

STATYKA PRZESTRZENNEJ KONSTRUKCJI PRĘTOWEJ PŁYTY STRUKTURALNEJ

RYSZARD PEŁA (ŁÓDŹ)

W przedstawionej pracy omówiono zagadnienia związane z wprowadzeniem modelu ciągłego do obliczeń statycznych «gęstych» prętowych przekryć nazwanych płytami strukturalnymi. Pod tym pojęciem rozumiemy pewnego rodzaju przestrzenną kratownicę, której wszystkie węzły (połączone układem prętów) położone są na dwóch niezbyt oddalonych od siebie płaszczyznach (rys. 1). Struktura geometryczna takiego przekrycia będzie podobna do tzw. «kratownic powłokowych» omówionych w pracy [1] z tym, że węzły położone będą na płaszczyźnie a nie na dowolnej powierzchni.

Zastosowanie tradycyjnych metod obliczeniowych do rozwiązywania przestrzennych ustrojów prętowych (równowaga węzłów dla kratownic izostatycznych, metody sił lub przemieszczeń dla kratownic hiperstatycznych), charakteryzujących się z reguły bardzo dużą liczbą prętów i węzłów, prowadzi do rozwiązywania układu równań algebraicznych o bardzo dużej liczbie niewiadomych. W związku z tym rezygnuje się często z opracowania metody obliczeń, a przeprowadza się jedynie badania doświadczalne, jak to było z dobrze znaną i szeroko stosowaną na terenie USA konstrukcją typu «Unistrut» [2]. Podobnym konstrukcjom poświęcone były między innymi prace [3, 4, 5 i 10].

Do opisu stanu naprężenia i przemieszczenia płyty strukturalnej zastosowano model dwuwymiarowego ośrodka włóknistego, którego stan po odkształceniu da się określić tylko polem wektora przemieszczenia.

Praca składa się z 4 części. W pierwszej części przedstawiono podstawy teoretyczne, omówiono strukturę geometryczną konstrukcji oraz opierając się na pracach [1, 6 i 7] przytoczono podstawowy układ równań tzw. płyt siatkowych. W tej części pracy omówiono również warunki brzegowe, budowę tensora sztywności sprężystej, sposób obliczania sił w prętach konstrukcji. W drugiej części pracy przedstawiono uproszczenia układu równań, wynikające z przyjęcia tzw. jednorodnego ośrodka włóknistego. W następnej części pracy omówiono szczególny przypadek przekrycia charakteryzującego się siatką złożoną z trójkątów równobocznych i nazwanego płytą strukturalną «izotropową» ze względu na analogię przedstawionych równań do równań teorii płyt izotropowych. Przedstawione układy równań zastosowano do rozwiązania (określenia wysiłków w prętach) płyty kratowej izotropowej.

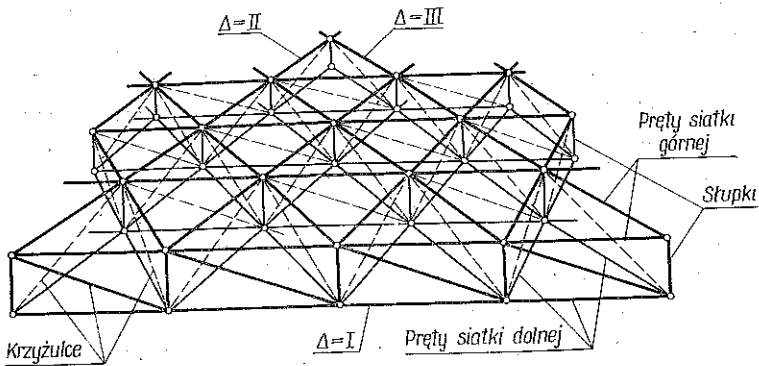
W pracy zastosowano notację tensorową. Wskaźniki kowariantne i kontrawariantne, oznaczone małymi literami alfabetu greckiego, przebiegają ciąg 1, 2. Do

wskaźników tych zastosowano konwencję sumacyjną. Natomiast wskaźnik $\Delta = I, II, III$ oznacza przynależności danej wielkości do kongruencji włókien Δ i nie podlega konwencji sumacyjnej.

1. PODSTAWY TEORETYCZNE

1.1. Struktura geometryczna

Z podanej na wstępie definicji płyty strukturalnej wynika, że jest ona przypadkiem szczególnym kratownicy przestrzennej, której węzły są położone na dwóch płaszczyznach $\pi^{(+)}$ i $\pi^{(-)}$. Odległości sąsiednich węzłów na każdej z płaszczyzn $\pi^{(+)}$ i $\pi^{(-)}$ są niewielkie wobec wymiarów liniowych płyty. Założenie to jest warunkiem



Rys. 1. Budowa geometryczna płyty strukturalnej

koniecznym stosowania modelu ciągłego płyty strukturalnej. Z drugiej strony również odległość pomiędzy płaszczyznami $\pi^{(+)}$ i $\pi^{(-)}$ powinna być niewielka wobec wymiarów liniowych płyty. To założenie jest związane z faktem, że w dalszym ciągu będziemy korzystać tylko z teorii «pierwszego przybliżenia», tj. pomijając będziemy wpływ zmian odległości płaszczyzn $\pi^{(+)}$ i $\pi^{(-)}$ na stan naprężenia (podobnie jak w teorii płyt, por. [8]). Pręty płyty strukturalnej można podzielić na 3 grupy. Do pierwszej z nich należą pręty łączące węzły na płaszczyźnie $\pi^{(+)}$ (pręty siatki «górnej»), do drugiej — pręty łączące węzły na płaszczyźnie $\pi^{(-)}$ (pręty siatki «dolnej»), a do trzeciej — pręty łączące węzły obu płaszczyzn (słupki i krzyżulce). Pręty w płaszczyźnie $\pi^{(+)}$ i $\pi^{(-)}$ stanowią na każdej z nich siatkę utworzoną (w przypadku ogólniejszym) z trzech rodzin krzywych Δ ($\Delta = I, II, III$). Płyta strukturalna powstaje więc przez połączenie słupkami i krzyżulcami dwóch niezbyt odległych i przesuniętych względem siebie gęstych siatek o oczkach trójkątnych. W tak skonstruowanym układzie można wyróżnić pewnego rodzaju przestrzenne żeberka kratowe, odpowiadające przyjętym kierunkom krzywych $\Delta = I, II, III$. Żeberka te składają się z odcinków prętów siatki górnej i dolnej oraz krzyżulców łączących węzły.

1.2. Podstawowy układ równań

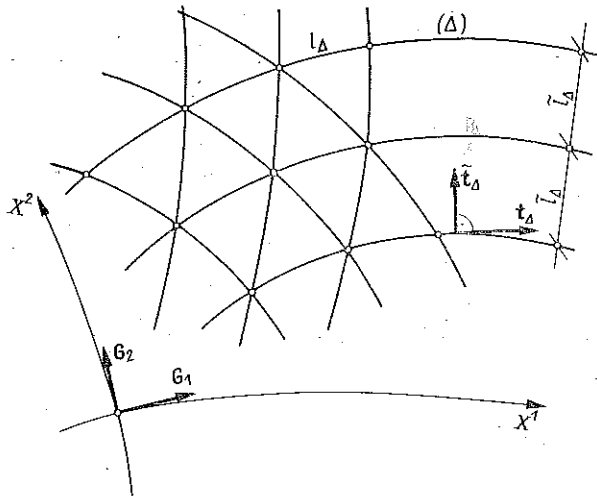
Jako model ciągły płyty strukturalnej przyjęto dwuwymiarowy «ośrodek włóknisty» przedstawiony w pracy [7], będący modelem «wysokiego rusztu», tj. rusztu, w którym wysokość belek (tu żeberek kratowych) jest wielkością rzędu odległości sąsiednich węzłów i przewyższa wielokrotnie szerokość przekroju belek. W celu otrzymania z równań ogólnych teorii płaskiego ośrodka włóknistego równań modelu ciągłego płyty strukturalnej przyjmiemy założenia jak w [7]:

$$(1.1) \quad w_\alpha \equiv v_3 \equiv 0, \quad w|_\alpha = \varepsilon^\beta_{,\alpha} v_\beta.$$

Przez $w = w(X^1, X^2)$, $v = v(X^1, X^2)$ oznaczono pola wektorowe przesunięć i obrotów węzłów siatki,

$$w = w_i G^i = w_\alpha G^\alpha + w G^3, \quad v = v_i G^i = v_\alpha G^\alpha + v_3 G^3.$$

Ponadto, podobnie jak w pracach [1] (por. p. 4) i [7] ograniczymy się do przypadku $D_{III} \equiv G_3 \equiv G^3$ zakładając, że jedna z głównych środkowych osi bezwładności dowolnego przekroju pręta konstrukcji (tu żeberka kratowego) jest normalna do płaszczyzny OX^1X^2 . Przez G_α oznaczono bazę wektorową układu $\{X^\alpha\}$ współrzędnych krzywoliniowych ($\alpha=1, 2$) parametryzującego płaszczyznę środkową płyty strukturalnej. Przyjęty lokalny układ odniesienia o ortonormalnej bazie wektorowej D_α przedstawiono na rys. 2.



Rys. 2. Lokalny (aholonomiczny) układ odniesienia o ortonormalnej bazie wektorowej D_α ($D_I = t_\Delta$, $D_{II} = \tilde{t}$, $D_{III} = G_3$); t_Δ , \tilde{t}_Δ — wektory jednostkowe; l_Δ — długość odcinka pręta Δ , \tilde{l}_Δ — rozstaw prętów rodziny Δ ($\Delta = I, II, III$)

Warunki równowagi elementu ośrodka włóknistego, będącego modelem ciągłym płyty strukturalnej, otrzymamy z wyprowadzonych w [7] równań ruchu w postaci

$$(1.2) \quad \begin{aligned} p^\alpha|_\alpha + f &= 0, \\ m^{\alpha\beta}|_\alpha - \varepsilon_\alpha^\beta p^\alpha + h^\beta &= 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2. \end{aligned}$$

Równanie (1.2)₁ jest równaniem równowagi sił, a dwa równania (1.2)₂ są równaniami równowagi momentów.

Stan odkształcenia odpowiadający stanowi przemieszczenia można opisać wielkością o składowych

$$(1.3) \quad \kappa_{\alpha\beta} = v_{\beta}|_{\alpha},$$

gdzie funkcje $v_1(X^\alpha)$ i $v_2(X^\alpha)$ nazwano obrotami «elementów» (węzłów) siatki.

Ponieważ będziemy się zajmować wyłącznie tzw. obrotami skrupowanymi, tj. wywołanymi tylko ugięciem dźwigara, przeto związki geometryczne przyjmują postać

$$(1.4) \quad \kappa_{\alpha\beta} = (\varepsilon_{\beta}^{\lambda} w|_{\lambda})|_{\alpha} = \varepsilon_{\beta}^{\lambda} w|_{\lambda\alpha},$$

gdź

$$v_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha}^{\lambda} w|_{\lambda}.$$

Związki między składowymi stanu napięcia i odkształcenia mają postać

$$(1.5) \quad m^{\alpha\beta} = C^{\alpha\beta\mu\nu} \kappa_{\mu\nu},$$

gdzie $C^{\alpha\beta\mu\nu}$ oznaczają składowe tensora sztywności sprężystej.

Jak widać, nie dysponujemy związkami fizycznymi dla składowych p^{α} . Poniżej będziemy je wyznaczać z równań równowagi (1.2)₂. Wszystkie równania przedstawione wyżej zostały wyrażone w krzywoliniowym układzie współrzędnych. W wielu zagadnieniach dogodniej jest stosować prostokątny, kartezjański układ współrzędnych. W tym celu wystarczy zastąpić pochodne kowariantne $()|_{\alpha}$ pochodnymi cząstkowymi $()_{,\alpha}$. Dwuwektor Ricci'ego $\varepsilon_{\alpha\beta}$ jest wtedy symbolem permutacyjnym ($\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = 1$).

Podane wyżej równania opisują dźwigar powierzchniowy, tzw. «płytę siatkową» omówioną szczegółowo w monografii Cz. WOŹNIAKA [11] z tym, że ze względu na przyjętą strukturę geometryczną płyty strukturalnej (p. 1.1) i brak tzw. «niezależnych obrotów» we wzorach podanych w [11] należy przyjąć $\gamma_{\alpha} = 0$ oraz pominąć sztywność skrętną żeberek kratowych ($S^{(A)} = 0$) jako bardzo niewielką w porównaniu do sztywności giętej.

Postać tensora C ustalimy na drodze rozważań identycznych do rozważań w pracy [1] (por. p. 4), wykorzystując znany wzór na gęstość momentu gnącego przy założonych kątach obrotu osi dwóch sąsiednich węzłów belki. Otrzymamy następujący wzór na gęstość momentu zginającego:

$$(1.6) \quad M_{\Delta} = S_{\Delta} t_{\Delta}^{\alpha} \tilde{t}_{\Delta}^{\beta} \kappa_{\alpha\beta} = S_{\Delta} \kappa_{\Delta}.$$

Symbolem κ_{Δ} oznaczono jednostkowe wygięcie osi żeberka kratowego Δ ,

$$(1.7) \quad \kappa_{\Delta} = t_{\Delta}^{\alpha} \tilde{t}_{\Delta}^{\beta} \kappa_{\alpha\beta}.$$

Natomiast iloczyn $\kappa_{\Delta} l_{\Delta}$ jest różnicą kątów obrotu względem osi prostopadłej do osi żeberka Δ dwóch węzłów ograniczających odcinek żeberka Δ [11].

Tensor charakteryzujący «globalny» stan napięcia w ośrodku włóknistym przyjmie postać

$$(1.8) \quad m^{\alpha\beta} = \sum_A t_A^\alpha \tilde{t}_A^\beta M_A = \sum_A S_A t_A^\alpha \tilde{t}_A^\beta t_A^\mu \tilde{t}_A^\nu \kappa_{\mu\nu}$$

lub

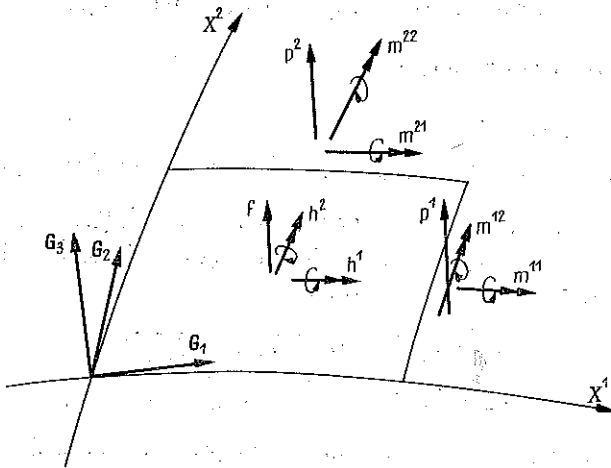
$$(1.9) \quad m^{\alpha\beta} = C^{\alpha\beta\mu\nu} \kappa_{\mu\nu},$$

gdzie

$$C^{\alpha\beta\mu\nu} = \sum_A t_A^\alpha \tilde{t}_A^\beta t_A^\mu \tilde{t}_A^\nu S_A$$

oraz $S_A = (EJ)_A / \tilde{l}_A$ oznacza gęstość sztywności giętej pręta. Jak łatwo zauważyć, tensor C ma własności symetrii:

$$C^{\alpha\beta\mu\nu} = C^{\mu\nu\alpha\beta}.$$



Rys. 3. Układ składowych $m^{\alpha\beta}$ tensora naprężenia momentowego oraz składowych p^α tensora naprężenia

Przejdźmy obecnie do wyprowadzenia równania ogólnego «w przemieszczeniach» dla omawianego zagadnienia. «Nasuńmy» na równanie równowagi (1.2)₂ wyrażenie $\varepsilon_\beta^\gamma ()|_\nu$:

$$(1.10) \quad \varepsilon_\beta^\gamma m^{\alpha\beta}|_{\alpha\nu} - \varepsilon_\alpha^\beta \varepsilon_\beta^\gamma p^\alpha|_\nu + \varepsilon_\beta^\nu h^\beta|_\nu = 0.$$

Jeśli w tym związku wykorzystamy równanie równowagi (1.2)₁ oraz wstawimy związki fizyczne (1.5), to otrzymamy

$$(1.11) \quad \varepsilon_\beta^\pi (C^{\alpha\beta\mu\nu} \kappa_{\mu\nu})|_{\alpha\pi} - f + \varepsilon_\beta^\pi h^\beta|_\pi = 0.$$

Wyrażając składowe tensora odkształcenia $\kappa_{\mu\nu}$ przez przemieszczenie w , tzn. po podstawieniu prawej strony (1.4) do (1.11), otrzymujemy następujące przemieszczeniowe równanie ogólne dla zagadnienia płytowego:

$$(1.12) \quad (C^{\alpha\beta\mu\nu} w|_{\mu\nu})|_{\alpha\beta} - f + \varepsilon_\gamma^\beta h^\gamma|_\beta = 0.$$

Tensor \mathring{C} jest tu określony za pomocą wzoru

$$(1.13) \quad \varepsilon_{\gamma}^{\beta} \varepsilon_{\delta}^{\nu} C^{\alpha\gamma\mu\delta} = \mathring{C}^{\alpha\beta\mu\nu}.$$

Zagadnienie brzegowe dla równania (1.12) przedstawia się tak samo jak w klasycznym zagadnieniu płytowym. Ponieważ równanie (1.12) jest typu eliptycznego, więc podanie dwu wielkości na brzegu prowadzi do jednoznacznego rozwiązania. Na brzegu doskonale utwierdzonym o normalnej zewnętrznej określonej wektorem $\mathbf{n}(n^{\alpha})$ otrzymujemy

$$(1.14) \quad w_{(n^{\alpha})} = 0, \quad n^{\alpha} w|_{\alpha} = 0.$$

Natomiast na brzegu swobodnie podpartym mamy

$$(1.15) \quad \begin{aligned} w_{(n^{\alpha})} &= 0, \\ m^{\alpha\beta} n_{\alpha} &= n_{\alpha} (C^{\alpha\beta\mu\nu} \varepsilon_{\nu}^{\rho} w|_{\rho\mu}) = 0 \quad \text{dla } \alpha \neq \beta. \end{aligned}$$

Wreszcie dla brzegu swobodnego

$$(1.16) \quad \begin{aligned} n_{\alpha} C^{\alpha\beta\mu\nu} \varepsilon_{\nu}^{\rho} w|_{\rho\mu} &= 0, \\ n_{\alpha} p^{\alpha} &= n_{\alpha} (\varepsilon_{\beta}^{\alpha} m^{\gamma\beta}|_{\gamma} + \varepsilon_{\beta}^{\alpha} h^{\beta}) = n_{\alpha} \varepsilon_{\beta}^{\alpha} [(C^{\gamma\beta\mu\nu} \varepsilon_{\nu}^{\rho} w|_{\rho\mu})|_{\gamma} + h^{\beta}] = 0. \end{aligned}$$

Po rozwiązaniu zagadnienia brzegowego dla równania (1.12) pozostają do określenia «wysiłki» w poszczególnych rodzinach prętów ośrodka dyskretnego, które w naszym przypadku będą miały postać

$$(1.17) \quad \begin{aligned} \mathbf{M}_A &= \mathfrak{M}_A \cdot \tilde{\mathbf{t}}_A = M_A \tilde{l}_A \tilde{\mathbf{t}}_A = M_A \tilde{l}_A \tilde{t}_A^{\alpha} \mathbf{G}_{\alpha}, \\ \mathbf{P}_A &= \mathfrak{P}_A \cdot \mathbf{G}_3 = P_A \tilde{l}_A \mathbf{G}_3, \end{aligned}$$

gdzie M_A oznacza gęstość momentu zginającego oraz P_A gęstość siły tnącej. Wartość M_A otrzymujemy bezpośrednio z (1.6):

$$M_A = S_A t_A^{\alpha} \tilde{t}_A^{\beta} \kappa_{\alpha\beta}.$$

Dodatkowo wykorzystując związki geometryczne (1.4) oraz zależność

$$\varepsilon_{\beta}^{\lambda} \tilde{t}^{\beta} = -t^{\lambda}$$

otrzymamy

$$(1.18) \quad M_A = -S_A t_A^{\alpha} t_A^{\lambda} w|_{\alpha\lambda}.$$

Pozostaje do określenia wektor \mathbf{P}_A . W tym celu musimy znaleźć gęstość sił tnących P_A . Z definicji [6] mamy

$$p^{\alpha} = \sum_A t_A^{\alpha} P_A, \quad m^{\alpha\beta} = \sum_A t_A^{\alpha} \tilde{t}_A^{\beta} M_A.$$

Z równania równowagi (1.2)₂ przy założeniu $h^{\beta} \equiv 0$ otrzymujemy związek

$$\varepsilon_{\alpha}^{\beta} p^{\alpha} = m^{\alpha\beta}|_{\alpha},$$

który po uwzględnieniu podanych wyżej zależności przyjmie postać

$$\sum_{\Delta} \varepsilon_{\alpha}^{\beta} t_{\Delta}^{\alpha} P_{\Delta} = \left(\sum_{\Delta} t_{\Delta}^{\alpha} \tilde{t}_{\Delta}^{\beta} M_{\Delta} \right) |_{\alpha}.$$

Równość ta zachodzi, gdy spełnimy warunek $(\varepsilon_{\alpha}^{\beta} t^{\alpha} = \tilde{t}^{\beta})$

$$\tilde{t}_{\Delta}^{\beta} P_{\Delta} = (t_{\Delta}^{\alpha} \tilde{t}_{\Delta}^{\beta} M_{\Delta}) |_{\alpha}.$$

«Nasuńmy» na ten warunek wyrażenie $\varepsilon_{\gamma}^{\beta} G_{\gamma\nu} t_{\Delta}^{\nu}$:

$$\varepsilon_{\gamma}^{\beta} \varepsilon_{\gamma\nu} \tilde{t}_{\Delta}^{\nu} t_{\Delta}^{\nu} P_{\Delta} = \varepsilon_{\gamma}^{\beta} G_{\gamma\nu} t_{\Delta}^{\nu} (t_{\Delta}^{\alpha} \tilde{t}_{\Delta}^{\beta} M_{\Delta}) |_{\alpha},$$

skąd, wykorzystując związek $\varepsilon_{\gamma}^{\beta} G_{\gamma\nu} \tilde{t}_{\Delta}^{\nu} t_{\Delta}^{\nu} = 1$ oraz (1.18), otrzymujemy

$$(1.19) \quad P_{\Delta} = \varepsilon_{\alpha\gamma} t_{\Delta}^{\gamma} (S_{\Delta} \tilde{t}_{\Delta}^{\alpha} t_{\Delta}^{\beta} t_{\Delta}^{\mu} t_{\Delta}^{\nu} w |_{\beta\mu}) |_{\nu}.$$

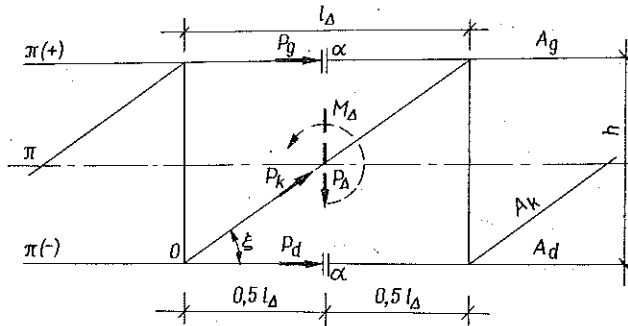
Oznaczając

$$S_{\Delta} \tilde{t}_{\Delta}^{\alpha} t_{\Delta}^{\beta} t_{\Delta}^{\mu} t_{\Delta}^{\nu} \stackrel{\text{df}}{=} S_{\Delta}^{\alpha\beta\mu\nu}$$

możemy (1.19) zapisać w postaci

$$(1.20) \quad P_{\Delta} = \varepsilon_{\alpha\gamma} t_{\Delta}^{\gamma} (S_{\Delta}^{\alpha\beta\mu\nu} w |_{\beta\mu}) |_{\nu}.$$

Zgodnie z założeniami wprowadzonymi w p. 1.1. (dotyczącymi modelu kratownicy) gęstości sił P_{Δ} i momentów M_{Δ} występujących w przekrojach poprzecznych żeberek kratowych rodzin $\Delta = \text{I, II, III}$ należy obliczać dla współrzędnych przekroju odcinka pręta równo oddalonego od jego końców. Ponieważ założenie dotyczyło siatki prętowej, leżącej na płaszczyźnie środkowej, przeto należy rozumieć, że wielkości statyczne zostały obliczone w przekroju $\alpha-\alpha$ pokazanym na rys. 4.



Rys. 4. Gęstość momentu zginającego M_{Δ} i siły poprzecznej P_{Δ} w przekroju $\alpha-\alpha$ żeberka kratowego Δ o kierunkach działania przyjętych jak dla wysiłków równoważących, działających na lewą część przekroju

Rozpatrzmy równowagę sił w przekroju $\alpha-\alpha$. Działanie momentu zginającego M_{Δ} (gęstość momentu) zastąpimy parą sił o ramieniu h równym odległości płaszczyzny $\pi^{(+)}$ od $\pi^{(-)}$ (grubość konstrukcji płyty krajowej). Przyjmując oznaczenia

jak na rys. 4 otrzymamy z warunków równowagi sił w przekroju $\alpha-\alpha$ następujące wzory na gęstości sił w prętach konstrukcji:

$$(1.21) \quad \begin{aligned} P_{\Delta g} &= \frac{1}{h} M_{\Delta} - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \xi P_{\Delta}, \\ P_{\Delta d} &= -\frac{1}{h} M_{\Delta} - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \xi P_{\Delta}, \\ P_{\Delta k} &= \frac{1}{\sin \xi} P_{\Delta}. \end{aligned}$$

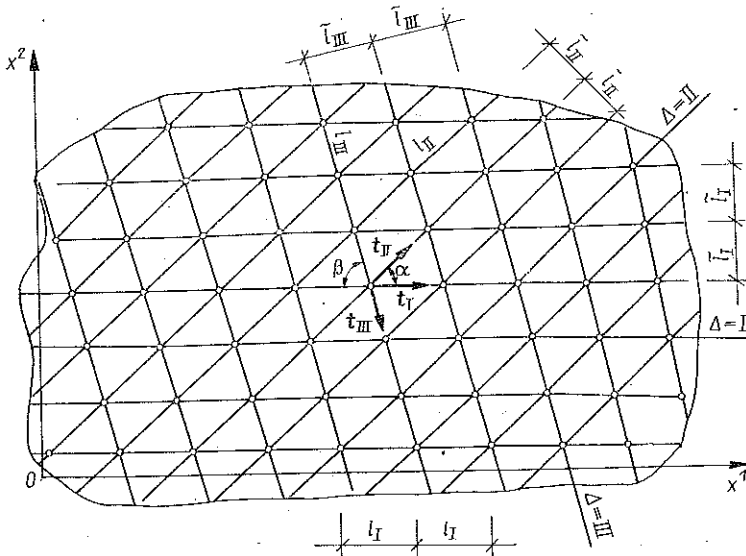
Wartości sił w prętach otrzymamy mnożąc wyrażenie przez \bar{l}_{Δ} , tj. rozstaw żeberk kratowych danej rodziny Δ .

Ułożenie warunków równowagi w węźle O pozwoli na obliczenie wartości siły P_s w słupku-pręcie, wspólnym dla trzech kierunków żeberk kratowych Δ .

2. PŁYTY STRUKTURALNE JEDNORODNE

Równanie (1.12) ulega istotnym uproszczeniom, gdy wprowadzony model ciągły, ośrodek włóknisty, jest jednorodny, tzn. kiedy we współrzędnych kartezjańskich $\{x^1, x^2\}$ charakteryzuje się włóknami prostoliniowymi, równoległymi w każdej rodzinie Δ oraz stałymi sztywnościami na całej długości włókien (rys. 5). Równanie ogólne dla tego przypadku przyjmuje postać

$$(2.1) \quad \overset{\circ}{C}^{\alpha\beta\mu\nu} w_{,\alpha\beta\mu\nu} = f - \varepsilon_{\beta}^{\nu} h^{\beta}_{,\nu}$$



Rys. 5. Struktura geometryczna płyty jednorodnej (t_{Δ} — wektory jednostkowe, styczne do przyjętych kierunków żeberk kratowych Δ)

lub po rozpisaniu

$$(2.2) \quad C^{1111} w_{,1111} + 2(C^{1112} + C^{2111}) w_{,1112} + (C^{1212} + 4 C^{2211} + C^{2121}) w_{,1122} + 2(C^{1222} + C^{2221}) w_{,1222} + C^{2222} w_{,2222} = f + h_{,1}^2 - h_{,2}^1.$$

Powyższe równanie ma budowę identyczną z budową równania jednorodnej płyty anizotropowej [9], wystarczy tylko dokonać zamiany oznaczeń współczynników. To formalne podobieństwo pozwala oczywiście na przenoszenie rozwiązań ośrodka anizotropowego do rozpatrywanego przypadku ośrodka włóknistego, a tym samym na interpretację tych rozwiązań jako rozwiązań dla omawianych prętowych przekrój strukturalnych.

W ośrodku jednorodnym upraszcza się również związek określający siły tnące w siatce prętowej:

$$P_A = \varepsilon_{\nu\beta} t_A^\nu t_A^\alpha \tilde{t}_A^\beta M_{A,\alpha}.$$

Uwzględniając, że $\varepsilon_{\nu\beta} t_A^\nu \tilde{t}_A^\beta = 1$ oraz $t_A^\alpha M_{A,\alpha} = \partial_I M_A$ (postać pochodnej kierunkowej), otrzymamy znane zależności między siłą tnącą i momentem zginającym w belce:

$$(2.3) \quad P_A = t_A^\alpha M_{A,\alpha} = \partial_I M_A.$$

Tablica 1

| A | składowe t^α | | składowe \tilde{t}^α | | Uwagi |
|-----|---------------------|-----------------------|-----------------------------|---------------|--|
| | t^2 | t^1 | \tilde{t}^1 | \tilde{t}^2 | |
| I | 1 | 0 | 0 | 1 | $S_I \quad \tilde{t}^\alpha = \varepsilon_{\beta\alpha} t^\beta$ |
| II | $\cos \alpha$ | $\sin \alpha$ | $-\sin \alpha$ | $\cos \alpha$ | $S_{II} \quad \tilde{t}^1 = -t^2$ |
| III | $\cos \beta$ | $-\sin \beta$ | $\sin \beta$ | $\cos \beta$ | $S_{III} \quad \tilde{t}^2 = t^1$ |
| I | 1 | 0 | 0 | 1 | dla $\alpha = \beta = 60^\circ$ |
| II | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | |
| III | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | |

Dla struktury geometrycznej siatki prętowej przedstawionej na rys. 5 (dane zawiera tablica 1) składowe tensora sztywności sprężystej $C^{\alpha\beta\mu\nu}$ będzie można określić ze związków:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} C^{1111} &= \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha S_{II} + \sin^2 \beta \cos^2 \beta S_{III}, \\ C^{1211} &= C^{1112} = -\sin \alpha \cos^3 \alpha S_{II} + \sin \beta \cos^3 \beta S_{III}, \\ C^{2111} &= C^{1121} = \sin^3 \alpha \cos \alpha S_{II} - \sin^3 \beta \cos \beta S_{III}, \\ C^{1212} &= S_I + \cos^4 \alpha S_{II} + \cos^4 \beta S_{III}, \\ C^{2121} &= \sin^4 \alpha S_{II} + \sin^4 \beta S_{III}, \end{aligned}$$

$$(2.4) \quad \begin{aligned} C^{1221} &= C^{1122} = C^{2112} = C^{2211} = -\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha S_{II} - \sin^2 \beta \cos^2 \beta S_{III}, \\ C^{2212} &= C^{1222} = \sin \alpha \cos^3 \alpha S_{II} - \sin \beta \cos^3 \beta S_{III}, \\ C^{2122} &= C^{2221} = -\sin^3 \alpha \cos \alpha S_{II} + \sin^3 \beta \cos \beta S_{III}, \\ C^{2222} &= \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha S_{II} + \sin^2 \beta \cos^2 \beta S_{III}. \end{aligned}$$

Składowe $C^{\alpha\beta\mu\nu}$ występujące w równaniu ogólnym określamy z zależności

$$C^{\alpha\beta\mu\nu} = \varepsilon_\gamma^{\cdot\beta} \varepsilon_\delta^{\cdot\nu} C^{\alpha\gamma\mu\delta},$$

w której

$$\varepsilon_1^{\cdot 2} = -\varepsilon_2^{\cdot 1} = 1,$$

$$\varepsilon_1^{\cdot 2} = -\varepsilon_2^{\cdot 1} = 1;$$

np.

$$(2.5) \quad \begin{aligned} C^{1111} &= \varepsilon_\gamma^{\cdot 1} \varepsilon_\delta^{\cdot 1} C^{1\gamma 1\delta} = C^{1212}, \\ C^{1112} &= \varepsilon_\gamma^{\cdot 1} \varepsilon_\delta^{\cdot 2} C^{1\gamma 1\delta} = -C^{1211}, \\ C^{1212} &= \varepsilon_\gamma^{\cdot 2} \varepsilon_\delta^{\cdot 2} C^{1\gamma 1\delta} = C^{1111}, \\ &\dots\dots\dots \\ C^{1222} &= \varepsilon_\gamma^{\cdot 2} \varepsilon_\delta^{\cdot 2} C^{1\gamma 2\delta} = C^{1121}. \end{aligned}$$

3. PŁYTA STRUKTURALNA IZOTROPOWA

Przy założeniu, że strukturę geometryczną płyty charakteryzuje siatka przedstawiona na rys. 5, utworzona z trójkątów równobocznych ($\alpha = \beta = 60^\circ$) oraz że własności sprężyste żeberek kratowych Δ , tworzących konstrukcję, są takie same dla każdego Δ ($S_I = S_{II} = S_{III} = S$), składowe tensora sztywności sprężystej będą miały wartość

$$(3.1) \quad \begin{aligned} C^{1111} &= -C^{2211} = -C^{1221} = -C^{1122} = -C^{2112} = C^{2222} = \frac{3}{8} S, \\ C^{1212} &= C^{2121} = \frac{9}{8} S, \\ C^{1212} &= C^{2112} = C^{1122} = C^{1221} = C^{2211} = C^{2121} = \frac{3}{8} S, \\ C^{1111} &= C^{2222} = \frac{9}{8} S; \end{aligned}$$

pozostałe $C^{\alpha\beta\mu\nu} = 0$ oraz $C^{\alpha\beta\mu\nu} = 0$.

Równanie (1.12) dla tego przypadku przy uwzględnieniu podanych wyżej zależności oraz $h^\beta = 0$ będzie można zapisać w postaci

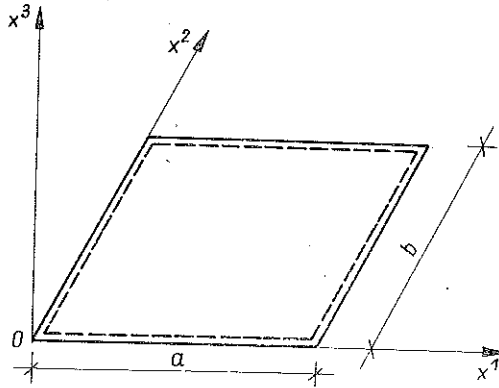
$$(3.2) \quad w_{,1111} + 2w_{,1122} + w_{,2222} = \frac{f}{C^{1212}}.$$

Jest ono analogiczne do równania różniczkowego powierzchni odkształconej płyty z materiału izotropowego. Składowa C^{1212} jest w tym równaniu pewnego rodzaju sztywnością giętą płyty strukturalnej, oznaczoną dla płyty pełnej przez D :

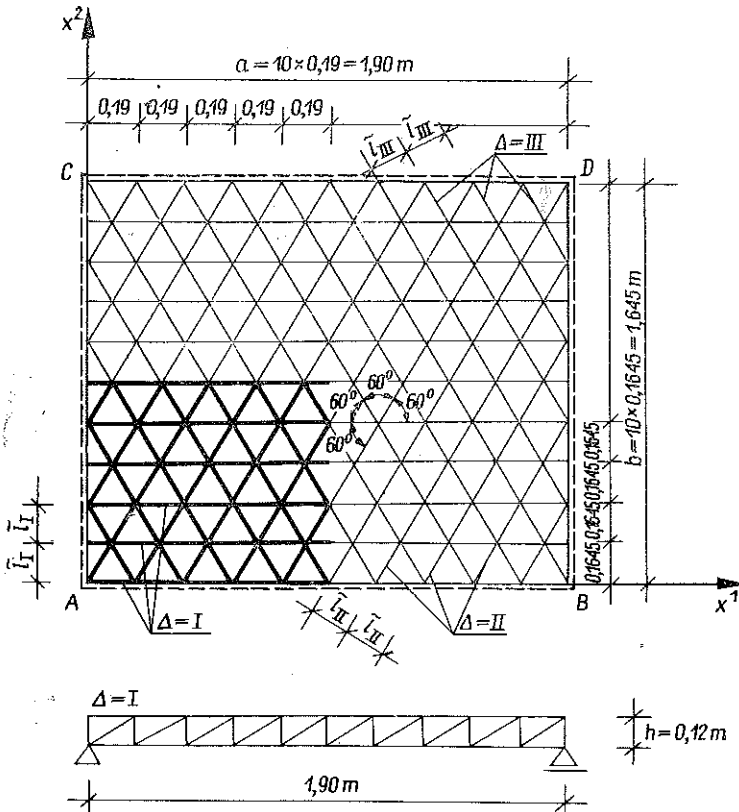
$$C^{1212} = \frac{9}{8} S = \frac{9}{8} \frac{(EJ)_\Delta}{\bar{l}_\Delta}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

4. PRZYKŁAD OBLICZENIA M_d I P_d W ŻEBERKACH KRATOWYCH PŁYTY STRUKTURALNEJ

Rozpatrzmy przypadek płyty strukturalnej, izotropowej o wymiarach $a \times b$ [m], poddanej obciążeniu równomiernie rozłożonemu o składowej $f = -q$ [kG/m²] i swobodnie podpartej na czterech krawędziach (rys. 6). Struktura geometryczna płyty została przedstawiona na rys. 7.



Rys. 6. Płyta o wymiarach $a \times b$ [m] swobodnie podparta na czterech krawędziach



Rys. 7. Budowa geometryczna płyty strukturalnej, izotropowej (do przykładu obliczeń)

Rozwiązanie równania (3.2) otrzymujemy w postaci (por. [8])

$$(4.1) \quad w = -\frac{16q}{abC^{1212}} \sum_{n,m}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n x^1 \sin \beta_m x^2}{A_{nm} \alpha_n \beta_m},$$

gdzie

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{a}, \quad \beta_m = \frac{m\pi}{b},$$

$$A_{nm} = (\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2, \quad n, m = 1, 3, 5, \dots$$

Wielkości statyczne, tj. gęstości momentu gnącego M_A i siły poprzecznej P_A w przekrojach żeberek kratowych A , określimy ze wzorów ogólnych na podstawie (1.18) i (2.3):

$$M_A = -S_A t_A^\alpha t_A^\beta w_{,\alpha\beta},$$

$$P_A = t_A^\alpha M_{A,\alpha} = -S_A t_A^\alpha t_A^\mu t_A^\nu w_{,\alpha\mu\nu}.$$

W naszym przypadku dla przyjętej struktury geometrycznej płyty strukturalnej wielkości te będą określone wzorami:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} M_I &= -Sw_{,11}, \\ P_I &= -Sw_{,111}, \\ M_{II} &= -\frac{S}{4} (w_{,11} + 2\sqrt{3} w_{,12} + 3w_{,22}), \\ P_{II} &= -\frac{S}{8} (w_{,111} + 3\sqrt{3} w_{,112} + 9w_{,122} + 3\sqrt{3} w_{,222}), \\ M_{III} &= -\frac{S}{4} (w_{,11} - 2\sqrt{3} w_{,12} + 3w_{,22}), \\ P_{III} &= -\frac{S}{8} (w_{,111} - 3\sqrt{3} w_{,112} + 9w_{,122} - 3\sqrt{3} w_{,222}), \end{aligned}$$

gdzie $S = S_A = \text{const.}$

Przy uwzględnieniu rozwiązania (4.1) podane wyżej wyrażenia przyjmą postać

$$(4.3) \quad \begin{aligned} M_I &= -\frac{16qS}{abC^{1212}} \sum_{n,m}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \sin \alpha_n x^1 \sin \beta_m x^2}{A_{nm} \alpha_n \beta_m}, \\ P_I &= -\frac{16qS}{abC^{1212}} \sum_{n,m}^{\infty} \frac{\alpha_n^3 \cos \alpha_n x^1 \sin \beta_m x^2}{A_{nm} \alpha_n \beta_m}, \\ M_{II} &= -\frac{4qS}{abC^{1212}} \sum_{n,m}^{\infty} \times \\ &\quad \times \frac{(\alpha_n^2 + 3\beta_m^2) \sin \alpha_n x^1 \sin \beta_m x^2 - 2\sqrt{3} \alpha_n \beta_m \cos \alpha_n x^1 \cos \beta_m x^2}{A_{nm} \alpha_n \beta_m}, \end{aligned}$$

(4.2)
[c.d.]

$$\begin{aligned}
 P_{II} &= -\frac{2qS}{abC^{1212}} \times \\
 &\times \sum_{n,m}^{\infty} \frac{3\sqrt{3}\beta_m(\alpha_n^2 + \beta_m^2) \sin \alpha_n x^1 \cos \beta_m x^2 + \alpha_n(\alpha_n^2 + 9\beta_m^2) \cos \alpha_n x^1 \sin \beta_m x^2}{A_{nm} \alpha_n \beta_m}, \\
 M_{III} &= -\frac{4qS}{abC^{1212}} \times \\
 &\times \sum_{n,m}^{\infty} \frac{(\alpha_n^2 + 3\beta_m^2) \sin \alpha_n x^1 \sin \beta_m x^2 + 2\sqrt{3}\alpha_n \beta_m \cos \alpha_n x^1 \cos \beta_m x^2}{A_{nm} \alpha_n \beta_m}, \\
 P_{III} &= -\frac{2qS}{abC^{1212}} \times \\
 &\times \sum_{n,m}^{\infty} \frac{\alpha_n(\alpha_n^2 + 9\beta_m^2) \cos \alpha_n x^1 \sin \beta_m x^2 - 3\sqrt{3}\beta_m(\alpha_n^2 + \beta_m^2) \sin \alpha_n x^1 \cos \beta_m x^2}{A_{nm} \alpha_n \beta_m}.
 \end{aligned}$$

Uwzględniając, że

$$C^{1212} = \frac{9}{8} S,$$

podane wyżej wzory określające przemieszczenia w węzłach płyty oraz gęstość momentu zginającego M_A i siły poprzecznej P_A w żeberku kratowym można zapisać w uproszczonej postaci

$$\begin{aligned}
 (4.4) \quad w &= -\frac{q\omega}{abS}, & M_A &= -\frac{qm_A}{ab}, \\
 P_A &= -\frac{q\eta_A}{ab}, & A &= \text{I, II, III}.
 \end{aligned}$$

Współczynniki ω , m_A i η_A obliczone przez F. PIETRASA w Zakładzie Obliczeń Numerycznych Uniwersytetu Warszawskiego podane zostały dla charakterystycznych punktów płyty w tablicach 2-5. Wysiłki, tj. moment zginający i siłę poprzeczną w dowolnym żeberku kratowym, uzyskamy przez pomnożenie wartości uzyskanych z (4.4) przez rozstaw żeberk danej rodziny A , w naszym przykładzie przez $\tilde{l}_A = 0,1645$ m:

$$(4.5) \quad \mathfrak{M}_A = \tilde{l}_A M_A, \quad \mathfrak{P}_A = \tilde{l}_A P_A.$$

Obliczenie wysiłków w poszczególnych prętach żeberka kratowego A prowadzimy wg wzorów (1.21).

Tablica 2

Wartości współczynników ω do obliczenia przemieszczeń węzłów płyty strukturalnej

| Współrzędne węzła | | ω |
|-------------------|--------|----------|
| x^1 | x^2 | |
| m | m | |
| 0,0000 | 0,8225 | 0,000000 |
| 0,0950 | 0,8225 | 0,018063 |
| 0,2850 | 0,8225 | 0,051536 |
| 0,4750 | 0,8225 | 0,078548 |
| 0,6650 | 0,8225 | 0,097216 |
| 0,8550 | 0,8225 | 0,106696 |
| 0,0000 | 0,6580 | 0,000000 |
| 0,1900 | 0,6580 | 0,033842 |
| 0,3800 | 0,6580 | 0,063010 |
| 0,5700 | 0,6580 | 0,084935 |
| 0,7600 | 0,6580 | 0,098395 |
| 0,9500 | 0,6580 | 0,102928 |
| 0,0000 | 0,4935 | 0,000000 |
| 0,0950 | 0,4935 | 0,014879 |
| 0,2850 | 0,4935 | 0,042369 |
| 0,4750 | 0,4935 | 0,064447 |
| 0,6650 | 0,4935 | 0,079654 |
| 0,8550 | 0,4935 | 0,087362 |
| 0,0000 | 0,3290 | 0,000000 |
| 0,1900 | 0,3290 | 0,021590 |
| 0,3800 | 0,3290 | 0,040018 |
| 0,5700 | 0,3290 | 0,053763 |
| 0,7600 | 0,3290 | 0,062160 |
| 0,9500 | 0,3290 | 0,064985 |
| 0,0000 | 0,1645 | 0,000000 |
| 0,0950 | 0,1645 | 0,005933 |
| 0,2850 | 0,1645 | 0,016781 |
| 0,4750 | 0,1645 | 0,025378 |
| 0,6650 | 0,1645 | 0,031258 |
| 0,8550 | 0,1645 | 0,034227 |

Tablica 3

Wartości współczynników m_1 i η_1 do obliczenia gęstości momentów zginających M_1 i sił poprzecznych P_1 w żeberkach kratowych rodziny $\Delta = I$

| Współrzędne przekroju żeberka | | m_1 | η_1 |
|-------------------------------|--------|--------|----------|
| x^1 | x^2 | | |
| m | m | | |
| 0,0000 | 0,8225 | 0,0000 | 0,9466 |
| 0,1900 | 0,8225 | 0,1399 | 0,5348 |
| 0,3800 | 0,8225 | 0,2131 | 0,2610 |
| 0,5700 | 0,8225 | 0,2471 | 0,1121 |
| 0,7600 | 0,8225 | 0,2606 | 0,0395 |
| 0,9500 | 0,8225 | 0,2640 | 0,0000 |
| 0,0950 | 0,6580 | 0,0776 | 0,7031 |
| 0,2850 | 0,6580 | 0,1756 | 0,3590 |
| 0,4750 | 0,6580 | 0,2232 | 0,1624 |
| 0,6650 | 0,6580 | 0,2436 | 0,0641 |
| 0,8550 | 0,6580 | 0,2507 | 0,0164 |
| 0,0000 | 0,4935 | 0,0000 | 0,8259 |
| 0,1900 | 0,4935 | 0,1188 | 0,4361 |
| 0,3800 | 0,4935 | 0,1768 | 0,2000 |
| 0,5700 | 0,4935 | 0,2024 | 0,0817 |
| 0,7600 | 0,4935 | 0,2121 | 0,0279 |
| 0,9500 | 0,4935 | 0,2145 | 0,0000 |
| 0,0950 | 0,3290 | 0,0548 | 0,4724 |
| 0,2850 | 0,3290 | 0,1159 | 0,2072 |
| 0,4750 | 0,3290 | 0,1422 | 0,0858 |
| 0,6650 | 0,3290 | 0,1527 | 0,0316 |
| 0,8550 | 0,3290 | 0,1561 | 0,0774 |
| 0,0000 | 0,1645 | 0,0000 | 0,4281 |
| 0,1900 | 0,1645 | 0,0517 | 0,1574 |
| 0,3800 | 0,1645 | 0,0711 | 0,0635 |
| 0,5700 | 0,1645 | 0,0790 | 0,0244 |
| 0,7600 | 0,1645 | 0,0819 | 0,0079 |
| 0,9500 | 0,1645 | 0,0825 | 0,0000 |

Tablica 4

Wartości współczynników m_{II} i η_{II} do obliczenia gęstości momentu zginającego M_{II} i siły poprzecznej P_{II} w żeberkach kratowych rodziny $\Delta = II$

| Współrzędne przekroju żeberka | | m_{II} | η_{II} |
|-------------------------------|--------|----------|-------------|
| x^1 | x^2 | | |
| m | m | | |
| 0,0475 | 0,7402 | -0,0117 | 0,8162 |
| 0,2375 | 0,7402 | 0,1080 | 0,7338 |
| 0,4275 | 0,7402 | 0,2049 | 0,5986 |
| 0,6175 | 0,7402 | 0,2766 | 0,4286 |
| 0,8075 | 0,7402 | 0,3225 | 0,2389 |
| 0,1425 | 0,5757 | -0,0388 | 0,7939 |
| 0,3325 | 0,5757 | 0,0764 | 0,7394 |
| 0,5225 | 0,5757 | 0,1749 | 0,6319 |
| 0,7125 | 0,5757 | 0,2527 | 0,4883 |
| 0,9025 | 0,5757 | 0,3077 | 0,3188 |
| 0,0475 | 0,4112 | -0,1861 | 0,7346 |
| 0,2375 | 0,4112 | -0,0699 | 0,7823 |
| 0,4275 | 0,4112 | 0,0414 | 0,7592 |
| 0,6175 | 0,4112 | 0,1401 | 0,6873 |
| 0,8075 | 0,4112 | 0,2220 | 0,5776 |
| 0,1425 | 0,2467 | -0,2128 | 0,6960 |
| 0,3325 | 0,2467 | -0,1073 | 0,7876 |
| 0,5225 | 0,2467 | -0,0038 | 0,8140 |
| 0,7125 | 0,2467 | 0,0912 | 0,7905 |
| 0,9025 | 0,2467 | 0,1749 | 0,7224 |
| 0,0475 | 0,0822 | -0,3211 | 0,3927 |
| 0,2375 | 0,0822 | -0,2493 | 0,6819 |
| 0,4275 | 0,0822 | -0,1634 | 0,8510 |
| 0,6175 | 0,0822 | -0,0743 | 0,9407 |
| 0,8075 | 0,0822 | 0,0134 | 0,9701 |

Tablica 5

Wartości współczynników m_{III} i η_{III} do obliczenia gęstości momentu zginającego M_{III} i siły poprzecznej P_{III} w żeberkach kratowych rodziny $\Delta = III$

| Współrzędne przekroju żeberka | | m_{III} | η_{III} |
|-------------------------------|--------|-----------|--------------|
| x^1 | x^2 | | |
| m | m | | |
| 0,1425 | 0,7402 | 0,1376 | 0,7369 |
| 0,3325 | 0,7402 | 0,2336 | 0,5720 |
| 0,5225 | 0,7402 | 0,2986 | 0,3760 |
| 0,7125 | 0,7402 | 0,3342 | 0,1689 |
| 0,9025 | 0,7402 | 0,3418 | -0,0382 |
| 0,0475 | 0,5757 | 0,1637 | 0,7480 |
| 0,2375 | 0,5757 | 0,2611 | 0,5439 |
| 0,4275 | 0,5757 | 0,3085 | 0,3132 |
| 0,6175 | 0,5757 | 0,3434 | 0,0849 |
| 0,8075 | 0,5757 | 0,3385 | -0,1272 |
| 0,1425 | 0,4112 | 0,2857 | 0,5099 |
| 0,3325 | 0,4112 | 0,3362 | 0,2248 |
| 0,5225 | 0,4112 | 0,3469 | -0,0353 |
| 0,7125 | 0,4112 | 0,3243 | -0,2542 |
| 0,9025 | 0,4112 | 0,2851 | -0,4337 |
| 0,0475 | 0,2467 | 0,3055 | 0,4690 |
| 0,2375 | 0,2467 | 0,3459 | 0,0894 |
| 0,4275 | 0,2467 | 0,3384 | -0,2197 |
| 0,6175 | 0,2467 | 0,3018 | -0,4466 |
| 0,8075 | 0,2467 | 0,2457 | -0,6099 |
| 0,1425 | 0,0822 | 0,3427 | -0,1456 |
| 0,3325 | 0,0822 | 0,3077 | -0,5126 |
| 0,5225 | 0,0822 | 0,2482 | -0,7351 |
| 0,7125 | 0,0822 | 0,1764 | -0,8720 |
| 0,9025 | 0,0822 | 0,0974 | -0,9473 |

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. R. PEŁA, *Podstawy obliczeń kratownic powłokowych*, Arch. Inżyn. Łądown., **15**, 1-2, 1969.
2. G. GEIZENDORFER, L. LEGATSKI, *Unistrut space-frame system*, Univ. of Michigan Press, 1955.
3. W. GUTKOWSKI, *Płyty kratowe z elementów powtarzalnych*, Rozpr. Inżyn., **13**, 1, 1965.
4. Z. MAKOWSKI, *Räumliche Tragwerke aus Stahl*, Verlag Stahleisen M. B. H., Düsseldorf 1963.
5. *Le tube d'acier dans la construction metalique*. 1. Realisation. 2. Recherches, Chambre Syndical des Fabricants de Tubes d'acier. Paris.
6. CZ. WOŹNIAK, *Theory of fibrous media*, Arch. Mech. Stos., **17**, 5-6, 1965.
7. CZ. WOŹNIAK, *Modele ciągle gęstych siatek prętowych (zagadnienie płaskie)*, Arch. Inżyn. Łądown., **11**, 2, 1965.
8. W. NOWACKI, *Mechanika budowli*, **3**; PWN, Warszawa 1966.
9. С. Г. ЛЕХНИЦКИЙ, *Анизотропные пластинки*, Москва 1957.
10. M. DZIURLA, *Analiza statyczna przykrycia materacowego prętowego rusztu przestrzennego*, Materiały XIV Konferencji Naukowej Komitetu Inżynierii PAN, Krynica 1968.
11. CZ. WOŹNIAK, *Siatkowe dźwigary powierzchniowe*, PWN, Warszawa 1970.

Резюме

СТАТИКА ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СТЕРЖНЕВОЙ КОНСТРУКЦИИ — СТРУКТУРОЙ ПЛАСТИН

В работе представлена задача, связанная с применением сплошной модели для статических «густых» стержневых перекрытий, названных структурными пластинками. Под этим названием, следует понимать некоторого рода пространственную ферму, все узлы которой соединены стержневой системой и располагаются на двух, не слишком отдаленных друг от друга, плоскостях. Для описания напряженного состояния и перемещения структурной пластинки, применяется модель двухмерной «волоконистой среды».

SUMMARY

STATICS OF A SPATIAL ROD STRUCTURE — STRUCTURAL PLATE

Here presented are problems connected with the application of a continuous model for statics calculations of "dense" rod covers, called structural plates. This is understood to be a certain kind of spatial grid whose every nodes, connected with a system of rods, are situated on two planes spaced at no excessive distance from each other.

The two-dimensional model of a "fibrous medium" is applied to describe the state of stress and displacement of the structural plate.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA
INSTYTUT INŻYNIERII BUDOWLANEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 stycznia 1971 r.