\gamma^2 \right] +$$

$$+ 2\pi^2(1 + \gamma^2)^2 \left\{ \frac{\frac{1}{2}\lambda^2 - \rho}{6\kappa^2} + \frac{\left[\lambda \left(1 + \frac{1}{2}\lambda \right) + \frac{1}{3}\rho \right] \left[\theta \left(1 + \frac{1}{2}\lambda \right) + \frac{1}{6} \frac{\pi^2\rho}{\kappa^2} (1 + \gamma^2) \right]}{\lambda \left[\pi^2(1 + \gamma^2) \left(1 + \frac{1}{3} \frac{\rho}{\lambda} \right) + \theta\kappa^2 \right]} \right\}.$$

Równanie (6.5) można teraz przedstawić w postaci

$$(6.7) \quad \hat{t} = -\frac{a_2\zeta^3 + a_3\zeta^2 + a_4\zeta}{a_1\zeta + a_5}.$$

Parametr \hat{t} oznacza stosunek bieżącego obciążenia do górnego krytycznego dla powłoki geometrycznie idealnej (6.6),

$$\hat{t} = \frac{p_x}{p_{kr}} = \frac{\hat{p}_x}{\hat{p}_{kr}}.$$

Wartości stałych a_i ($i=1, \dots, 5$) wynoszą

$$a_1 = K_3, \quad a_2 = -K_1, \quad a_3 = -(3K_1 \zeta_0 + K_2),$$

$$a_4 = -[(2K_1 \zeta_0 + K_2) \zeta_0 + K_3], \quad a_5 = K_3 \zeta_0.$$

Górną i dolną wartość krytyczną parametru obciążenia \hat{t}_+ i \hat{t}_- dla powłoki posiadającej początkowe odchylenia od geometrycznie idealnego kształtu (wstępne ugięcie) można wyznaczyć jako ekstremum funkcji (6.7), przy czym maksimum w przedziale $\zeta \geq 0$ odpowiada górnej \hat{t}_+ , a minimum dolnej \hat{t}_- wartości krytycznej.

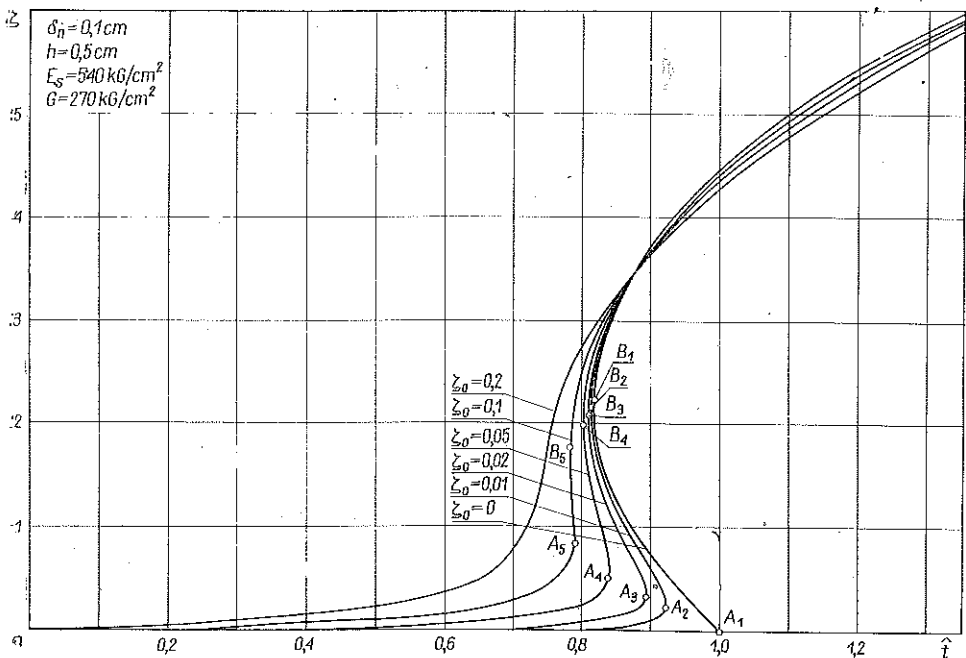
7. OBLICZENIA NUMERYCZNE I WNIOSKI

Obliczenia cyfrowe przeprowadzono dla otwartych powłok walcowych ściskanych wzdłuż tworzącej i wykonanych z następujących materiałów:

- 1) warstwy nośne z duraluminium D16T ($E_n = 7,19 \cdot 10^5 \text{ kG/cm}^2$, $\nu = 0,3$),
- 2) warstwa wypełniająca ze spienionego tworzywa sztucznego typu «Molto-pren» [14] o własnościach zależnych od stopnia spienienia ($E_s = 100$ do 1100 kG/cm^2 , $G = 50$ do 550 kG/cm^2).

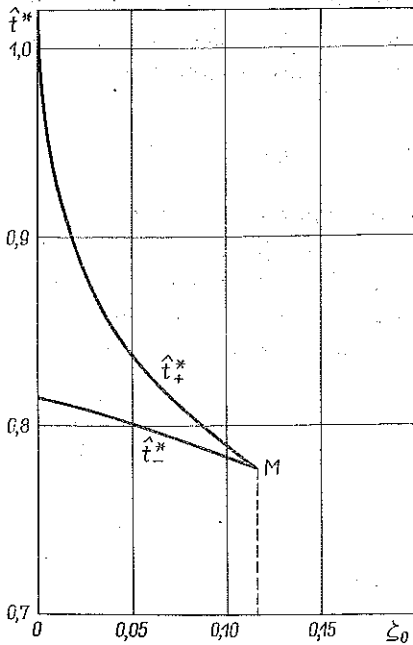
Jako stałe przyjęto następujące wymiary powłoki: długość w kierunku tworzącej $a = 60 \text{ cm}$, szerokość w kierunku obwodowym $b = 40 \text{ cm}$, średni promień zakrzywienia $R = 100 \text{ cm}$.

Rozwiązanie dla przypadku różnych wstępnych ugięć powłoki ζ_0 przedstawiono w formie wykresu na rys. 4. Zestawiono tu krzywe stateczności $\zeta(\hat{t})$ dla różnych



Rys. 4.

wartości parametru $\zeta_0=0$ do 0,2. Punkty A_i ($i=1, \dots, 5$) wyznaczają na osi odciętych wartości górne krytyczne parametru obciążenia \hat{t}_+^* , a punkty B_i dolne krytyczne \hat{t}_-^* . Obszar niestateczności, tj. przedział $\hat{t}_{B_i} < \hat{t} < \hat{t}_{A_i}$, maleje wraz ze wzrostem początkowych odchyżeń od geometrycznie idealnego kształtu powłoki i zanika całkowicie przy wartości $\zeta_0=0,116$ w punkcie M (rys. 5). Jak widać istota wpływu wstępnego



Rys. 5.

ugięcia na przebieg utraty stateczności jest taka sama, jak w przypadku powłok jednowarstwowych. Przebieg utraty stateczności przy zmieniającej się grubości ($h=0$ do 0,75 cm) warstwy wypełniającej ilustrują krzywe $W(\hat{p})$ na rys. 6.

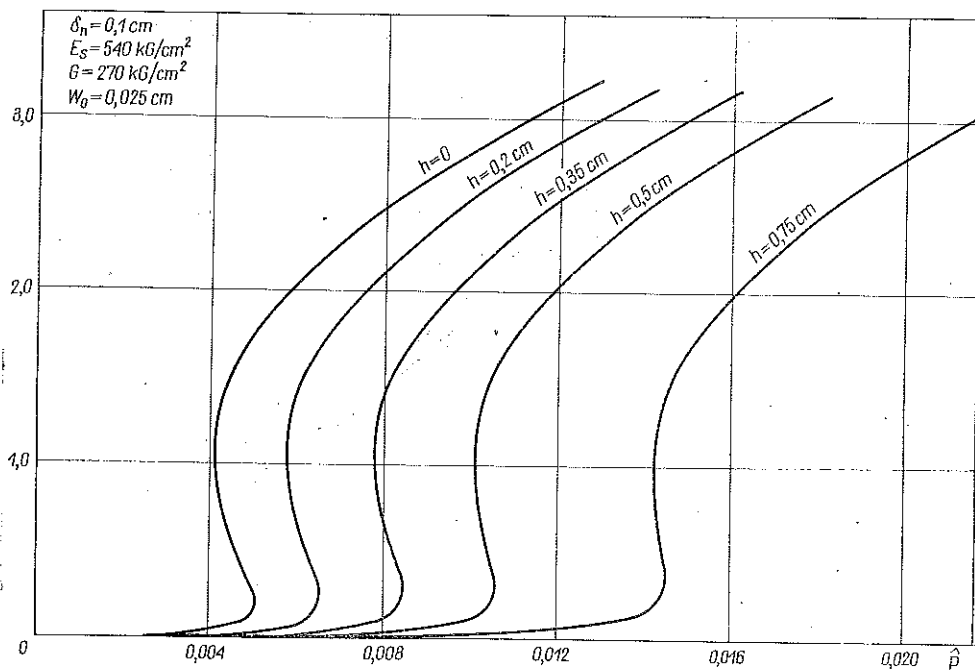
Z przeprowadzonej analizy wynika, że wraz ze wzrostem grubości h wzrastają nieliniowo wartości krytyczne obciążeń, przy czym maleje obszar niestateczności, tj. różnica $\hat{p}_+^* - \hat{p}_-^*$ (rys. 7). Krzywa $W(\hat{p})$ dla $h=0$ obrazuje przypadek powłoki jednowarstwowej. Kolejny wykres (rys. 8) przedstawia krzywe równowagi $\zeta(\hat{p})$ dla powłok o zmieniającej się grubości ($\delta_n = -0,05$ do 0,3 cm) warstw nośnych. Zwiększenie grubości δ_n powoduje zbliżony do liniowego wzrost wartości krytycznych obciążeń. Obszar niestateczności poszerza się wyraźnie, wzrasta także stosunek \hat{p}_+^*/\hat{p}_-^* (rys. 9). Przeprowadzono także obliczenia dla powłok o różnym stopniu spienienia

wypełniacza typu lekkiego ($E_s=0$ do 1050 kG/cm², $G=0$ do 530 kG/cm²). Rezultaty obliczeń przedstawia w formie krzywych $\zeta(\hat{p})$ wykres (rys. 10). Pierwsza krzywa ($E_s=0$, $G=0$) dotyczy czysto teoretycznego przypadku zerowej sztywności wypełniacza, świadczy jednak o braku nieciągłości przy przejściu granicznym $E_s \rightarrow 0$, $G \rightarrow 0$. Wzrost sztywności wypełniacza powoduje zwiększenie odporności powłoki na wyboczenie, przy czym jest on szczególnie wyraźny w zakresie małych sztywności. Obszar niestateczności nieznacznie maleje ze wzrostem sztywności (rys. 11). Wynika stąd, że nie można pomijać sztywności materiału wypełniacza nawet wówczas, gdy jest ona niewielka.

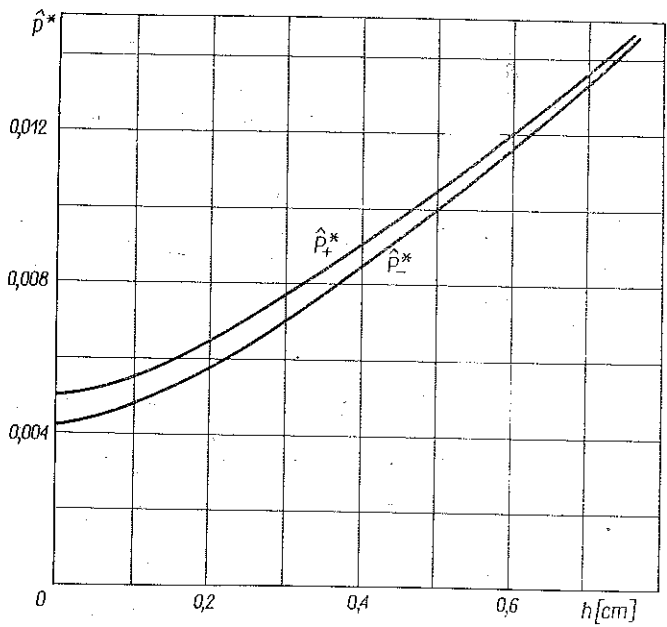
Podsumowując wyniki obliczeń można stwierdzić, co następuje:

- 1) wpływ wstępnego ugięcia na wartość obciążeń krytycznych jest analogiczny, do wpływu w przypadku powłok jednowarstwowych;
- 2) efekt nieliniowości zagadnienia stateczności powłoki trójwarstwowej jest wyraźnie mniejszy niż dla powłok jednowarstwowych, co potwierdzają wnioski szeregu prac; jest on tym mniejszy, im większa jest grubość warstwy wypełniającej (rys. 7);

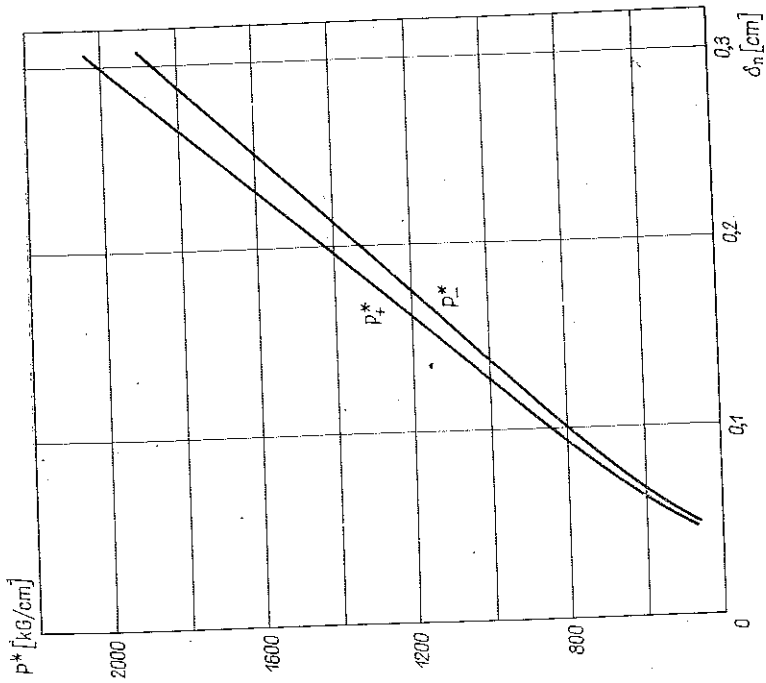
$W[\text{cm}]$



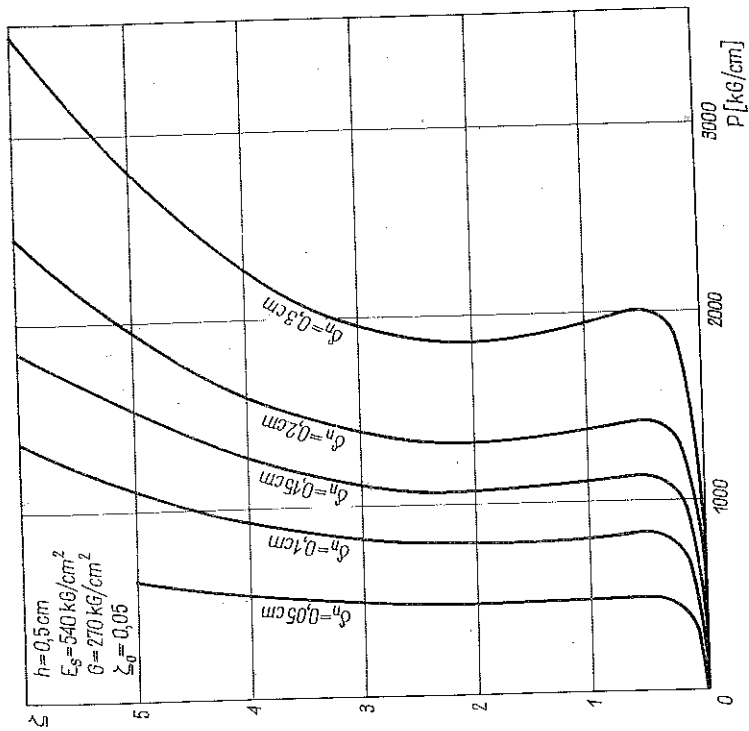
Rys. 6.



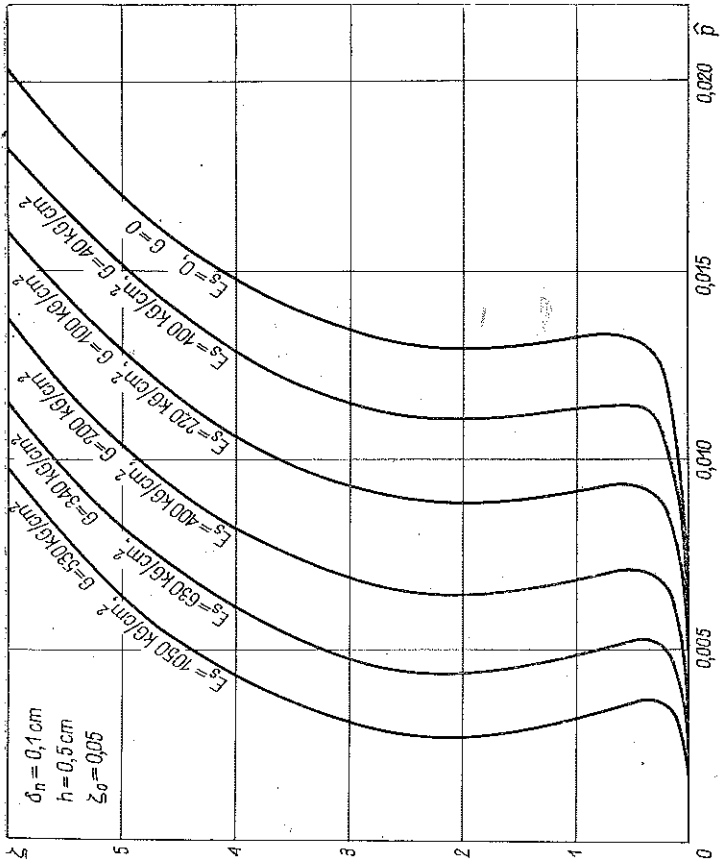
Rys. 7.



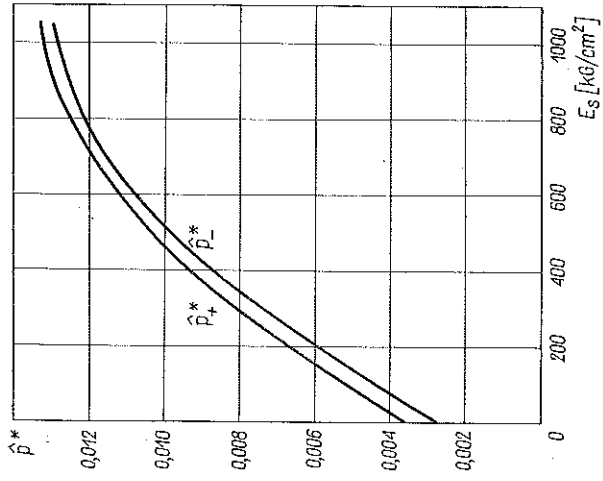
Rys. 9.



Rys. 8.



Rys. 10.



Rys. 11.

3) dokładne porównanie uzyskanych wyników nie jest niestety możliwe ze względu na to, że w literaturze znane są jedynie rozwiązania podające wartości obciążeń krytycznych w zależności od złożonych bezwymiarowych parametrów, natomiast w niniejszej pracy rezultaty uzależniono od konkretnych wymiarów i danych sprężystych materiału powłoki.

Można, rzecz jasna, porównać wyniki szczególne z rozwiązaniami innych autorów. Dla danych przedstawionych na początku p. 7 niniejszej pracy przy $\delta_n=0,1$ cm, $h=0,5$ cm, $G=270$ kG/cm², $E_s=540$ kG/cm² ze wzorów uzyskanych wg teorii liniowej, podanych przez STEINA i MAYERSA [1], otrzymuje się górne obciążenie krytyczne $p_{kr}=1098$ kG/cm, podczas gdy wg wzoru (6.6) wypada wartość o 9,5% mniejsza. Dla innych danych wyniki są podobne i tak np. dla $h=1$ cm, a także dla $G=530$ kG/cm² i $E_s=1050$ kG/cm² otrzymano wartości obciążeń krytycznych mniejsze odpowiednio o 11,2% i 7,6%. Natomiast wg zależności podanej przez KURSZINA [12], dla $a=b=60$ cm i pozostałych danych jak poprzednio otrzymuje się $p_{kr}=1599$ kG/cm. Związek (6.6) daje w tym przypadku wartość o 5,5% wyższą.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. M. STEIN, J. MAYERS, *A small deflection theory for curved sandwich plates*, NACA TN 2017, 1950, *Compressive buckling of simply supported curved plates and cylinders of sandwich construction*, NACA TN 2601, 1952.
2. C. T. WANG, *Principle and application of complementary energy method for thin homogeneous sandwich plates and shells with finite deflections*, NACA TN 2620, 1952.
3. C. T. WANG, G. V. R. RAO, *A study of an analogous model giving the nonlinear characteristics in the buckling theory of sandwich cylinders*, J. Aeronaut. Sci., **19**, 1952.
4. H. W. MARCH, E. W. KUENZL, *Buckling of cylinders of sandwich construction in axial compression*, U.S. Forest Prod. Lab., Rept. nr 183, 1952.
5. R. J. SYLVESTER, *Buckling of sandwich cylinders under axial load*, J. Aeronaut. Sci., **29**, 1962.
6. Э. И. Григолюк, П. П. Чулков, *Критические нагрузки трехслойных цилиндрических и конических оболочек*, Западно-Сиб. кн. изд-во, Новосибирск 1966.
7. Л. М. Куршин, *Устойчивость трехслойных цилиндрических оболочек при сжатии, давлении и совместной действии давления и сжатия*, В сб. „Расчеты элементов авиац. констр. Вып. 3”, Машиностроение, Москва 1965.
8. Н. К. Галимов, *Устойчивость трехслойных цилиндрических оболочек под действием внешнего давления и осевого сжатия*, Волжск. матем. сб., **4**, 1966.
9. Л. Э. Брюккер, *О пределах применимости приближенной теории трехслойных пластин несимметричного строения*, Труды VII Всесоюзной конф. по теории оболочек и пластин, „Наука”, Москва 1970.
10. А. С. Вольмир, *Устойчивость деформируемых систем*, „Наука”, Москва 1967.
11. L. E. ELSGOLC, *Rachunek wariacyjny*, PWN, Warszawa 1960.
12. Л. М. Куршин, *Большие прогибы трехслойной цилиндрической оболочки*, В сб. „Вопросы расчета элементов авиац. констр.”, Расчет трехслойных панелей и оболочек, сб. ст. 1, Оборонгиз, Москва 1959.
13. В. В. Болотин, Г. А. Бойченко, *Исследование прощелкивания тонких упругих оболочек под действием динамических нагрузок*, В сб. „Расчеты на прочность, Вып. 5”, Машгиз, Москва 1960.
14. H. HERTEL, *Leichtbau*, Springer-Verlag, Berlin 1960.

Резюме

НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА УПРУГОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ТРЕХСЛОЙНОЙ ОТКРЫТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

В работе решается нелинейная задача выпучивания трехслойной открытой цилиндрической оболочки под влиянием сжимающих сил, приложенных к свободно опертым краям оболочки. Уравнения равновесия и комплекс краевых условий выведены, с учетом гипотезы «ломаной линии», из условия минимума потенциальной энергии системы. Решение этих уравнений осуществляется на основе метода Бубнова-Галеркина. В общем виде, определяются верхний и нижний пределы критической нагрузки. В работе даются, также, результаты численных расчетов, проведенных для оболочек с легким наполнителем, сжимаемых по направлению образующих. Дан анализ влияния некоторых геометрических и физических параметров оболочки, на процесс потери устойчивости, а также на значения критических нагрузок.

SUMMARY

NONLINEAR PROBLEM OF ELASTIC STABILITY OF A SANDWICH OPEN CYLINDRICAL SHELL

In this paper is solved the nonlinear problem of an elastic buckling of a sandwich open cylindrical shell under the influence of compressing forces applied to simply supported edges of a shell.

The equations of the equilibrium and boundary conditions are obtained, on the basis of the hypothesis of a «broken line», from the condition of minimum potential energy of a set.

Solution of these equations is based on the Bubnov—Galerkin method.

Upper and lower values of the critical load are obtained in a general manner.

The paper also contains the results of numerical examples made for shells with a light filling compressed along the generating lines.

Analysis is made of the influence of certain geometrical and physical parameters of the shell on the stability loss process and on the critical loading values.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 2 marca 1971 r.