

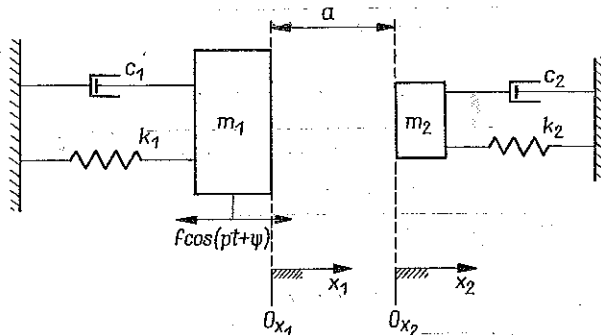
## DRGANIA UDERZENIOWE DWU NIEZALEŻNYCH UKŁADÓW

CZESŁAW CEMPEL (POZNAŃ)

1. Jak wiadomo z literatury [1] w celu zmniejszenia drgań elementów maszyn stosuje się tłumiki w postaci dodatkowej masy sprzężonej z układem głównym za pomocą odpowiednio dobranej sprężyny, tłumika wiskotycznego lub tarcowego. Układy te mają tę wadę, że powiększają łączną masę urządzenia i komplikują konstrukcję układu. Wady tej nie posiadają pewne układy, których sprzężenie z układem głównym realizowane jest za pomocą jednostronnych sił zderzeniowych.

W pracy rozpatrzono drgania uderzeniowe dwu niezależnych układów, z których jeden może być układem głównym, tłumionym, drugi zaś układem tłumiącym drgania. Założono przy tym występowanie tłumienia wiskotycznego w obu układach przyjmując, że czas trwania zderzenia jest nieporównywalnie mały z okresem drgań własnych układów.

2. Rozważmy ruch dwu niezależnych układów sprzężonych jednostronnymi siłami zderzeniowymi (rys. 1).



Rys. 1

Niech na masę  $m_1$  działa siła wymuszająca  $f \cos(pt + \psi)$ , odległość zaś mas w położeniu równowagi statycznej niech wynosi  $a$ , przy czym jeśli  $a > 0$ , to w układzie istnieje luz, a gdy  $a < 0$  — naciąg z siłą  $F = ak_1 k_2 / (k_1 + k_2)$ . Załóżmy, że warunki istnienia drgań z uderzeniami są spełnione; wtedy równania ruchu układu można napisać w postaci [2]

$$(2.1) \quad \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + (1+R) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) |\dot{x}_1 - \dot{x}_2| \delta(x_1 - x_2 - a) &= f \cos(pt + \psi), \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 \dot{x}_2 + k_2 x_2 + (1+R) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) |\dot{x}_2 - \dot{x}_1| \delta(x_2 - x_1 + a) &= 0. \end{aligned}$$

Rozpatrując ruch okresowy układu możemy wprowadzić do (2.1) następujące oznaczenia i przekształcenia:

$$\begin{aligned}
 & |\dot{x}_1 - \dot{x}_2| \delta(x_1 - x_2 - a) = \sum_0^{\infty} \delta(t - nT - \varepsilon) \equiv \delta_T(t - \varepsilon), \\
 (2.2) \quad & S = \frac{(1+R)m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\dot{x}_{1T} - \dot{x}_{2T}), \quad \dot{x}_{iT} = [\dot{x}_i(t)]_{t=T}, \quad i=1, 2, \\
 & \omega_1^2 = \frac{k_1}{m_1}, \quad \omega_2^2 = \frac{k_2}{m_2}, \quad 2h_1 = \frac{c_1}{m_1}, \quad 2h_2 = \frac{c_2}{m_2}, \quad F = \frac{f}{m_1},
 \end{aligned}$$

gdzie  $T$  jest okresem drgań uderzeniowych, a  $\varepsilon > 0$  — to wielkość wprowadzona dla zgodności warunków początkowych ruchu  $x_{10}$ ,  $x_{20}$ ,  $\dot{x}_{10}$  i  $\dot{x}_{20}$ . Po uwzględnieniu (2.2) w (2.1) równania ruchu będą miały postać

$$\begin{aligned}
 (2.3) \quad & \ddot{x}_1 + 2h_1 \dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = F \cos(pt + \psi) - \frac{S}{m_1} \delta_T(t - \varepsilon), \\
 & \ddot{x}_2 + 2h_2 \dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = \frac{S}{m_2} \delta_T(t - \varepsilon)
 \end{aligned}$$

z warunkami zderzenia

$$(2.4) \quad x_{1T} - x_{2T} - a = 0, \quad x_{iT} = x_i(T), \quad i=1, 2.$$

Rozwiązując równania ruchu za pomocą transformacji Laplace'a otrzymamy warunki okresowości ruchu oraz prawa ruchu mas w przedziałach czasu między zderzeniami  $0 + \varepsilon < t \leq T$ :

$$\begin{aligned}
 (2.5) \quad & x_{10} = x_{1T} = -\frac{S \sin \lambda_1 T}{2m_1 \lambda_1 (\operatorname{ch} h_1 T - \cos \lambda_1 T)} + B \cos \varphi, \\
 & \dot{x}_{10} = \dot{x}_{1T} = \frac{S}{2m_1} - \frac{S (\operatorname{sh} h_1 T - \frac{h_1}{\lambda_1} \sin \lambda_1 T)}{2m_1 (\operatorname{ch} h_1 T - \cos \lambda_1 T)} - pB \sin \varphi, \\
 & x_{20} = x_{2T} = \frac{S \sin \lambda_2 T}{2m_2 \lambda_2 (\operatorname{ch} h_2 T - \cos \lambda_2 T)}, \\
 & \dot{x}_{20} = \dot{x}_{2T} = -\frac{S}{2m_2} + \frac{S (\operatorname{sh} h_2 T - \frac{h_2}{\lambda_2} \sin \lambda_2 T)}{2m_2 (\operatorname{ch} h_2 T - \cos \lambda_2 T)}, \\
 & T = \frac{2\pi n}{p}, \quad n=1, 2, 3, \dots, \quad \lambda_i^2 = \omega_i^2 - h_i^2, \quad i=1, 2; \\
 & B = \frac{F}{\sqrt{(\omega_1^2 - p^2)^2 + 4h_1^2 p^2}}, \quad \varphi = \varphi_w + \psi, \quad \operatorname{tg} \varphi_w = \frac{-2h_1 p}{\omega_1^2 - p^2}, \\
 & x_1(t) = \frac{S e^{-h_1 t} [\sin \lambda_1(t-T) - e^{h_1 T} \sin \lambda_1 t]}{2m_1 \lambda_1 (\operatorname{ch} h_1 T - \cos \lambda_1 T)} + B \cos(pt + \varphi), \\
 & x_2(t) = \frac{-S e^{-h_2 t} [\sin \lambda_2(t-T) - e^{h_2 T} \sin \lambda_2 t]}{2m_2 (\operatorname{ch} h_2 T - \cos \lambda_2 T)},
 \end{aligned}$$

gdzie  $\psi$  oznacza opóźnienie fazowe spowodowane tłumieniem uderzeniowym.

Do pełnego rozwiązania zagadnienia ruchu układu brakuje nam dwóch wielkości: impulsu zderzeniowego  $S$  i opóźnienia fazowego  $\varphi$ . Znajdziemy je biorąc pod uwagę oznaczenia impulsu (2.2), warunek zderzenia (2.4) i warunki okresowości (2.5). Po obliczeniach ostatecznie uzyskamy

$$(2.6) \quad S = \frac{-2pB \sin \varphi}{\frac{1-R}{1+R} \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2} + \frac{\operatorname{sh} h_1 T - \frac{h_1}{\lambda_1} \sin \lambda_1 T}{m_1(\operatorname{ch} h_1 T - \cos \lambda_1 T)} + \frac{\operatorname{sh} h_2 T - \frac{h_2}{\lambda_2} \sin \lambda_2 T}{m_2(\operatorname{ch} h_2 T - \cos \lambda_2 T)}} ,$$

$$\frac{-S}{2} \left[ \frac{\sin \lambda_1 T}{\lambda_1 m_1(\operatorname{ch} h_1 T - \cos \lambda_1 T)} + \frac{\sin \lambda_2 T}{\lambda_2 m_2(\operatorname{ch} h_2 T - \cos \lambda_2 T)} \right] + B \cos \varphi - a = 0 .$$

Rozwiązując ostatnie równania określimy wielkości  $S$  i  $\varphi$ , co przy uwzględnieniu zależności (2.5) daje nam pełne rozwiązanie ruchu układu wibrouderzeniowego.

3. Mając na uwadze zmniejszenie amplitudy drgań układu głównego weźmy obecnie pod rozwagę prawo ruchu masy  $m_1$  i równania określające  $S$  i  $\varphi$ , sprowadzając je jednocześnie do postaci bezwymiarowej. Uwzględniając, że  $T=2\pi n/p$  i wprowadzając nowe oznaczenia

$$(3.1) \quad \frac{h_i}{\omega_i} = \xi_i \approx \frac{h_i}{\lambda_i}, \quad \frac{p}{\omega_i} = \delta_i \approx \frac{p}{\lambda_i}, \quad \xi_i \ll 1, \quad i=1, 2, \quad x_0 = \frac{f}{k_1},$$

$$\frac{a}{x_0} = D, \quad \bar{S} = \frac{S}{m_1 p x_0}, \quad \frac{m_2}{m_1} = \mu, \quad \tau = pt, \quad \frac{x_1(t)}{x_0} = X(\tau),$$

$$H = \frac{1}{\sqrt{(1-\delta_1^2)^2 + 4\xi_1^2 \delta_1^2}},$$

po przekształceniach uzyskamy

$$X(\tau) = \frac{\bar{S} \delta_1 e^{-\frac{\xi_1 \tau}{\delta_1}} \left[ \sin \frac{\tau - 2\pi n}{\delta_1} - e^{-\frac{2\pi n \xi_1}{\delta_1}} \sin \frac{\tau}{\delta_1} \right]}{2 \left[ \operatorname{ch} \frac{2\pi n \xi_1}{\delta_1} - \cos \frac{2\pi n}{\delta_1} \right]} + H \cos(\tau + \varphi),$$

$$0 + \varepsilon < \tau \leq 2\pi,$$

$$(3.2) \quad \bar{S} = \frac{-2H \sin \varphi}{\frac{1-R}{1+R} \left( 1 + \frac{1}{\mu} \right) + \frac{\operatorname{sh} \frac{2\pi n \xi_1}{\delta_1} - \xi_1 \sin \frac{2\pi n}{\delta_1}}{\operatorname{ch} \frac{2\pi n \xi_1}{\delta_1} - \cos \frac{2\pi n}{\delta_1}} + \frac{\operatorname{sh} \frac{2\pi n \xi_2}{\delta_2} - \xi_2 \sin \frac{2\pi n}{\delta_2}}{\mu \left( \operatorname{ch} \frac{2\pi n \xi_2}{\delta_2} - \cos \frac{2\pi n}{\delta_2} \right)}}$$

$$- \frac{1}{2} \bar{S} \left[ \frac{\delta_1 \sin \frac{2\pi n}{\delta_1}}{\operatorname{ch} \frac{2\pi n \xi_1}{\delta_1} - \cos \frac{2\pi n}{\delta_1}} + \frac{\delta_2 \sin \frac{2\pi n}{\delta_2}}{\mu \left( \operatorname{ch} \frac{2\pi n \xi_2}{\delta_2} - \cos \frac{2\pi n}{\delta_2} \right)} \right] + H \cos \varphi - D = 0 .$$

Zbadajmy obecnie, dla jakich wartości luzu  $D$  i amplitudy drgań wymuszonych  $H$  możliwe są w układzie drgania z uderzeniami. Aby okresowe zderzenia w układzie mogły zachodzić, impuls  $\bar{S}$  musi być rzeczywisty,  $\text{Im}(\bar{S})=0$ , oraz dodatni,  $\bar{S}>0$ . Celem zastosowania powyższych warunków przepiszmy dwa ostatnie równania w nowych oznaczeniach wynikających z (3.2):

$$(3.3) \quad \bar{S}Z = -H \sin \varphi, \quad \bar{S}N - D = -H \cos \varphi.$$

Eliminując z tych zależności przesunięcie fazowe  $\varphi$  mamy

$$(3.4) \quad \bar{S}_{1,2} = \frac{DN \pm \sqrt{H^2(N^2 + Z^2) + D^2 Z^2}}{N^2 + Z^2}.$$

Łatwo z powyższego zauważyć, że warunek rzeczywistego impulsu ma postać

$$(3.5) \quad -\sqrt{1 + \frac{N^2}{Z^2}} \leq \frac{D}{H} \leq \sqrt{1 + \frac{N^2}{Z^2}}.$$

Analizę drugiego warunku  $\bar{S}>0$  wygodnie jest rozdzielić na dwa następujące przypadki:

$$(3.6) \quad 1) ND > 0, \text{ tzn. } N > 0, D > 0 \text{ lub } N < 0, D < 0,$$

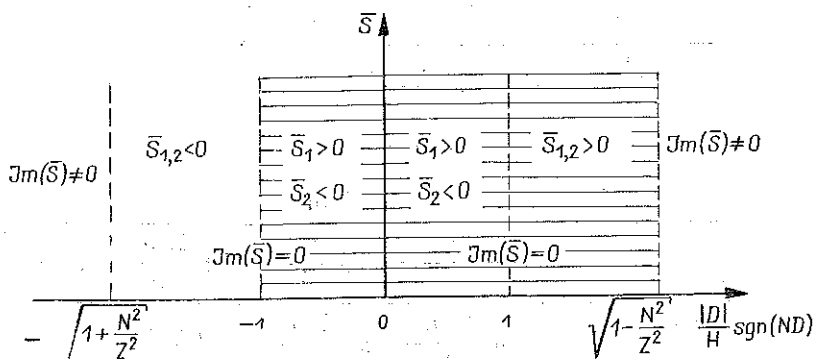
wtedy

$$\bar{S}_1 > 0; \text{ oraz } \bar{S}_2 > 0, \text{ gdy } |D|/H > 1;$$

$$2) ND < 0, \text{ tzn. } N > 0, D < 0 \text{ lub } N < 0, D > 0,$$

wtedy

$$\bar{S}_2 < 0; \text{ oraz } \bar{S}_1 > 0, \text{ gdy } |D|/H < 1.$$



Rys. 2

Wyniki powyższej analizy przedstawiono graficznie na rys. 2, gdzie obszar istnienia drgań uderzeniowych zakreskowano. Jak wynika z rysunku drgania z uderzeniami mogą istnieć jedynie w dwu zakresach:

$$(3.7) \quad 0 < \frac{|D|}{H} \operatorname{sgn}(ND) < \sqrt{1 + \frac{N^2}{Z^2}},$$

$$-1 < \frac{|D|}{H} \operatorname{sgn}(ND) < 0,$$

przy czym w części zakresu pierwszego możliwe są dwie dodatnie wartości impulsu  $\bar{S}$ . Jest oczywiste, że w ruchu realnym fizycznie wystąpi tylko  $\bar{S}_1$  lub  $\bar{S}_2$  w zależności od tego, która z tych wartości będzie stateczna.

W zastosowaniach drgań uderzeniowych dąży się na ogół do uzyskania maksymalnej wartości impulsu  $\bar{S}$ . Z równań (3.3) widać, że osiągniemy ją wówczas, gdy  $\varphi = -\pi/2$ . Ponieważ  $Z > 0$ , przeto mamy wtedy

$$(3.8) \quad \bar{S}_{\max} = \frac{H}{Z}$$

dla

$$\frac{D_{\text{opt}}}{H} = \frac{N}{Z} \quad \text{oraz} \quad \operatorname{sgn}(ND) = 1.$$

A więc układ wibrouderzeniowy osiągnie maksymalną efektywność tylko w pierwszym zakresie istnienia drgań uderzeniowych. Będzie ona największa dla  $R=1$  oraz jeśli w ciągu jednego okresu wymuszenia zajdzie w układzie jedno uderzenie, czyli dla  $n=1$ .

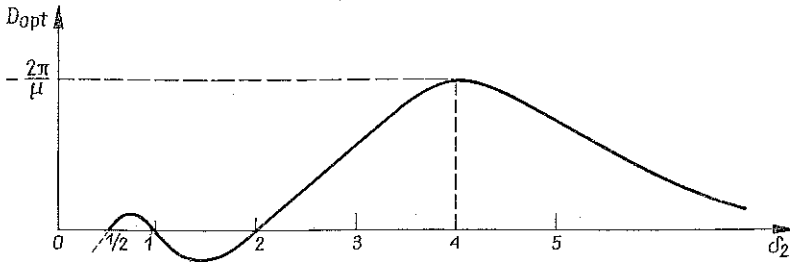
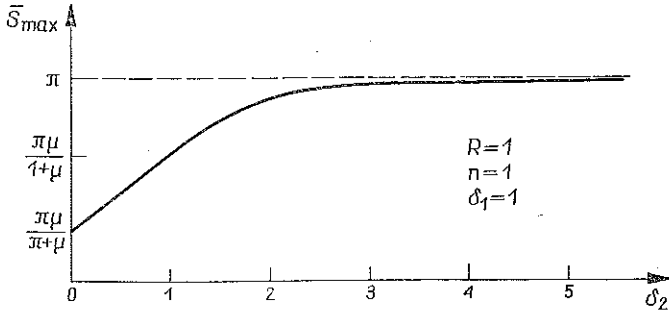
Potrzeba tłumienia drgań układu głównego zachodzi najczęściej, gdy znajduje się on w rezonansie, czyli gdy  $\delta_1 \approx 1$ . Przyjmując więc,  $\xi_i \ll 1$ ,  $n=1$ ,  $\delta_1=1$  oraz  $\xi_i \leq \mu < 1$ , obliczymy w sposób przybliżony wartości  $\bar{S}_{\max}$  i  $\bar{D}_{\text{opt}}$  dla kilku wartości bezwymiarowej częstości układu dodatkowego  $\delta_2 = \text{var}$ . Obliczając kolejno przy użyciu (3.8) mamy

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \delta_2 = 0, & \quad \bar{S}_{\max} \approx \frac{\pi\mu}{\pi + \mu}, & D_{\text{opt}} = 0; \\ \delta_2 = 1, & \quad \bar{S}_{\max} \approx \frac{\pi\mu}{1 + \mu}, & D_{\text{opt}} = 0; \\ \delta_2 = 2, & \quad \bar{S}_{\max} \approx \pi, & D = 0; \\ \delta_2 = 4, & \quad \bar{S}_{\max} \approx \pi, & D_{\text{opt}} \approx -\frac{2\pi}{\mu}; \\ \delta_2 = \infty, & \quad \bar{S}_{\max} \approx \pi, & D_{\text{opt}} \approx 0, \end{aligned}$$

przy czym ostatni przypadek odpowiada uderzeniu układu głównego w sztywną przegrodę,  $\mu = \infty$ .

Jakościowy charakter przebiegów wielkości  $\bar{S}_{\max}$  i  $\bar{D}_{\text{opt}}$  jako funkcji bezwymiarowej częstości  $\delta_2$  na podstawie wyników (3.9) przedstawiają rysunki 3 i 4. Jak wynika z (3.9) i odpowiednich wykresów maksymalna wartość impulsu w układzie zbliża się

do granicy  $\bar{S}_{\max} \approx \pi$  dla częstości układu dodatkowego  $\delta_2 \geq 2$ . Optymalny zaś luz w tym przypadku zawiera się w granicach  $(-2\pi/\mu) \leq D_{\text{opt}} \leq 0$ . Warto również w tym miejscu zwrócić uwagę na fakt, że dla  $R=1$  obydwie analizowane wielkości  $\bar{S}_{\max}$  i  $\bar{D}_{\text{opt}}$  nie zależą od amplitudy drgań układu głównego  $H$ , podczas gdy dla  $R < 1$  zależność ta jest wyraźna. Stąd też w zastosowaniach technicznych analizowanego układu należy dążyć, aby wartość współczynnika restytucji  $R$  była bliska jedności, przez co układ staje się «nieczuły» na przypadkowe zmiany amplitudy drgań  $H$ , jak również zapewniona jest maksymalna efektywność układu.



4. Wykazaliśmy już, jakie warunki muszą być spełnione, aby układ wibrouderzeniowy cechował się maksymalną efektywnością. Sprawdźmy wobec tego, z jaką amplitudą w tych warunkach będzie się poruszała masa układu głównego  $m_1$ . Przyjmując więc  $\delta_1=1$ ,  $n=1$  z zależności (3.2) mamy

$$(4.1) \quad X(\tau) = \frac{\bar{S} e^{-\xi_1 \tau} [1 - e^{2\pi \xi_1}] \sin \tau}{2 [\operatorname{ch} 2\pi \xi_1 - 1]} + H \cos(\tau + \varphi), \quad 0 + \varepsilon < \tau \leq 2\pi.$$

Jeśli dostroimy układ dodatkowy na jedną z częstości bezwymiarowych  $2 \leq \delta_2 < \infty$  tak, aby  $D = D_{\text{opt}}$  i  $\bar{S} = \bar{S}_{\max}$ , to uzyskamy  $\varphi \approx -\pi/2$  oraz  $\bar{S}_{\max} \approx \pi$ . Uwzględniając to w (4.1) będziemy mieli

$$(4.2) \quad X(\tau) = \left[ \frac{\pi}{2} e^{-\xi_1 \tau} \frac{(1 - e^{2\pi \xi_1})}{\operatorname{ch} 2\pi \xi_1 - 1} + H \right] \sin \tau, \quad 0 + \varepsilon < \tau \leq 2\pi.$$

Jak przyjęliśmy na wstępie, tłumienie w rozważanym układzie jest małe:  $\xi_i \ll 1$ ,  $i=1, 2$ , a  $H=1/2\xi_1$ . W związku z tym funkcję (4.2) możemy obliczyć w spo-

sób przybliżony rozkładając ją w szereg Taylora, skąd po przekształceniach uzyskamy

$$(4.3) \quad X(\tau) = \frac{\tau}{2} \sin \tau, \quad 0 + \varepsilon < \tau \leq 2\pi.$$

Otrzymane wyrażenie opisuje ruch masy  $m_1$  układu głównego w przedziale czasu między kolejnymi uderzeniami. Amplitudę tego ruchu można obliczyć następująco:

$$(4.4) \quad \text{Ampl } [X(\tau)] \equiv \text{Max}_\tau |X(\tau)| = \frac{3}{4} \pi.$$

Tak więc przy użyciu w układzie tłumika uderzeniowego o optymalnym dostrojeniu można zredukować amplitudę drgań masy głównej do wielkości jej podwójnego ugięcia statycznego  $x_0$ , ( $X(\tau) = x_1(t)/x_0$ ). Jest oczywiste, że stopień redukcji amplitudy drgań będzie tym większy, im mniejsze będzie tłumienie w układzie wibrouderzeniowym, gdyż  $H = 1/2\xi_1$ . Przy okazji warto nadmienić, że szacunkowe obliczenia przedstawione wyżej są nieco wyższe, gdyż wyniki dokładne, uzyskane dla podobnego przypadku, dają amplitudę drgań układu głównego rzędu ułamka ugięcia statycznego  $x_0$ .

5. Sumując powyższe rozważania można stwierdzić, że zbadany układ wibrouderzeniowy umożliwia istotne zmniejszenie amplitudy drgań układu głównego bez dodatkowego powiększania jego łącznej masy. Wyprowadzone wyżej związki i zależności mogą być pomocne przy projektowaniu tego typu tłumików drgań.

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. C. M. HARRIS, CH. E. CREDE, *Shock and vibration handbook*, vol. 1, chap. 6, Mc. Graw-Hill, 1961.
2. C. SEMPEL, *Równania ruchu układów z siłami uderzeniowymi*, Rozpr. Inżyn., 17, 4, 1969.

#### Резюме

#### УДАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДВУХ НЕСВЯЗАННЫХ СИСТЕМ

В работе рассмотрены ударные колебания двух систем связанных только при помощи односторонних ударных сил. Уравнения движения системы решены операторным методом Лапласа, при этом указаны свойства демпфирования колебаний виброударной системой, а также определены область существования колебаний и пределы оптимальной работы демпфера.

#### SUMMARY

#### THE PERCUSSIVE VIBRATION OF TWO INDEPENDENT SYSTEMS

In this work presented is the percussive vibration of two coupling systems by unilateral percussive forces. Using the method of Laplace transformation, the equation of movement is solved, proving that this system may be used as a percussive damper.

Also determined are the areas of vibrations with impacts and optimal range of work for the system under consideration.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 29 września 1970 r.