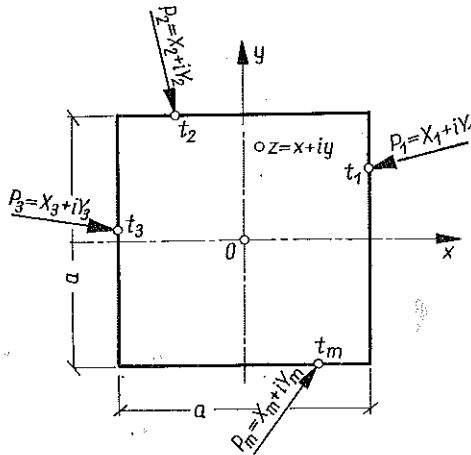


TARCZA KWADRATOWA OBCIĄŻONA NA KONTURZE SIŁAMI SKUPIONYMI

KAZIMIERZ RYKALUK (WROCŁAW)

1. WSTĘP

Rozpatrzmy izotropową i sprężystą liniowo tarczę kwadratową o boku a i grubości jednostkowej, obciążoną zrównoważonym układem m sił skupionych P_k (rys. 1). Siły $P_k = X_k + iY_k$ są przyłożone w punktach $t_k = x_k + iy_k$ konturu tarczy.



Rys. 1

Rozwiązanie przeprowadzimy za pomocą funkcji zmiennej zespolonej, wykorzystując metodę N. I. MUSCHELISZWILIEGO [4], rozwiniętą następnie dla tego typu obciążenia przez L. MARTINIEGO [3].

Po odwzorowaniu konforemnym kwadratu, leżącego na płaszczyźnie zmiennej $z = x + iy$, na koło jednostkowe, leżące na płaszczyźnie zmiennej $\zeta = \xi + i\eta$, za pomocą funkcji odwzorowującej $z = \omega(\zeta)$ zagadnienie sprowadza się do wyznaczenia dwóch funkcji Goursata $\varphi(\zeta)$ i $\psi(\zeta)$, które posiadają następujące postacie [3]:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \varphi(\zeta) &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^m P_k \ln(\rho_k - \zeta) + \sum_{j=1}^n a_j \zeta^j, \\ \psi(\zeta) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^m \bar{P}_k \ln(\rho_k - \zeta) - \frac{\omega(1/\zeta)}{\omega'(\zeta)} \varphi'(\zeta) - \sum_{j=1}^n \bar{a}_j \zeta^{-j}, \end{aligned}$$

gdzie ρ_k jest punktem na brzegu koła jednostkowego $|\zeta|=1$, odpowiadający punktowi t_k na brzegu kwadratu, a a_j są współczynnikami zespolonymi, które należy wyznaczyć w zależności od obciążenia tarczy.

Składowe tensora naprężeń oraz wektora przemieszczeń w biegunowym układzie współrzędnych obróconym o kąt α względem układu Oxy obliczymy ze wzorów Kołosowa-Muscheliszwiliego:

$$(1.2) \quad \left. \begin{aligned} \sigma_r \\ \sigma_\alpha \end{aligned} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ 2 \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \mp \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} e^{2i\alpha} \mp \frac{\varphi''(\zeta)\omega'(\zeta) - \varphi'(\zeta)\omega''(\zeta)}{[\omega'(\zeta)]^3} \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega(\zeta)} e^{2i\alpha} \right\}_{\zeta=\omega^{-1}(z)},$$

$$\tau_{r\alpha} = \operatorname{Im} \left\{ \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} e^{2i\alpha} + \frac{\varphi''(\zeta)\omega'(\zeta) - \varphi'(\zeta)\omega''(\zeta)}{[\omega'(\zeta)]^3} \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega(\zeta)} e^{2i\alpha} \right\}_{\zeta=\omega^{-1}(z)},$$

$$2G \begin{Bmatrix} u_r \\ u_\alpha \end{Bmatrix} = \frac{\operatorname{Re}}{\operatorname{Im}} \left\{ \left[\kappa \varphi(\zeta) - \overline{\psi(\zeta)} - \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \frac{\overline{\varphi'(\zeta)}}{\varphi'(\zeta)} \right] e^{-i\alpha} \right\}_{\zeta=\omega^{-1}(z)},$$

gdzie e jest podstawą logarytmów naturalnych, $\zeta = \omega^{-1}(z)$ odwrotną funkcją odwzorowującą, G — modułem Kirchhoffa, a κ zależy od współczynnika Poissona ν i wynosi $(3-\nu)/(1+\nu)$ dla płaskiego stanu naprężenia oraz $3-4\nu$ dla płaskiego stanu odkształcenia.

2. FUNKCJA ODWZOROWUJĄCA $z = \omega(\zeta)$ ORAZ ODWROTNA $\zeta = \omega^{-1}(z)$

Dla kwadratu funkcja $\omega(\zeta)$ jest nieskończonym szeregiem potęgowym:

$$(2.1) \quad z = \omega(\zeta) = \sum_{l=1}^{\infty} c_l \zeta^l,$$

otrzymanym metodą sprzężonych szeregów trygonometrycznych [1 i 5].

Współczynniki c_l oblicza się ze wzoru rekurencyjnego

$$c_{4l+1} = -\frac{(2l-1)(4l-3)}{2l(4l+1)},$$

gdzie $c_1 = 0,53935a$.

Jeżeli do obliczeń przyjmiemy skończoną liczbę wyrazów w szeregu (2.1), tzn.

$$(2.2) \quad z = \omega(\zeta) = \sum_{l=1}^n c_l \zeta^l, \dots$$

to obszarem odwzorowywanym jest kwadrat z zaokrąglonymi narożnikami promieniem r . Promień r maleje ze wzrostem n .

Pole powierzchni obszaru odwzorowywanego za pomocą (2.2) wynosi [2]

$$(2.3) \quad |S_n| = \pi \sum_{l=1}^n l |c_l|^2.$$

Na tej podstawie obliczamy względny błąd odwzorowania:

$$(2.4) \quad \delta = \left(1 - \frac{|S_n|}{a^2} \right) 100\%.$$

Do dalszych obliczeń przyjmijmy trzy wyrazy szeregu (2.1), tzn.

$$(2.5) \quad z = \omega(\zeta) = (0,53935 \zeta - 0,05393 \zeta^5 + 0,02247 \zeta^9) a.$$

Wtedy

$$|S_n| = 0,97373 a^2, \quad \delta = 2,63 \%$$

Odwroćenie szeregu (2.2) w szereg

$$(2.6) \quad \zeta = \sum_{i=1}^n m_i z^i$$

przeprowadzimy metodą nieokreślonych współczynników [1].

Współczynnik m_1 wynosi

$$(2.7) \quad m_1 = \frac{1}{c_1},$$

natomiast pozostałe współczynniki m_i oblicza się ze wzoru rekurencyjnego

$$(2.8) \quad m_i = -\frac{1}{c_1^i} [m_1 m_i^{(1)} + m_2 m_{i-1}^{(2)} + \dots + m_{i-1} m_2^{(i-1)}],$$

gdzie

$$(2.9) \quad m_i^{(1)} = c_1, \quad m_i^{(2)} = c_1^2, \quad m_i^{(r)} = c_1 m_i^{(r-1)} + c_2 m_{i-1}^{(r-1)} + c_3 m_{i-2}^{(r-1)} + \dots + c_i m_1^{(r-1)}.$$

Na podstawie powyższych wzorów obliczymy:

$$m_1 = \frac{1}{c_1} = 1,85408 \frac{1}{a},$$

$$m_5 = -\frac{m_1 m_5^{(1)}}{c_1^5} = -\frac{c_5}{c_1^6} = 2,19138 \frac{1}{a^5},$$

$$m_9 = -\frac{1}{c_1^9} [m_1 m_9^{(1)} + m_5 m_5^{(5)}] = -\frac{1}{c_1^{10}} \left(c_9 - 5 \frac{c_5^2}{c_1} \right) = 2,16062 \frac{1}{a^9},$$

przy czym $m_5^{(5)}$ wynosi

$$m_5^{(5)} = c_1 m_5^{(4)} + c_5 m_1^{(4)} = 5c_1^4 c_5 = -0,02282 a^5.$$

Zatem odwrotna funkcja odwzorowująca ma postać

$$(2.10) \quad \zeta = \omega^{-1}(z) = 1,85408 \frac{z}{a} + 2,19138 \left(\frac{z}{a} \right)^5 + 2,16062 \left(\frac{z}{a} \right)^9.$$

3. OBLICZENIE WSPÓŁCZYNNIKÓW a_j

Współczynniki a_j obliczymy na podstawie pracy [3] z następującego układu równań:

$$(3.1) \quad a_j + k_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie

$$(3.2) \quad k_j = b_n d_{n-j} + b_{n-1} d_{n-j-1} + \dots + b_{j+1} d_1, \quad d_j = (j+1)a_{j+1} + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^m \frac{P_k}{\rho_k^{j+1}},$$

a b_j są współczynnikami rozwinięcia funkcji $\overline{\omega(\rho)/\omega'(\rho)}$ w szereg Lauranta wokół punktu $\zeta=0$, a więc wyrażają się wzorem [5]

$$(3.3) \quad b_j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\omega(\rho)}{\omega'(\rho)} e^{-ij\varphi} d\varphi, \quad j = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

przy czym $\rho = e^{i\varphi}$.

Wykorzystując (2.2) i (2.5) we wzorze (3.3), otrzymamy

$$(3.4) \quad \begin{aligned} b_1 &= 1 - 5 \left(\frac{c_5}{c_1} \right)^2 - 9 \left(\frac{c_9}{c_1} \right)^2 + 25 \frac{c_9}{c_1} \left(\frac{c_5}{c_1} \right)^2 = 0,94484, \\ b_5 &= \left(1 - 5 \frac{c_9}{c_1} \right) \frac{c_5}{c_1} = -0,07917, \\ b_9 &= \frac{c_9}{c_1} = 0,04166. \end{aligned}$$

Wprowadzając oznaczenia

$$(3.5) \quad \begin{aligned} M_1 + iN_1 &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^m \bar{P}_k (b_1 \rho_k + b_5 \rho_k^5 + b_9 \rho_k^9), \\ M_p + iN_p &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^m \bar{P}_k (b_5 \rho_k^{6-p} + b_9 \rho_k^{10-p}), \quad p=2, 3, 4, 5; \\ M_p + iN_p &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^m \bar{P}_k (b_9 \rho_k^{10-p}), \quad p=6, 7, 8, 9 \end{aligned}$$

oraz wstawiając (3.2) do (3.1), dostaniemy następujący układ równań:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} a_1 + b_1 \bar{a}_1 + 5b_5 \bar{a}_5 + 9b_9 \bar{a}_9 &= M_1 + iN_1, \\ a_2 + 4b_5 \bar{a}_4 + 8b_9 \bar{a}_8 &= M_2 + iN_2, \\ a_3 + 3b_5 \bar{a}_3 + 7b_9 \bar{a}_7 &= M_3 + iN_3, \\ a_4 + 2b_5 \bar{a}_2 + 6b_9 \bar{a}_6 &= M_4 + iN_4, \\ a_5 + b_5 \bar{a}_1 + 5b_9 \bar{a}_5 &= M_5 + iN_5, \\ a_6 + 4b_9 \bar{a}_4 &= M_6 + iN_6, \\ a_7 + 3b_9 \bar{a}_3 &= M_7 + iN_7, \\ a_8 + 2b_9 \bar{a}_2 &= M_8 + iN_8, \\ a_9 + b_9 \bar{a}_1 &= M_9 + iN_9. \end{aligned}$$

Ponieważ współczynniki a_j są zespolone, tzn.

$$(3.7) \quad a_j = \alpha_j + i\beta_j,$$

to układ równań (3.6) można rozdzielić na 2 układy niezależne — jeden z niewiadomymi α_j i drugi z niewiadomymi β_j . Po rozwiązaniu obu układów obliczamy współczynniki a_j wg (3.7). Warunkiem jednoznaczności rozwiązania układu z niewiadomymi β_j jest $\beta_1 = 0$ [3], czyli znikanie głównego momentu obciążenia [4]. Współczynniki a_j wynoszą:

$$(3.8) \quad \begin{aligned} a_1 &= 0,52540 M_1 + 0,17212 M_5 - 0,19698 M_9, \\ a_2 &= 1,08697 (M_2 + iN_2) + 0,35913 (M_4 - iN_4) - 0,08976 (M_6 + iN_6) - \\ &\quad - 0,36226 (M_8 - iN_8), \\ a_3 &= 1,10495 (M_3 + iN_3) + 0,27236 (M_3 - iN_3) - 0,07942 (M_7 + iN_7) - \\ &\quad - 0,32222 (M_7 - iN_7), \\ a_4 &= 0,17957 (M_2 - iN_2) + 1,10265 (M_4 + iN_4) - 0,27562 (M_6 - iN_6) - \\ &\quad - 0,05984 (M_8 + iN_8), \\ a_5 &= 0,01721 (M_1 + iN_1) + 0,01721 (M_1 - iN_1) + 1,05100 (M_5 + iN_5) - \\ &\quad - 0,21210 (M_5 - iN_5) - 0,00645 (M_9 + iN_9) - 0,00645 (M_9 - iN_9), \\ a_6 &= -0,02992 (M_2 + iN_2) - 0,18374 (M_4 - iN_4) + 1,04593 (M_6 + iN_6) + \\ &\quad + 0,00997 (M_8 - iN_8), \\ a_7 &= -0,03403 (M_3 + iN_3) - 0,13810 (M_3 - iN_3) + 1,04027 (M_7 + iN_7) + \\ &\quad + 0,00993 (M_7 - iN_7), \\ a_8 &= -0,09056 (M_2 - iN_2) - 0,02992 (M_4 + iN_4) + 0,00748 (M_6 - iN_6) + \\ &\quad + 1,03018 (M_8 + iN_8), \\ a_9 &= -0,01094 (M_1 + iN_1) - 0,01094 (M_1 - iN_1) - 0,00358 (M_5 + iN_5) - \\ &\quad - 0,00358 (M_5 - iN_5) + 1,00410 (M_9 + iN_9) + 0,00410 (M_9 - iN_9). \end{aligned}$$

Obliczenie współczynników a_j jest równoznaczne z wyznaczeniem funkcji Goursata, co wynika ze wzorów (1.1). Funkcje te są wyznaczone z dokładnością do pewnych stałych zespolonych, które nie mają wpływu na składowe tensora naprężeń, co widać na podstawie wzorów (1.2).

Do celów praktycznych należy we wzorze (1.1)₂ pozbyć się osobliwości pozornej w punkcie $\zeta = 0$. Polega to na wyodrębnieniu części regularnej funkcji $\omega(1/\zeta) \varphi'(\zeta) / \omega'(\zeta)$ w obszarze $|\zeta| < 1$. Wtedy zamiast wzoru (1.1)₂ napiszemy [3]

$$(3.9) \quad \psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^m \bar{P}_k \ln(\rho_k - \zeta) - \text{Reg} \left[\omega \left(\frac{1}{\zeta} \right) \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right].$$

Przy wyodrębnianiu części regularnej należy zauważyć, że

$$(3.10) \quad \frac{\omega(1/\zeta)}{\omega'(\zeta)} = \frac{b_1}{\zeta} + \frac{b_5}{\zeta^5} + \frac{b_9}{\zeta^9} - \frac{g_3 \zeta^3 + g_7 \zeta^7}{\omega'(\zeta)}$$

oraz

$$(3.11) \quad \varphi'(\zeta) = d_0 + d_1 \zeta + d_2 \zeta^2 + \dots + d_8 \zeta^8 + \frac{\zeta^9}{2\pi} \sum_{k=1}^m \frac{P_k}{\rho_k^9 (\rho_k - \zeta)},$$

gdzie współczynniki b_1 , b_5 i b_9 są określone wzorami (3.4), d_j wzorem (3.2), współczynniki zaś g_3 i g_7 wynoszą

$$(3.12) \quad \begin{aligned} g_3 &= 5c_5 b_1 + 9c_9 b_5 = -0,39002a, \\ g_7 &= 9c_9 b_1 = 0,19107a. \end{aligned}$$

Na podstawie wzorów (3.10) i (3.11) część regularna wynosi

$$(3.13) \quad \text{Reg} \left[\omega \left(\frac{1}{\zeta} \right) \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right] = - \frac{g_3 \zeta^3 + g_7 \zeta^7}{\omega'(\zeta)} \varphi'(\zeta) + \sum_{j=1}^{n-2} h_j \zeta^j + \frac{b_1 \zeta^8 + b_5 \zeta^4 + b_9}{2\pi} \sum_{k=1}^m \frac{P_k}{\rho_k^9 (\rho_k - \zeta)},$$

gdzie

$$(3.14) \quad \begin{aligned} h_j &= b_1 d_{j+1} + b_5 d_{j+5}, & j=1, 2, 3, \\ h_j &= b_1 d_{j+1}, & j=4, 5, 6, 7. \end{aligned}$$

Ze wzorów (3.9) i (3.13) otrzymujemy postać funkcji $\psi(\zeta)$ w obszarze $|\zeta| < 1$:

$$(3.15) \quad \psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^m \bar{P}_k \ln(\rho_k - \zeta) + \frac{g_3 \zeta^3 + g_7 \zeta^7}{\omega'(\zeta)} \varphi'(\zeta) - \sum_{j=1}^7 h_j \zeta^j - \frac{b_1 \zeta^8 + b_5 \zeta^4 + b_9}{2\pi} \sum_{k=1}^m \frac{P_k}{\rho_k^9 (\rho_k - \zeta)}.$$

Na konturze $|\zeta|=1$ funkcja $\psi(\zeta)$ wyraża się wzorem (1.1)₂.

4. PRZYKŁADY LICZBOWE

1. Wyznaczyć naprężenia normalne po dodatniej stronie osi y w tarczy obciążonej siłami $P_1 = X$ i $P_2 = -X$ leżącymi na osi rzeczywistej (rys. 2).

Po odwzorowaniu kwadratu na koło jednostkowe ze wzoru (2.10) punkty zaczepienia sił $t_1 = a/2$ i $t_2 = -a/2$ przejdą w punkty $\rho_1 = +1$ i $\rho_2 = -1$.

Na podstawie wzorów (3.5) obliczamy:

$$M_1 + iN_1 = -0,90733 \frac{X}{\pi}, \quad M_3 + iN_3 = 0,03751 \frac{X}{\pi}, \quad M_5 + iN_5 = 0,03751 \frac{X}{\pi},$$

$$M_7 + iN_7 = -0,04166 \frac{X}{\pi}, \quad M_9 + iN_9 = -0,04166 \frac{X}{\pi}, \quad M_{2j} + iN_{2j} = 0$$

dla $j=1, 2, 3, 4$.

Współczynniki a_j , obliczone ze wzorów (3.8) wynoszą:

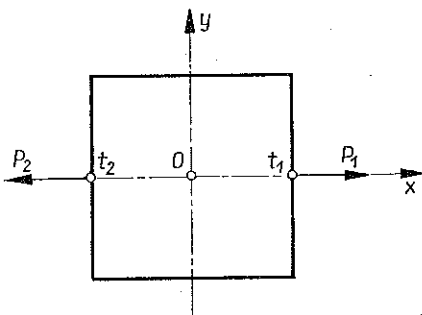
$$a_1 = -0,46205 \frac{X}{\pi}, \quad a_3 = 0,06839 \frac{X}{\pi}, \quad a_5 = 0,00077 \frac{X}{\pi},$$

$$a_7 = -0,05022 \frac{X}{\pi}, \quad a_9 = -0,02241 \frac{X}{\pi}, \quad a_2 = a_4 = a_6 = a_8 = 0.$$

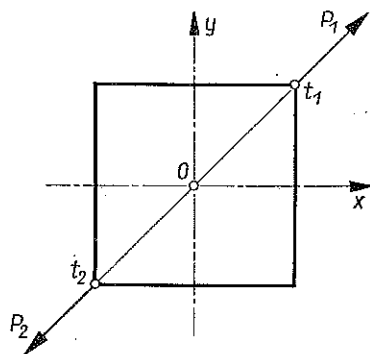
Współczynniki h_j , obliczone ze wzorów (3.14) wynoszą:

$$h_1 = 1,08735 \frac{X}{\pi}, \quad h_3 = 0,88527 \frac{X}{\pi}, \quad h_5 = 0,61276 \frac{X}{\pi},$$

$$h_7 = 0,75427 \frac{X}{\pi}, \quad h_2 = h_4 = h_6 = 0.$$



Rys. 2



Rys. 3

Wartości liczbowe pochodnych występujących we wzorach (1.2), obliczone na podstawie (1.1), (2.5) i (3.15), oraz wartości naprężeń w pięciu punktach półosi Oy zestawiono w tablicy 1.

2. Obliczyć naprężenia normalne w układzie nachylonym pod kątem $\pi/4$ do osi Ox w środku tarczy obciążonej wg rys. 3.

Tablica 1

z/ai	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$
ζ/i	0,00000	0,23183	0,46567	0,71185	1,00000
$\omega'(\zeta)/a$	0,53935	0,53857	0,52712	0,48344	0,47193
$\omega''(\zeta)/ai$	0,00000	0,01339	0,10125	0,49483	0,53924
$\varphi'(\zeta) (\pi/X)$	0,53795	0,47598	0,31856	0,13109	-0,01359
$\varphi''(\zeta) \pi/iX$	0,00000	0,51114	0,77998	0,67765	0,39964
$-\psi'(\zeta) \pi/iX$	2,12909	1,88355	1,34993	0,72181	0,41268
$\sigma_x \pi a/X$	5,94216	5,04970	3,12291	1,16339	-0,11516
$-\sigma_y \pi a/X$	1,95256	1,51458	0,70555	0,07875	0,00000

Siły $P_1 = X + iY$ oraz $P_2 = -(X + iY) = -P_1$ są zaczepione w punktach $t_1 = (a/2)(1+i)$ oraz $t_2 = -(a/2)(1+i) = -t_1$.

Po odwzorowaniu na płaszczyznę zmiennej zespolonej ζ punkty t_1 i t_2 przejdą w punkty $\rho_1 = (1+i)/\sqrt{2}$ i $\rho_2 = -(1+i)/\sqrt{2} = -\rho_1$.

Na podstawie wzorów (3.5) obliczamy

$$M_1 + iN_1 = -1,06567 \frac{|P|}{\pi}, \quad M_3 + iN_3 = 0,12083 \frac{|P|}{\pi} i, \quad M_5 + iN_5 = 0,12083 \frac{|P|}{\pi},$$

$$M_7 + iN_7 = -0,04166 \frac{|P|}{\pi} i, \quad M_9 + iN_9 = -0,04166 \frac{|P|}{\pi}, \quad M_{2j} + iN_{2j} = 0.$$

Ze wzorów (3.8) i (3.14) otrzymujemy:

$$a_1 = -0,53090 \frac{|P|}{\pi}, \quad a_3 = 0,09048 \frac{|P|}{\pi} i, \quad a_5 = 0,06521 \frac{|P|}{\pi},$$

$$a_7 = -0,03035 \frac{|P|}{\pi} i, \quad a_9 = -0,01954 \frac{|P|}{\pi}, \quad a_{2j} = 0 \quad \text{dla } j=1, 2, 3, 4,$$

$$h_1 = -0,75072 \frac{|P|}{\pi} i, \quad h_3 = -0,70203 \frac{|P|}{\pi}, \quad h_5 = 0,74411 \frac{|P|}{\pi} i,$$

$$h_7 = 0,77868 \frac{|P|}{\pi}, \quad h_{2j} = 0 \quad \text{dla } j=1, 2, 3.$$

Pochodne funkcji $\omega(\zeta)$, $\varphi(\zeta)$ i $\psi(\zeta)$ w punkcie $\zeta=0$ wynoszą:

$$\omega'(0) = c_1 = 0,53935a,$$

$$\varphi'(0) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{P_1}{\rho_1} + \frac{P_2}{\rho_2} \right) + a_1 = 0,46910 \frac{|P|}{\pi},$$

$$\varphi''(0) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{P_1}{\rho_1^2} + \frac{P_2}{\rho_2^2} \right) = 0,$$

$$\psi'(0) = -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\bar{P}_1}{\rho_1} + \frac{\bar{P}_2}{\rho_2} \right) - h_1 + b_9 \frac{|P|}{\pi} i = 1,79238 \frac{|P|}{\pi} i.$$

Naprężenia normalne wzdłuż przekątnych kwadratu, obliczone ze wzorów (1.2), wynoszą:

$$\sigma_x = 5,06272 \frac{|P|}{\pi a}, \quad \sigma_\varphi = -1,58372 \frac{|P|}{\pi a}.$$

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. П. Ф. Фильчаков, *Приближенные методы конформных отображений*, Наукова Думка, Киев 1964.
2. F. LEJA, *Funkcje analityczne i harmoniczne*, Polskie Towarzystwo Matematyczne, Warszawa-Wrocław 1952.
3. L. MARTINI, *Plaskie zagadnienie teorii sprężystości*, PWN, Warszawa 1957.
4. Н. И. Мусхелишвили, *Некоторые основные задачи математической теории упругости*, Наука, Москва 1966.
5. W. I. SMIRNOW, *Matematyka wyższa*, 3, cz. 2, PWN, Warszawa 1967.

Резюме

КВАДРАТНАЯ ПЛАСТИНКА
ЗАГРУЖЕННАЯ ПО КОНТУРУ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ СИЛАМИ

В работе дается решение упругой и изотропной квадратной пластинки системой m сосредоточенных сил $P_k = X_k + iY_k$, действующих в точках $t_k = x_k + iy_k$ края пластинки.

Решение основывается на книге Л. Мартини [3], заключающей развитие метода Н. И. Мусхелишвили [4] на основную бигармоническую задачу при разрывных краевых условиях.

Полученные решения т. е. функции Гурса $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ — формулы (1.1) и (3.15) сводится к определению коэффициентов a_j согласно формул (3.8) и h_j согласно формул (3.14). Эти коэффициенты зависят от загружающих сил P_k и отображенных на единичный круг точек их приложения ρ_k .

Преобразование точек с единичного круга на квадрат происходит согласно формуле (2.10).

SUMMARY

SQUARE DISK LOADED ON THE CONTOUR BY CONDENSED FORCES

This paper contains the solution for an elastic and isotropic square disk loaded by a system of m condensed forces $P_k = X_k + iY_k$ acting on the points $t_k = x_k + iy_k$ on the edge of the disk.

The solution is based on the book by L. Martini [3], containing a development of the method of N. I. Muschelishvili [4] for the basic biharmonic problem with discontinuous boundary conditions.

Obtaining of the solution — that is, the Goursat's function $\varphi(\zeta)$ and $\psi(\zeta)$ — formulae (1.1) and (3.15) — involves calculation of the coefficients a_j according to the formulae (3.8) and h_j according to the formulae (3.14). These coefficients depend on the loading forces P_k and mapped on a unit circle of the points of their application ρ_k .

The transformation of points of the unit circle to a square proceeds according to formula (2.10).

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 listopada 1970 r.