ROZPRAWY INŻYNIERSKIE, 19, 2, 327–331, 1971, Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN, Warszawa

GLOBALNA ASYMPTOTYCZNA STATECZNOŚĆ PEWNEGO UKŁADU NIELINIOWEGO

STANISŁAW KASPRZYK, ANDRZEJ ŁOPATA (KRAKÓW)

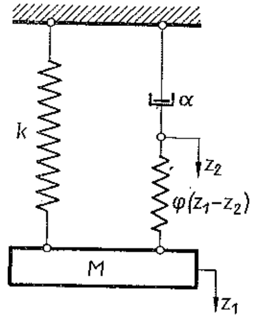
W pracy będziemy rozważali układ równań różniczkowych zwyczajnych

$$\begin{aligned} &\ddot{z}_1+az_1+b\varphi(z_1-z_2)=0, \\ &\dot{z}_2-c\varphi(z_1-z_2)=0 \qquad \left(\dot{z}=\frac{dz}{dt}\right), \end{aligned} \tag{1}$$

gdzie φ jest nieliniową funkcją taką, że $\varphi(0)=0$ oraz taką, że układ (1) ma w zerze jedyny punkt osobliwy; a, b i c są dodatnimi wielkościami stałymi.

Układ równań (1) opisuje drgania własne pewnego układu mechanicznego, którego model obliczeniowy pokazany jest na rys. 1, gdzie z_1 oznacza wychylenie masy M, z_2 wychylenie punktu połączenia nieliniowej sprężyny o sprężystości $\varphi(z_1-z_2)$ z liniowym tłumikiem o współczynniku tłumienia α oraz k współczynnik sprężystości sprężyny liniowej. Stałe a, b i c, występujące w (1) wynoszą

$$a=\frac{k}{M}, \qquad b=\frac{1}{M}, \qquad c=\frac{1}{\alpha}.$$



Rys. 1

Powyższy model obliczeniowy może przedstawiać np. czujnik inercyjny do pomiaru drgań z jedną sprężyną nieliniową. Dla zapewnienia prawidłowości pracy czujnika oraz szerokiego zakresu stosowalności — drgania własne powinny być drganiami zanikającymi, tj. rozwiązanie zerowego układu (1) powinno być stateczne w możliwie dużym obszarze warunków początkowych. Ponieważ nie zawsze znamy obszar warunków początkowych i nie zawsze znane są wszystkie zaburzenia, wygodnie rozpatrywać jest stateczność rozwiązania zerowego w całej przestrzeni zmiennych pozycyjnych. Stateczność w całej przestrzeni fazowej nazywa się globalną statecznością asymptotyczną.

Układ (1) jest pewnym szczególnym przypadkiem ogólniejszego układu

$$\dot{z}=Az+wf(\sigma), \qquad \sigma=(d,z), \tag{2}$$

gdzie $z\in E^n$, A — macierz stała wymiaru $[n\times n]$, w i d są stałymi wektorami z przestrzeni E^n, (,) oznacza iloczyn skalarny wektorów.

Definicja globalnej asymptotycznej stateczności. Rozwiązanie zerowe układu równań różniczkowych zwyczajnych nazywamy globalnie asymptotycznie statecznym, jeżeli zero (jedyny punkt osobliwy) jest lokalnie asymptotycznie stateczne i jeżeli dla każdego warunku początkowego rozwiązanie tego układu zmierza do zera, gdy $t\to\infty$.

Celem pracy jest podanie warunków wystarczających, przy których rozwiązanie zerowe układu (1) jest globalnie asymptotycznie stateczne, tj. podanie klasy charakterystyk nieliniowych, zapewniających globalną asymptotyczną stateczność. Układ (1) należy rozumieć wówczas jako rodzinę układów.

Przy badaniu globalnej asymptotycznej stateczności rozwiązania zerowego układu typu (2) zakłada się, że iloraz $f(\sigma)/\sigma$ należy do pewnego skończonego przedziału, lub też, że pochodna $df/d\sigma$ należy do stałego skończonego przedziału.

Ponieważ będziemy badali globalną asymptotyczną stateczność układu (1) przy założeniu, że $df/d\sigma$ należy do pewnego skończonego przedziału, zastosujemy więc pewne twierdzenie Hartmana-Olecha [1]. Dla przejrzystości twierdzenie to podane jest w pierwszej części pracy. Również w tej części podany jest pewien algebraiczny lemat [2], który służy do wykazania, że spełnione jest jedno z założeń twierdzenia Hartmana-Olecha. W części drugiej podane jest twierdzenie autorów oraz jego dowód.

Twierdzenie Hartmana-Olecha [1]. Rozważmy układ równań różniczkowych zwyczajnych

$$\dot{x}=f(x) \qquad \left(\dot{x}=\frac{dx}{dt}\right), \tag{3}$$

gdzie

$$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n), \qquad f(x)=f_1(x),f_2(x),\ldots,f_n(x).$$

Niech $J(x)$ będzie macierzą Jacobiego funkcji $f(x)$ i niech $H(x)=(1/2)(J+J^*)$ będzie sprzężeniem hermitowskim macierzy $J(x)$. Niech $f(x)$ oznacza n wymiarowy wektor klasy C^1 w przestrzeni E^n. Jeżeli

1) $f(0)=0, \quad f(x)\neq 0, \quad$ gdy $\quad x\neq 0$;

2) $x=0$ jest lokalnie asymptotycznie statecznym rozwiązaniem (3);

3) dla każdego x wartości własne $\lambda_i(x)$ macierzy $H(x)$ spełniają nierówności

$$\lambda_i(x)+\lambda_j(x)\leqslant 0, \qquad 1\leqslant i<j\leqslant n;$$

4) $$\int^{\infty}[\min_{\|x\|=r}\|f(x)\|]\,dr=\infty, \qquad \|x\|=\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\Big)^{1/2};$$

to rozwiązanie $x(t)=0$ układu (3) jest globalnie asymptotycznie stateczne.

LEMAT. *Niech wielomian trzeciego stopnia o współczynnikach rzeczywistych*

$$\varphi(x)=x^3+ax^2+bx+c \tag{4}$$

posiada trzy pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2, x_3.

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by pierwiastki (4) *spełniały nierówności*

$$x_i+x_j\leqslant 0 \quad \text{dla} \quad 0\leqslant i<j\leqslant 3$$

jest, aby był spełniony jeden z warunków:

1. $a>0$, gdy $b\geqslant 0$;
2. $a>0$, $a^2+b\geqslant 0$, $ab-c\geqslant 0$, gdy $b\leqslant 0$.

TWIERDZENIE. *Niech* $a>0$, $b>0$, $c>0$ *i niech* $\varphi(0)=0$, $\varphi\in C^1$. *Jeżeli*

$$(5)\qquad \begin{aligned} &\varphi'(u)\geqslant \frac{b}{c^2}-\frac{a}{b}, \quad &gdy \quad b^2\geqslant 2ac^2;\\ &\varphi'(u)\geqslant \frac{a}{b}, \quad &gdy \quad b^2<2ac^2, \end{aligned}$$

dla każdego u, to rozwiązanie zerowe układu (1) *jest globalnie asymptotycznie stateczne.*

Dowód. Przyjmując $z_1=x_1$, $z_2=x_2$, $\dot{z}_1=x_3$ układ (1) zamieniamy na równoważny układ równań

$$(6)\qquad \begin{aligned} \dot{x}_1&=x_3,\\ \dot{x}_2&=c\varphi(x_1-x_2),\\ \dot{x}_3&=-ax_1-b\varphi(x_1-x_2). \end{aligned}$$

Dokonując zmiany zmiennych

$$(7)\qquad x_1=y_1+y_3,\quad x_2=y_1-y_2+y_3,\quad x_3=\frac{b}{c}y_2-\frac{b}{c}y_3$$

w układzie (6), otrzymujemy

$$(8)\qquad \begin{aligned} \dot{y}_1&=-\frac{ac}{b}y_1-\frac{ac}{b}y_3,\\ \dot{y}_2&=\frac{b}{c}y_2-c\varphi(y_2)-\frac{b}{c}y_3,\\ \dot{y}_3&=\frac{ac}{b}y_1+\frac{b}{c}y_2+\frac{ac^2-b^2}{bc}y_3. \end{aligned}$$

Z nieosobliwości przekształcenia (7) wynika, że dla wykazania twierdzenia wystarczy udowodnić globalną asymptotyczną stateczność rozwiązania zerowego (8). W tym celu wykażemy, że prawe strony (8) spełniają założenia 1 – 4 twierdzenia Hartmana-Olecha, z którego wynika teza twierdzenia.

Z założenia $\varphi(0)=0$ oraz (5) wynika, że zero jest jedynym punktem osobliwym układu (8), czyli spełnione jest założenie 1 twierdzenia Hartmana-Olecha. Wobec $\varphi\in C^1$ dla dostatecznie małych $|y_2|$ funkcja $\varphi(y_2)=\varphi'(0)\,y_2+o(y_2)$. Z twierdzenia Hurwitza otrzymujemy, że początek układu (y_1, y_2, y_3) jest lokalnie asymptotycznie stateczny dla $\varphi'(0)>0$. Stąd i z (5) wynika, że zero jest lokalnie asymptotycznie stateczne, a więc zachodzi założenie 2.

Niech $J(y_1\ y_2\ y_3)$ będzie macierzą Jacobiego prawych stron układu (8) i niech H będzie sprzężeniem hermitowskim macierzy J, tj. $H=(1/2)(J+J^T)$, J^T oznacza macierz transponowaną macierzy J.

Macierz

$$J=\begin{bmatrix} -\frac{ac}{b} & 0 & -\frac{ac}{b} \\ 0 & \frac{b}{c}-c\varphi' & -\frac{b}{c} \\ \frac{ac}{b} & \frac{b}{c} & \frac{ac^2-b^2}{bc} \end{bmatrix}$$

oraz

$$H=\begin{bmatrix} -\frac{ac}{b} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b}{c}-c\varphi' & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ac^2-b^2}{bc} \end{bmatrix}.$$

Wartości własne macierzy H spełniają równanie

$$\lambda^3+c\varphi'\lambda^2+\left[-\left(\frac{b}{c}\right)^2-\left(\frac{ac}{b}\right)^2+b\varphi'\right]\lambda+\frac{a}{b^2}(ac^2-b^2)\left(\frac{b}{c}-c\varphi'\right)=0. \tag{9}$$

Zgodnie z drugim warunkiem lematu suma dwóch dowolnych różnych pierwiastków równania (9) jest niedodatnia dla każdego y, jeżeli zachodzą nierówności:

$$\begin{gathered} c\varphi'>0, \\ c^2(\varphi')^2+b\varphi'+a-\left(\frac{b}{c}\right)^2-\left(\frac{ac}{b}\right)^2\geqslant 0, \\ bc(\varphi')^2-\frac{b^2}{c}\varphi'-\frac{a}{bc}(ac^2-b^2)\geqslant 0. \end{gathered} \tag{10}$$

Rozwiązując nierówności (10) ze względu na φ' i biorąc wspólny przedział dla φ', otrzymujemy

$$\varphi'(u)\geqslant\frac{b}{c^2}-\frac{a}{b},\quad \text{gdy}\quad b^2\geqslant 2ac^2,$$

$$\varphi'(u)\geqslant\frac{a}{b},\quad \text{gdy}\quad b^2<2ac^2,$$

czyli spełnione jest założenie 3).

Wobec założenia (5) i kształtu prawych stron układu równań (8) wynika natychmiast, że zachodzi 4).

Z faktu, że spełnione są założenia twierdzenia Hartmana-Olecha, wynika nasze twierdzenie.

Literatura cytowana w tekście

1. P. Hartman, Cz. Olech, *On global asymptotic stability of solutions of differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc., **104**, 1, 154-178, 1962.
2. S. Kasprzyk, *Pewne zagadnienia z globalnej asymptotycznej stabilności*, Prace IV Krajowej Konferencji Automatyki, AGH 20-24.VI.1967, t.I, *Teoria Sterowania*, 197-203, Kraków.

Резюме

ОБЩАЯ АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ НЕКОТОРОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

В работе рассматривается система уравнений (1), представляющих некоторый класс нелинейных систем собственных колебаний. На основе теории, касающейся общей асимптотической устойчивости решения нулевой системы дифференции уравнений Хартмана-Олеха, доказана теорема: пусть $a > 0, b > 0, c > 0$ и пусть $\varphi(0) = 0, \varphi \in C^1$. Если $\varphi'(u) \geqslant b/c^2 - a/b$, когда $b^2 \geqslant 2ac^2$ и $\varphi'(u) \geqslant a/b$, когда $b^2 < 2ac^2$ для каждого u, тогда нулевое решение системы является (1) обще асимптотически устойчивым.

Summary

THE OVERALL ASYMPTOTIC STABILITY OF A CERTAIN NONLINEAR SYSTEM

In the paper the following set of equations is considered (1), which represents a certain class of nonlinear systems of proper vibrations. On the basis of the theorem of overall asymptotic stability of the zero solution of the P. Hartman-Cz. Olech's set of differential equations, the following theorem has been proved.

Let $a>0, b>0, c>0$, and let $\varphi(0)=0$, $\varphi \in C^1$. If $\varphi'(u) \geqslant b/c^2 - a/b$, when $b^2 \geqslant 2ac^2$ and $\varphi'(u) \geqslant a/b$, when $b^2 < 2ac^2$ for every solution u, then the zero solution of the set (1) is overall asymptotically stable.

INSTYTUT PODSTAW BUDOWY MASZYN
AKADEMII GÓRNICZO-HUTNICZEJ
W KRAKOWIE

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 listopada 1970 r.