

## PEWNE METODY WYRÓWNYWANIA NAPRĘŻEŃ GŁÓWNYCH W PŁASKICH OŚRODKACH SPRĘŻYSTYCH

JAN HOLNICKI-SZULC (WARSZAWA)

### 1. WSTĘP

Celem pracy jest przedstawienie metody numerycznego rozwiązania układu równań różniczkowych, opisujących zagadnienie wyrównywania naprężeń głównych w płaskich ośrodkach sprężystych przez zmiany grubości oraz wprowadzenie pola sił masowych i pewnego układu obciążeń na brzegu ośrodka. Metoda ta może mieć zastosowanie m.in. przy optymalizacji elementów betonowych, sprężonych układem gęsto rozmieszczonych cięgien [2, 3 i 4].

Wprowadzając do elementu betonowego cięgna sprężające wywołujemy w nim pole sił masowych  $X$  i układ obciążeń na brzegu  $s$ . Odwracając zagadnienie, można poszukiwać takiego układu cięgien, które realizować będzie określone pole  $X$  i układ  $s$  [2 i 6]. W niniejszej pracy rozpatrzono pierwszy etap tego zadania, tzn. wyznaczenie pola sił masowych  $X$  i układu obciążeń na brzegu  $s$ . Zagadnienie wyboru odpowiedniego układu cięgien sprężających rozważono w pracy [6]. Określone siły masowe można także realizować przez wprowadzenie odpowiedniego pola temperatur lub sił Lorentza pochodzących od pola elektromagnetycznego.

Zagadnienie sformułowano jako płaskie, uogólnione zagadnienie teorii sprężystości, zakładając, że rozpatrywany ośrodek jest jednorodny i izotropowy. Opracowanie obejmuje sformułowanie zagadnienia, wyprowadzenie równań, metodę rozwiązania podstawowego równania różniczkowego, opisującego kąt pochylenia trajektorii naprężeń głównych, omówienie warunków brzegowych oraz przykład liczbowy.

### 2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA I WYPROWADZENIE RÓWNAŃ

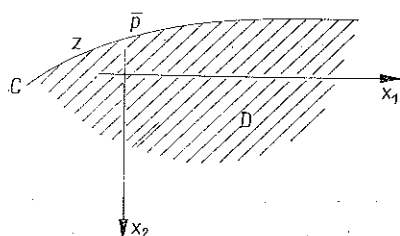
Przyjmujemy, że w płaszczyźnie symetrii rozpatrywanego ośrodka określono półprzestrzeń  $D$  ograniczoną łukiem krzywej regularnej  $C$  (rys. 1).

Na brzegu  $C$  dane są obciążenia brzegowe  $p(x_1, x_2) = [p_1(x_1, x_2), p_2(x_1, x_2)]$  oraz grubość ośrodka  $z(x_1, x_2)$ . Wielkość  $|p|$  należy rozumieć jako wartość obciążenia odniesioną do jednostkowej grubości brzegu ośrodka.

Celem pracy jest określenie grubości ośrodka  $z(x_1, x_2)$  oraz pola sił masowych  $X_1(x_1, x_2)$ ,  $X_2(x_1, x_2)$  tak, aby naprężenia główne w każdym punkcie obszaru  $D$  zostały wyrównane do wartości  $\bar{\sigma}$  i  $\underline{\sigma}$ .

Założono, że wielkości dane na brzegu  $C$ :  $p_1(x_1, x_2)$ ,  $p_2(x_1, x_2)$ ,  $z(x_1, x_2)$  są klasy  $C^\infty$  oraz że brzeg  $C$  jest łukiem otwartym w sensie geometrii różniczkowej. Można zakładać spełnienie powyższych warunków na brzegu jedynie przedziałami. Wtedy otrzymujemy rozwiązanie przez złożenie rozwiązań otrzymanych dla poszczególnych odcinków brzegu.

Z żądania wyrównania w każdym punkcie obszaru  $D$  wartości naprężeń głównych wynika, że



(2.1)

$$\sigma_{11} = \frac{\bar{\sigma} + \sigma}{2} + \frac{\bar{\sigma} - \sigma}{2} \cos 2\alpha,$$

$$\sigma_{22} = \frac{\bar{\sigma} + \sigma}{2} - \frac{\bar{\sigma} - \sigma}{2} \cos 2\alpha,$$

$$\sigma_{12} = \frac{\bar{\sigma} - \sigma}{2} \sin 2\alpha,$$

Rys. 1

gdzie  $\alpha$  określa kąt zawarty pomiędzy kierunkiem głównym przyporządkowanym wartości głównej  $\bar{\sigma}$  a osią  $x_1$ .

Poza tym w każdym punkcie obszaru  $D$  muszą być spełnione warunki równowagi

$$(2.2) \quad (\sigma_{11} z)_{,1} + (\sigma_{12} z)_{,2} + X_1 = 0$$

$$(\sigma_{21} z)_{,1} + (\sigma_{22} z)_{,2} + \gamma z + X_2 = 0$$

(gdzie  $\gamma$  oznacza stałą siłę masową odniesioną do jednostkowej grubości ośrodka,  $X_1$  i  $X_2$  poszukiwane siły masowe, odniesione do całej grubości ośrodka  $z$ ) oraz warunek ciągłości odkształceń

$$(2.3) \quad \varepsilon_{22,11} + \varepsilon_{11,22} = \varepsilon_{12,12}.$$

W ośrodkach, w których związki konstytutywne określają wspólne kierunki główne dla tensorów  $\sigma_{ij}$  i  $\varepsilon_{ij}$  (związki konstytutywne wyrażone są przez funkcje tensorowe izotropowe, np. prawo Hooke'a w klasycznej teorii sprężystości), wyrównanie w obszarze  $D$  naprężeń głównych pociąga za sobą wyrównanie w tym obszarze odkształceń głównych do wartości  $\bar{\varepsilon}$  i  $\underline{\varepsilon}$ .

Zatem spełnione są zależności

$$\varepsilon_{11} = \frac{\bar{\varepsilon} + \underline{\varepsilon}}{2} + \frac{\bar{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}}{2} \cos 2\alpha,$$

$$(2.4) \quad \varepsilon_{22} = \frac{\bar{\varepsilon} + \underline{\varepsilon}}{2} - \frac{\bar{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}}{2} \cos 2\alpha,$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\bar{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}}{2} \sin 2\alpha.$$

Wstawiając funkcje (2.1) do (2.2) oraz (2.4) do (2.3) otrzymano następujący układ równań do wyznaczenia poszukiwanych wielkości:

a) jeżeli  $\bar{\sigma} \neq \underline{\sigma}$ , to

$$\begin{aligned}
 (2.5) \quad & z(\alpha_{,2} \cos 2\alpha - \alpha_{,1} \sin 2\alpha) + \frac{1}{2} z_{,1} \left( \frac{\bar{\sigma} + \sigma}{\bar{\sigma} - \sigma} + \cos 2\alpha \right) + \\
 & + \frac{1}{2} z_{,2} \sin 2\alpha + \frac{X_1}{\bar{\sigma} - \sigma} = 0, \\
 & z(\alpha_{,1} \cos 2\alpha + \alpha_{,2} \sin 2\alpha) + \frac{1}{2} z_{,2} \left( \frac{\bar{\sigma} + \sigma}{\bar{\sigma} - \sigma} - \cos 2\alpha \right) + \\
 & + \frac{1}{2} z_{,1} \sin 2\alpha + \frac{X_2 + \gamma z}{\bar{\sigma} - \sigma} = 0, \\
 & (\cos 2\alpha)_{,11} - (\cos 2\alpha)_{,22} = -2(\sin 2\alpha)_{,12};
 \end{aligned}$$

b) jeżeli  $\bar{\sigma} = \underline{\sigma} = \bar{\sigma}$ , to

$$\begin{aligned}
 (2.6) \quad & \bar{\sigma} z_{,1} + X_1 = 0, \\
 & \bar{\sigma} z_{,2} + \gamma z + X_2 = 0.
 \end{aligned}$$

Trzecie równanie spełnione jest tożsamościowo.

W ogólnym przypadku (a) występują trzy równania różniczkowe z czterema funkcjami niewiadomymi:  $z(x_1, x_2)$ ,  $\alpha(x_1, x_2)$ ,  $X_1(x_1, x_2)$ ,  $X_2(x_1, x_2)$ . W szczególnym przypadku (b) zagadnienie sprowadza się do układu dwu równań z trzema funkcjami niewiadomymi:  $z(x_1, x_2)$ ,  $X_1(x_1, x_2)$ ,  $X_2(x_1, x_2)$ .

W dalszej części pracy przedyskutowano warunki rozwiązywalności zagadnienia oraz opracowano efektywne metody rozwiązania wyprowadzonych układów równań.

W przypadku (a) kolejność rozwiązywania zagadnienia jest następująca: 1) wyznaczenie funkcji  $\alpha$  z równania (2.5)<sub>3</sub>, 2) rozwiązanie układu równań (2.5)<sub>1,2</sub> z dodatkowym warunkiem  $F(z, X_1, X_2) = 0$ .

W przypadku (b) rozwiązanie zagadnienia sprowadza się do rozwiązania układu równań (2.6) z dodatkowym warunkiem  $F(z, X_1, X_2) = 0$ .

### 3. METODA ROZWIĄZANIA RÓWNIANIA RÓŻNICZKOWEGO

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \cos 2\alpha = -2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \sin 2\alpha.$$

Po wykonaniu różniczkowań równanie (2.5)<sub>3</sub> przybiera następującą postać:

$$\begin{aligned}
 (3.1) \quad & \alpha_{,11} (-2 \sin 2\alpha) + \alpha_{,22} (2 \sin 2\alpha) + \alpha_{,12} (4 \cos 2\alpha) + \\
 & + (\alpha_{,1})^2 (-4 \cos 2\alpha) + (\alpha_{,2})^2 (4 \cos 2\alpha) - \alpha_{,1} \alpha_{,2} (8 \sin 2\alpha) = 0.
 \end{aligned}$$

Jest to równanie różniczkowe quasi-liniowe. Wyróżnik równania ma wartość

$$\delta = -4 \sin^2 2\alpha - 4 \cos^2 2\alpha = -4 < 0.$$

Zatem równanie (3.1) jest typu hiperbolicznego w całym obszarze  $D$ . Zgodnie z twierdzeniami o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań równań różniczkowych hiperbolicznych [1 i 5] ma ono rozwiązanie w przypadku zagadnienia brzegowego Cauchy'ego, charakterystycznego oraz mieszanego zagadnienia brzegowego.

Rozwiązując równanie (3.1) zastosujemy metodę charakterystyk [1 i 5].

Jeśli wzdłuż pewnej linii  $L$  o równaniach  $x_1=f_1(s)$ ,  $x_2=f_2(s)$  w płaszczyźnie  $x_1, x_2$  znane są funkcje  $\alpha$ ,  $\alpha_{,1}$ ,  $\alpha_{,2}$  (inaczej  $\alpha$ ,  $\alpha_{,n}$ ), to zbadamy, czy w jej otoczeniu można wyznaczyć  $\alpha_{,11}$ ,  $\alpha_{,22}$ ,  $\alpha_{,12}$ .

W tym celu zróżniczkowano wzdłuż linii  $L$  dane na niej funkcje  $\alpha_{,1}$ ,  $\alpha_{,2}$ :

$$(3.2) \quad \begin{aligned} (\alpha_{,1})_{,s} &= \alpha_{,11} f_{1,s} + \alpha_{,12} f_{2,s}, \\ (\alpha_{,2})_{,s} &= \alpha_{,21} f_{1,s} + \alpha_{,22} f_{2,s}. \end{aligned}$$

Otrzymano w ten sposób układ trzech równań (3.1) i (3.2) z trzema niewiadomymi  $\alpha_{,11}$ ,  $\alpha_{,22}$ ,  $\alpha_{,12} = \alpha_{,21}$ , który można napisać w postaci macierzowej

$$[A] \begin{bmatrix} \alpha_{,11} \\ \alpha_{,22} \\ \alpha_{,12} \end{bmatrix} = [B].$$

W równaniu tym

$$(3.3) \quad [A] = \begin{bmatrix} -2 \sin 2\alpha & 2 \sin 2\alpha & 4 \cos 2\alpha \\ f_{1,s} & 0 & f_{2,s} \\ 0 & f_{2,s} & f_{1,s} \end{bmatrix},$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 4 \cos 2\alpha (\alpha_{,1})^2 - 4 \cos 2\alpha (\alpha_{,2})^2 + 8 \sin 2\alpha \alpha_{,1} \alpha_{,2} \\ (\alpha_{,1})_{,s} \\ (\alpha_{,2})_{,s} \end{bmatrix}.$$

Rozważyć należy dwa przypadki: a)  $\Delta \neq 0$  w każdym punkcie krzywej  $L$ ; b)  $\Delta = 0$  i  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$  w każdym punkcie krzywej  $L$ . Symbol  $\Delta$  oznacza tu wyznacznik główny układu równań (3.3) oraz  $\Delta_i$  wyznaczniki podstawione. Znikanie jednego wyznacznika  $\Delta_i$  pociąga za sobą znikanie wszystkich  $\Delta_i$ .

W przypadku a) wzory Cramera dają jednoznaczne rozwiązanie układu (3.3). Zatem pochodne  $\alpha_{,11}$ ,  $\alpha_{,22}$ ,  $\alpha_{,12}$  są wyznaczone w otoczeniu  $L$  jednoznacznie.

W przypadku b) nie mamy jednoznacznego rozwiązania  $\alpha_{,11}$ ,  $\alpha_{,22}$ ,  $\alpha_{,12}$  w otoczeniu  $L$ . Krzywą  $L$  o tej własności nazywamy charakterystyką. W opracowanej metodzie rozwiązania wykorzystano właśnie przypadek b).

Wypisując warunek  $\Delta = 0$ , otrzymano

$$(3.4) \quad 2 \sin 2\alpha f_{2,s}^2 - 2 \sin 2\alpha f_{1,s}^2 + 4 \cos 2\alpha f_{1,s} f_{2,s} = 0;$$

stąd

$$\sin 2\alpha \left( \frac{dx_2}{dx_1} \right)^2 + 2 \cos 2\alpha \frac{dx_2}{dx_1} - \sin 2\alpha = 0.$$

Z powyższego równania kwadratowego otrzymano następujące rozwiązania: jeśli  $\alpha \neq n\pi/2$ , to

$$m_1 = \left( \frac{dx_2}{dx_1} \right)_1 = \frac{-\cos 2\alpha + 1}{\sin 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha,$$

$$m_2 = \left( \frac{dx_2}{dx_1} \right)_2 = \frac{-\cos 2\alpha - 1}{\sin 2\alpha} = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

W równaniach tych  $m_1$  i  $m_2$  określają współczynnik kierunkowy stycznej do  $L$  w danym punkcie.

Jeśli  $\alpha = n\pi/2$ , to

$$4 \cos 2\alpha f_{1,s} f_{2,s} = 0,$$

stąd

$$f_{1,s} = 0 \quad \text{lub} \quad f_{2,s} = 0;$$

jeżeli zatem współczynniki kierunkowe stycznej do krzywej  $L$  w każdym jej punkcie przyjmują wartości: w przypadku  $\alpha \neq n\pi/2$

$$(3.5) \quad m_1 = \operatorname{tg} \alpha \quad \text{lub} \quad m_2 = -\operatorname{ctg} \alpha;$$

w przypadku  $\alpha = n\pi/2$  (tj. gdy styczna jest pozioma lub pionowa)

$$m_1 = \pm\infty, \quad m_2 = 0 \quad \text{albo} \quad m_1 = 0, \quad m_2 = \pm\infty,$$

to krzywa  $L$  jest charakterystyką.

Zatem siatka charakterystyk składa się z dwu rodzin określonych równaniami:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \operatorname{tg} \alpha, \quad \frac{dx_2}{dx_1} = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

Są to dwie rodziny krzywych wzajemnie ortogonalnych, gdyż każde  $\alpha$  spełnia warunek  $m_1 m_2 = -1$ .

Wzdłuż każdej z charakterystyk spełniony musi być warunek zgodności  $\Delta_1 = 0$ .

Wypiszemy np. warunek  $\Delta_1 = 0$ :

$$\begin{vmatrix} 4 \cos 2\alpha (\alpha_{,1})^2 - 4 \cos 2\alpha (\alpha_{,2})^2 + 8 \sin 2\alpha \alpha_{,1} \alpha_{,2} & 2 \sin 2\alpha & 4 \cos 2\alpha \\ (\alpha_{,1})_s & 0 & f_{2,s} \\ (\alpha_{,2})_s & f_{2,s} & f_{1,s} \end{vmatrix} = 0.$$

Stąd otrzymano równanie

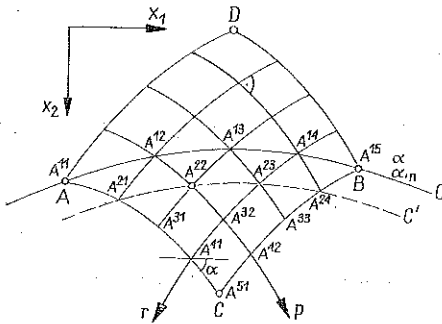
$$(3.6) \quad 4 \cos 2\alpha (\alpha_{,1})^2 f_{2,s}^2 - 4 \cos 2\alpha (\alpha_{,2})^2 f_{2,s}^2 + 8 \sin 2\alpha \alpha_{,1} \alpha_{,2} f_{2,s}^2 + \\ + 2 (\alpha_{,1})_s (\sin 2\alpha f_{1,s} + 2 \cos 2\alpha f_{2,s}) - 2 \sin 2\alpha (\alpha_{,2})_s f_{2,s} = 0.$$

Na powyższych rozważaniach oparto numeryczną metodę rozwiązania równania (3.1). Przyjmujemy zatem, że na łuku  $AB$  brzegu  $C$  nie mającym w żadnym punkcie kierunku charakterystycznego dane są funkcje  $\alpha, \alpha_{,n}$ . Wtedy wiemy na podstawie

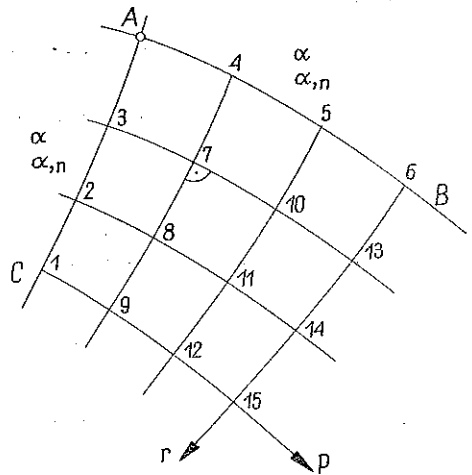
twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego, że w czworokącie  $ABCD$  istnieje jednoznaczne rozwiązanie równania (rys. 2).

Poszukujemy go w sposób następujący: 1) Określamy na łuku  $AB$   $m$  punktów rozmieszczonych w równych odległościach (miary łukowej). Znajomość  $\alpha$  w każdym z punktów pozwala wyznaczyć z zależności (3.5) dwa kierunki charakterystyczne (rys. 2)  $r$  i  $p$ . 2) Biorąc pod uwagę dwa sąsiednie punkty  $A^{1,m}$  i  $A^{1,m+1}$  oraz wychodzące z nich charakterystyki różnych rodzin ( $r$  i  $p$ ), otrzymamy w przecięciu punkt  $A^{2,m}$  (aproxymacja  $r$  i  $p$  prostymi). W punkcie  $A^{2,m}$  dysponujemy dwoma związkami zgodności (3.6) (wzdłuż obu charakterystyk wychodzących z punktów  $A^{1,m}$  i  $A^{1,m+1}$ ). W ten sposób dysponujemy dwoma równaniami, z których wyznaczamy  $\alpha_{,1}$  i  $\alpha_{,2}$  w punkcie  $A^{2,m}$ . 3) Wyliczając pochodne kierunkowe  $\alpha_{,r}$  w punkcie  $A^{1,m}$  i  $\alpha_{,p}$  w punkcie  $A^{1,m+1}$  oraz aproxymując je liniowo, można określić  $\alpha$  w punkcie  $A^{2,m}$ .

W ten sposób przenosimy warunki brzegowe  $\alpha, \alpha_{,n}$  na brzeg  $C'$  (wyznaczony przez punkty  $A^{2,m}$ ). Postępując w ten sposób  $m$  razy, wyznaczymy w trójkącie  $ABC$  punkty  $A^{n,m}$ , w których będziemy znali wartości  $\alpha$ . Oczywiście dokładność rozwiązania uwarunkowana jest gęstością wprowadzonego podziału łuku  $AB$ .



Rys. 2



Rys. 3

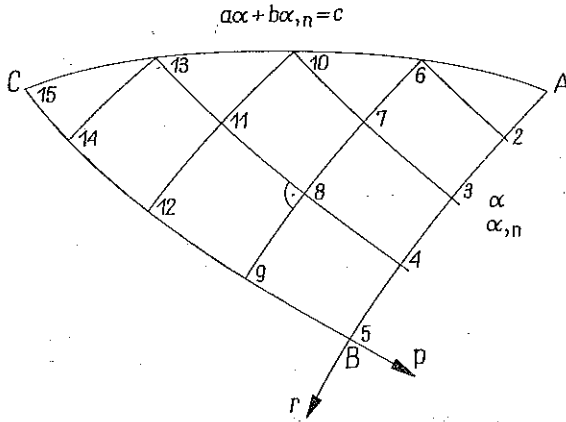
Powyżej omówiono metodę rozwiązania zagadnienia brzegowego Cauchy'ego. W przypadku zagadnienia charakterystycznego (rys. 3) i mieszanego (rys. 4) sposób postępowania jest analogiczny. Różnice występują jedynie w kolejności określania punktów  $A^{n,m}$  (na rys. 3 i 4 numery określają tę kolejność). W przypadku zagadnienia mieszanego występują pewne różnice w określeniu rozwiązania w otoczeniu brzegu  $AC$ .

W przypadku zagadnienia mieszanego rozwiązanie w punktach 6, 10, 13, 15, ... wyznaczone jest w sposób odmienny od opisanego powyżej. Tak np. rozwiązanie w punkcie 6 znajdujemy rozwiązując układ trzech równań:

$$(3.7) \quad \alpha\alpha^6 + b_1\alpha^6_{,1} + b_2\alpha^6_{,2} = c^6, \quad d_1\alpha^6_{,1} + d_2\alpha^6_{,2} = \alpha^2_{,n}$$

oraz równanie (3.6) wzdłuż charakterystyki  $p$  z trzema funkcjami niewiadomymi  $\alpha^6$ ,  $\alpha^6_{,1}$  i  $\alpha^6_{,2}$ , gdzie  $a, b_1, b_2, d_1$  i  $d_2$  są liczbami rzeczywistymi.

Po wyznaczeniu funkcji  $\alpha(x_1, x_2)$  zagadnienie sprowadza się do rozwiązania układu dwu równań różniczkowych cząstkowych (2.5)<sub>1,2</sub> ze współczynnikami funkcyjnymi zmiennych niezależnych na  $z, X_1, X_2$ .



Rys. 4

Tak postawione zagadnienie jest niejednoznaczne. Należy jeszcze postawić dodatkowy warunek

$$(3.8) \quad F(z, X_1, X_2) = 0.$$

Warunek ten może przybierać następujące postacie:  $z = \text{const}$ ; objętość elementu przyjmuje minimum  $m$ ;  $aX_1 + bX_2 = 0$ , gdzie  $a, b$  są to liczby rzeczywiste; siły masowe mają stały kierunek.

Postać warunku (3.8) może wynikać z określenia sposobu realizacji pola sił masowych.

#### 4. OKREŚLENIE WARUNKÓW BRZEGOWYCH ZAGADNIENIA

Zajmiemy się wyznaczeniem  $\alpha$  na brzegu w przypadku  $\bar{\sigma} \neq \underline{\sigma}$ .

Warunki równowagi na brzegu  $C$  przybierają postać

$$(4.1) \quad q_1 = l\sigma_{11} + m\sigma_{12}, \quad q_2 = l\sigma_{21} + m\sigma_{22},$$

gdzie  $\mathbf{q} = \mathbf{p} + \mathbf{s}$ ;  $\mathbf{s}$  oznacza dodatkowe obciążenie brzegu. W równaniach tych  $\mathbf{q} = [q_1, q_2]$  oznacza wektor obciążenia, działającego na brzeg  $C$ , odniesiony do grubości jednostkowej ośrodka:

$$l = \cos(n, x_1), \quad m = \cos(n, x_2)$$

oraz  $\bar{n}$  wektor normalny, zewnętrzny w danym punkcie brzegu (rys. 5).

Z żądania wyrównania naprężeń głównych na brzegu  $C$  wynika, że w każdym punkcie brzegu musi istnieć  $\alpha \in [0, \pi)$  spełniająca równanie (2.1).

Z układów równań (2.1) i (4.1) otrzymujemy

$$(4.2) \quad \begin{aligned} q_1 &= l \left( \frac{\bar{\sigma} + \sigma}{2} + \frac{\bar{\sigma} - \sigma}{2} \cos 2\alpha \right) + m \frac{\bar{\sigma} - \sigma}{2} \sin 2\alpha, \\ q_2 &= m \left( \frac{\bar{\sigma} + \sigma}{2} - \frac{\bar{\sigma} - \sigma}{2} \cos 2\alpha \right) + l \frac{\bar{\sigma} - \sigma}{2} \sin 2\alpha. \end{aligned}$$

Oznacza to, że w każdym punkcie brzegu  $C$  układ równań (4.2) musi posiadać rozwiązanie  $\alpha \in [0, \pi)$ .

Układ równań (4.2) można przedstawić w postaci

$$(4.3) \quad \begin{aligned} l \frac{\bar{\sigma} - \sigma}{2} \cos 2\alpha + m \frac{\bar{\sigma} - \sigma}{2} \sin 2\alpha &= q_1 - l \frac{\bar{\sigma} + \sigma}{2}, \\ -m \frac{\bar{\sigma} - \sigma}{2} \cos 2\alpha + l \frac{\bar{\sigma} - \sigma}{2} \sin 2\alpha &= q_2 - m \frac{\bar{\sigma} + \sigma}{2}. \end{aligned}$$

Wyznacznik główny tego układu równań

$$\Delta = (l^2 + m^2) \left( \frac{\bar{\sigma} - \sigma}{2} \right)^2 = \left( \frac{\bar{\sigma} - \sigma}{2} \right)^2 > 0.$$

Zatem układ równań (4.3) ma jednoznaczne rozwiązanie względem  $\sin 2\alpha$ ,  $\cos 2\alpha$ :

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \cos 2\alpha &= \frac{2(q_1 l - q_2 m) + (\bar{\sigma} + \sigma)(m^2 - l^2)}{\bar{\sigma} - \sigma}, \\ \sin 2\alpha &= \frac{2(q_2 l + q_1 m) - 2ml(\bar{\sigma} + \sigma)}{\bar{\sigma} - \sigma}. \end{aligned}$$

Wyznaczone funkcje  $\sin 2\alpha$  i  $\cos 2\alpha$  muszą być funkcjami tego samego kąta. Oznacza to, że wielkości  $\sin 2\alpha$  i  $\cos 2\alpha$  określone wzorami (4.4) muszą spełniać warunek

$$\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1.$$

Podstawiając do tego warunku funkcje (4.4), otrzymujemy zależność

$$[2(q_1 l - q_2 m) + (\bar{\sigma} + \sigma)(m^2 - l^2)]^2 + [2(q_2 l + q_1 m) - 2ml(\bar{\sigma} + \sigma)]^2 = (\bar{\sigma} - \sigma)^2,$$

z której znajdujemy

$$(4.5) \quad \left( q_1 - \frac{\bar{\sigma} + \sigma}{2} l \right)^2 + \left( q_2 - \frac{\bar{\sigma} - \sigma}{2} m \right)^2 = \left( \frac{\bar{\sigma} - \sigma}{2} \right)^2.$$

Warunkiem koniecznym i dostatecznym wyrównania naprężeń głównych na brzegu  $C$  jest spełnienie przez wartości brzegowe  $q_1$  i  $q_2$  zależności (4.5).

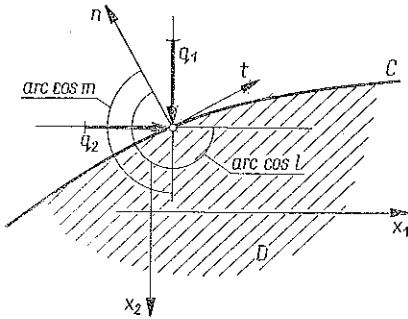
Równanie (4.5) opisuje na płaszczyźnie  $x_1 x_2$  okrąg  $K$  (rys. 6). Zatem, jeżeli w każdym punkcie brzegu  $C$  współrzędne naprężenia brzegowego opisywać będą



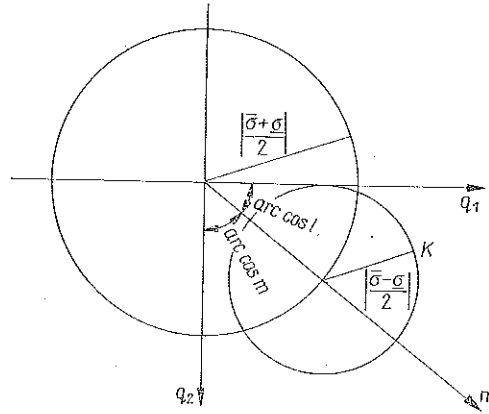
punkt  $(q_1, q_2) \in K$ , to w każdym z tych punktów wzory (4.4) określają jednoznacznie wartość  $\alpha \in [0, \pi)$ .

Z kolei zajmijmy się rozwiązaniem przypadku, gdy  $\bar{\sigma} = \underline{\sigma} = \bar{\sigma}$ .

Warunek (4.2) wyrównania naprężeń głównych na brzegu  $C$  przyjmie w tym przypadku postać:  $q_1 = l\bar{\sigma}$ ,  $q_2 = m\bar{\sigma}$ . Oznacza to, że brzeg  $C$  musi być poddany hydrostatycznemu ścisnaniu (gdy  $\bar{\sigma} < 0$ ), równomiernemu rozciąganiu (gdy  $\bar{\sigma} > 0$ ) lub być nieobciążony (gdy  $\bar{\sigma} = 0$ ).



Rys. 5



Rys. 6

Widać z równań (2.6), że przyjmując w obszarze  $D$   $z(x_1, x_2) = \text{const}$  (o ile na brzegu  $C$   $z = \text{const}$ ),  $X_1(x_1, x_2) = 0$  i  $X_2(x_1, x_2) = -\gamma z$ , spełnimy układ równań. Zatem można w tym przypadku wyrównać naprężenia główne w obszarze  $D$  do wartości  $\bar{\sigma}$  przyjmując

$$z(x_1, x_2) = z = \text{const}, \quad X_1(x_1, x_2) = 0, \quad X_2(x_1, x_2) = -\gamma z.$$

Wyznaczenie  $\alpha_n$  na brzegu  $C$ . Wypisując na brzegu  $C$  układ równań (2.5)<sub>1,2</sub> oraz dopisując dwa równania dodatkowe, wyrażające  $z_t$  i  $\alpha_t$  ( $z$  i  $\alpha$  są wzdłuż brzegu  $C$  znane), otrzymujemy układ czterech równań algebraicznych z sześcioma niewiadomymi  $\alpha_{,1}, \alpha_{,2}, z_{,1}, z_{,2}, X_{,1}$  i  $X_{,2}$ :

(4.6)

$$\begin{bmatrix} -z \sin 2\alpha & z \cos 2\alpha & \frac{1}{2} \left( \frac{\bar{\sigma} + \underline{\sigma}}{\bar{\sigma} - \underline{\sigma}} + \cos 2\alpha \right) & \frac{1}{2} \sin 2\alpha & \frac{1}{\bar{\sigma} - \underline{\sigma}} & 0 \\ z \cos 2\alpha & z \sin 2\alpha & \frac{1}{2} \sin 2\alpha & \frac{1}{2} \left( \frac{\bar{\sigma} + \underline{\sigma}}{\bar{\sigma} - \underline{\sigma}} - \cos 2\alpha \right) & 0 & \frac{1}{\bar{\sigma} - \underline{\sigma}} \\ f_{1,t} & f_{2,t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_{1,t} & f_{2,t} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{,1} \\ \alpha_{,2} \\ z_{,1} \\ z_{,2} \\ X_{,1} \\ X_{,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\gamma z \\ \alpha_{,t} \\ z_{,t} \end{bmatrix}$$

Przyjęto, że brzeg  $C$  określony jest przez równania  $x_1 = f_1(t)$ ,  $x_2 = f_2(t)$ .

Określając warunek (3.8) dysponujemy dodatkowym równaniem. I tak np. w przypadku  $z = \text{const}$  układ równań (4.6) redukuje się do układu trzech równań z czterema niewiadomymi  $\alpha_{,1}$ ,  $\alpha_{,2}$ ,  $X_1$  i  $X_2$ . Jest to układ równań liniowo niezależnych o wyznaczniku głównym różnym od zera. Zatem rozwiązanie jego jest wieloznaczne. Dowolność wyznaczenia na brzegu poszukiwanych wielkości może być wykorzystana przez modulowanie pewnej funkcji  $G(\alpha_{,1}, \alpha_{,2}, z_{,1}, z_{,2}, X_1, X_2)$  do znalezienia takiego rozwiązania zagadnienia, które spełnia pewne z góry dane warunki na drugim brzegu  $C^1$ .

Tak np. przyjmując  $G(X_1, X_2) = aX_1 + bX_2 = f(t)$ , gdzie  $a, b$  są to dane liczby rzeczywiste,  $f(t)$  jest obraną funkcją rzeczywistą na brzegu  $C$ , dysponujemy do wyznaczenia wielkości brzegowych układem równań

$$(4.7) \quad \begin{bmatrix} -z \sin 2\alpha & z \cos 2\alpha & \frac{1}{\bar{\sigma} - \underline{\sigma}} & 0 \\ -z \cos 2\alpha & z \sin 2\alpha & 0 & \frac{1}{\bar{\sigma} - \underline{\sigma}} \\ f_{1,t} & f_{2,t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{,1} \\ \alpha_{,2} \\ X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-\gamma z}{\bar{\sigma} - \underline{\sigma}} \\ \alpha_{,t} \\ f(t) \end{bmatrix},$$

$$\Delta = z[-a(f_{2,t} \sin 2\alpha + f_{1,t} \cos 2\alpha) + b(f_{2,t} \cos 2\alpha - f_{1,t} \sin 2\alpha)] / (\bar{\sigma} - \underline{\sigma}).$$

Jeżeli  $\Delta \neq 0$ , to układ (4.7) posiada jednoznaczne rozwiązanie

$$\alpha_{,1} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \alpha_{,2} = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad X_1 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad X_2 = \frac{\Delta_4}{\Delta}.$$

W równaniach tych

$$(4.8) \quad \Delta_1 = \frac{za}{\bar{\sigma} - \underline{\sigma}} \cos 2\alpha \alpha_{,t} - \frac{zb}{\bar{\sigma} - \underline{\sigma}} \left( \frac{\gamma f_{2,t}}{\bar{\sigma} - \underline{\sigma}} + \alpha_{,t} \sin 2\alpha \right) - \frac{f(t)f_{1,t}}{(\bar{\sigma} - \underline{\sigma})^2},$$

$$(4.9) \quad \Delta_2 = \frac{za}{\bar{\sigma} - \underline{\sigma}} \sin 2\alpha \alpha_{,t} + \frac{zb}{\bar{\sigma} - \underline{\sigma}} \left( \alpha_{,t} \cos 2\alpha + \frac{f_{1,t}\gamma}{\bar{\sigma} - \underline{\sigma}} \right) + \frac{f(t)f_{1,t}}{(\bar{\sigma} - \underline{\sigma})^2},$$

$$(4.10) \quad \Delta_3 = -z^2 b \left[ \frac{\gamma}{\bar{\sigma} - \underline{\sigma}} (f_{2,t} \sin 2\alpha + f_{1,t} \cos 2\alpha) + \alpha_{,t} \right] - \frac{f(t)z}{\bar{\sigma} - \underline{\sigma}} (f_{2,t} \sin 2\alpha + f_{1,t} \cos 2\alpha),$$

$$(4.11) \quad \Delta_4 = -z^2 a \left[ \frac{\gamma}{\bar{\sigma} - \underline{\sigma}} (f_{2,t} \sin 2\alpha + f_{1,t} \cos 2\alpha) + \alpha_{,t} \right] + \frac{f(t)}{\bar{\sigma} - \underline{\sigma}} z (f_{2,t} \cos 2\alpha - f_{1,t} \sin 2\alpha).$$

Znając wzdłuż brzegu  $C$   $\alpha_{,1}$  i  $\alpha_{,2}$  znamy także wzdłuż  $C$

$$(4.12) \quad \alpha_{,n} = l\alpha_{,1} + m\alpha_{,2}.$$

Jeżeli na brzegu  $C$  są sformułowane warunki naprężeniowe i dana jest grubość  $z$ , to przyjmując pewną funkcję  $G=f(t)$ , można wyznaczyć wzdłuż  $C$  funkcje  $\alpha$ ,  $\alpha_{,1}$  i  $\alpha_{,2}$ .

Zatem można wyznaczyć rozwiązanie równania (3.1) w obszarze  $D$ . Zadanie sprowadza się do rozwiązania układu trzech równań (2.5)<sub>1,2</sub>, (3.8) z trzema niewiadomymi  $z$ ,  $X_1$  i  $X_2$ . I tak np. przyjmując warunek (3.8) w postaci  $z = \text{const}$ , równania (2.5)<sub>1,2</sub> dają rozwiązanie w postaci

$$(4.13) \quad \begin{aligned} X_1 &= -z(\alpha_{,2} \cos 2\alpha - \alpha_{,1} \sin 2\alpha)(\bar{\sigma} - \underline{\sigma}), \\ X_2 &= -z(\alpha_{,1} \cos 2\alpha + \alpha_{,2} \sin 2\alpha)(\bar{\sigma} - \underline{\sigma}) - \gamma z. \end{aligned}$$

Stosując przedstawioną metodę rozwiązania równania (3.1) opracowano program na EMC Odra 1204. Pozwala on wyznaczyć funkcję  $\alpha(x_1, x_2)$  w przypadku zagadnienia brzegowego Cauchy'ego oraz zagadnienia charakterystycznego. Sposób przygotowania danych do tego programu przedstawiono na przykładzie.

## 5. PRZYKŁAD

Jeżeli wyznaczymy brzeg obszaru za pomocą punktów  $X_m, Y_m$  ( $m=1, 2, \dots, L$ ), obciążenie w tych punktach przez  $PA, PB$ , grubość elementu na brzegu przez  $ZA$  oraz jeżeli przyjmujemy funkcję dowolną na brzegu  $f(t)=BA$ , to na podstawie opracowanego programu można obliczyć na brzegu wartości  $\alpha$ ,  $\alpha_{,1}$  i  $\alpha_{,2}$ , a następnie rozwiązać równanie (3.1) w obszarze określonym przez charakterystyki.

Przyjmując np. dane następujące:

$$\bar{\sigma} = 5, \quad \underline{\sigma} = -30, \quad \gamma = 0,$$

$$X_m = -325, -300, -275, -250, -225, -200, -175, -150, -125, -100, \\ -75, -50, -25,$$

$$Y_m = 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,$$

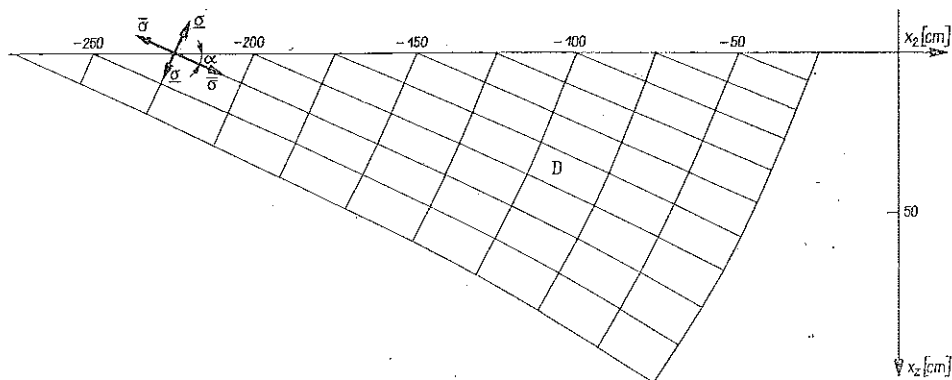
$$PA = -3,00; -2,95; -2,90; -2,85; -2,80; -2,75; -2,70; -2,65; -2,60; \\ -2,55; -2,50; -2,45; -2,40;$$

$$PB = 15,0; 15,0; 15,0; 15,0; 15,0; 15,0; 15,0; 15,0; 15,0; 15,0; 15,0; 15,0; 15,0;$$

$$ZA = 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30,$$

$$BA = 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,$$

otrzymano rozwiązanie (trajektorie wyrównanych naprężeń głównych) przedstawione na rys. 7. Maszyna daje nam składowe dodatkowego obciążenia brzegu  $\bar{s}$  [obliczone na podstawie równania (4.5)] oraz wartości kąta  $\alpha$  w punktach obszaru  $D$ . Można zatem określić składowe siły masowych  $X_1, X_2$  z równań (4.13).



Rys. 7

Zagadnienie realizacji pola sił masowych  $\bar{X}$  oraz układu obciążeń brzegu  $\bar{s}$  jest przedmiotem pracy [6].

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Р. Курант, Д. Гильберт, *Методы математической физики*, 2, ГИТТЛ, Москва 1951.
2. M. KUCZYŃSKA, W. MARKS, *Kształtowanie elementów betonowych sprężonych układem gęsto rozmieszczonych cięgien*, Arch. Inżyn. Łądown., 16, 3, 1970.
3. Z. WASIUTYŃSKI, *Zadania o wyznaczeniu kształtu belki równej wytrzymałości sprężonej dowolnie gęsto, dowolnie cienkimi strunami*, VII Konf. Nauk. PZITB PAN, Krynica 1961.
4. Praca zbiorowa, *Metody optymalizacji ustrojów odkształcalnych*, cz. I, Ossolineum, Warszawa 1968.
5. W. OLSZAK, P. PERZYNA, A. SAWCZUK i inni, *Teoria plastyczności*, PWN, Warszawa 1965.
6. J. SZULC-HOLNICKI, *Wyznaczanie układów cięgien sprężających odpowiadających danemu polu sił masowych*, Arch. Inżyn. Łądown., 17, 3, 1971.

#### Резюме

#### НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ВЫРАВНИВАНИЯ ГЛАВНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ПЛОСКИХ УПРУГИХ СРЕДАХ

В работе рассматривается вопрос выравнивания главных напряжений в плоской упругой среде, путем изменения толщины и поля массовых сил. Этот вопрос сформулировал профессор З. Васютынский в работе [3].

В статье, дается метод решения задачи, принимая в качестве исходной точки, два уравнения равновесия и уравнения непрерывности деформаций, с учетом условия выравнивания главных напряжений [3]. Основной частью работы является метод решения дифференциального уравнения с частными производными, описывающего наклон траектории главных напряжений. С этой целью применяется метод характеристик [1 и 5].

В работе, определяются также краевые условия задачи и числовой метод ее решения, для случая введения некоторого конструктивного условия (напр. постоянной толщины среды).

## SUMMARY

CERTAIN METHODS OF COMPENSATING THE MAIN STRESSES  
IN PLANE ELASTIC MEDIA

In the paper the problem of compensating the main stresses in a plane elastic medium by changes of the thickness and of the field of body forces is considered. This problem was formulated by Z. Wasiutyński in paper [3].

In this paper the method of solving the problem is given assuming two equations of equilibrium as initial, and the equation of continuity of deformations with consideration of the condition of compensation of the main stresses [3].

The basic part of the work is the method of solving the partial differential equation describing the slope of the trajectory of the main stresses.

For this purpose the method of characteristics [1 and 5] was applied. In the paper the boundary conditions of the problem are also given, and the numerical method of its solution is given for the case of introduction of a certain constructional condition (e.g., constant thickness of the medium).

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI  
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

*Praca została złożona w Redakcji dnia 29 września 1970 r.*

---