

PEWNE ROZWIĄZANIA DLA KOŁOWYCH PŁYT TRÓJWARSTWOWYCH  
OBCIĄŻONYCH NA KRAWĘDZI

JERZY GOŁAŚ (POZNAŃ)

## 1. WSTĘP

W pracy niniejszej podamy rozwiązania dla kołowych płyt trójwarstwowych, swobodnie podpartych na obwodzie, obciążonych na krawędzi jednostkowymi momentami skupionymi albo parą jednostkowych sił normalnych. Rozwiązania takie są bardzo przydatne przy rozpatrywaniu nieciągłych warunków brzegowych dla omawianych płyt. Podobne rozwiązania dla prostokątnych płyt trójwarstwowych wyznaczone zostały w pracy [1].

Przedmiotem naszych rozważań będą płyty trójwarstwowe, dla których przyjęto model teoretyczny podany przez N. J. HOFFA [2]. Założenia dla tego modelu są następujące:

1) płyta składa się z trzech warstw i jest symetryczna względem swej płaszczyzny środkowej;

2) warstwy zewnętrzne spełniają założenia teorii tarcz i płyt izotropowych cienkich;

3) warstwa środkowa o stałej grubości jest nieodkształcalna w kierunku pionowym ( $E_z = \infty$ ), pracuje jedynie na naprężenia styczne  $\tau_{rz}$  i  $\tau_{\varphi z}$ . Moduł sprężystości materiału warstwy środkowej  $E_r = E_\varphi = 0$ , a moduł odkształcenia postaciowego  $G_{r\varphi} = 0$ ,  $G_{rz} = G_{\varphi z} = G_w$ .

Oznaczenia stosowane w pracy zaczerpnięto z [1, 3 i 4]. Wykaz ważniejszych oznaczeń jest następujący:

- $w$  ugięcie pionowe płyty jednakowe dla wszystkich warstw,
- $u_n$  przemieszczenie poziome w płaszczyźnie środkowej warstwy dolnej w kierunku normalnej do brzegu  $\Gamma$ ,
- $u_t$  przemieszczenie poziome w płaszczyźnie środkowej warstwy dolnej w kierunku stycznej do brzegu  $\Gamma$ ,
- $m_n, m_{nt}$  momenty zginające w warstwach zewnętrznych względem osi  $n$  i  $t$  na brzegu  $\Gamma$ ,
- $Q_n = 2\bar{q}_n + N_{nz}$  sprowadzona siła poprzeczna dla całej płyty trójwarstwowej na brzegu  $\Gamma$ ,
- $\bar{q}_n = \frac{\partial m_{nt}}{\partial s} + q_n$  sprowadzona siła poprzeczna dla warstw zewnętrznych na brzegu  $\Gamma$ ,
- $q_n$  siła poprzeczna w warstwach zewnętrznych na brzegu  $\Gamma$ ,
- $N_{nz}$  siła poprzeczna dla warstwy środkowej na brzegu  $\Gamma$ ,
- $N_n$  siła tarczowa w warstwie zewnętrznej w kierunku normalnej do brzegu  $\Gamma$ ,
- $N_{nt}$  siła tarczowa w warstwie zewnętrznej w kierunku stycznej do brzegu  $\Gamma$ .

W pracy [4] można znaleźć równania różniczkowe równowagi dla rozpatrywanych płyt, wzory na przemieszczenia oraz zależności między siłami wewnętrznymi i przemieszczeniami dla odpowiednich warstw płyty.

Odnosnie warunków brzegowych należy zauważyć, że określenia znane z teorii płyt cienkich, takie jak krawędź swobodna, krawędź swobodnie podparta i krawędź zamocowana nie dadzą się przenieść do teorii płyt wielowarstwowych ze względu na swą wieloznaczność [5].

Korzystając z rachunku wariacyjnego otrzymamy dla rozpatrywanych płyt następujące równanie spełnione na brzegu:

$$(1.1) \quad \int_{\Gamma} \left( -2m_n \frac{\partial \delta w}{\partial n} + Q_n \delta w + 2N_n \delta u_n + 2N_{nt} \delta u_t \right) ds = 0,$$

Równanie (1.1) służy do wyznaczenia naturalnych warunków granicznych: uzyskać można z niego szesnaście jednorodnych warunków brzegowych dla omawianych płyt. Na każdym brzegu muszą być spełnione cztery warunki,

$$(1.2) \quad \begin{array}{llll} m_n = 0, & w = 0, & N_n = 0, & u_t = 0; \\ m_n = 0, & w = 0, & N_n = 0, & N_{nt} = 0; \\ m_n = 0, & w = 0, & u_n = 0, & N_{nt} = 0; \\ m_n = 0, & w = 0, & u_n = 0, & u_t = 0; \\ \frac{\partial w}{\partial n} = 0, & w = 0, & N_n = 0, & u_t = 0; \\ \frac{\partial w}{\partial n} = 0, & w = 0, & u_n = 0, & u_t = 0; \\ m_n = 0, & Q_n = 0, & N_n = 0, & N_{nt} = 0 \end{array}$$

itd.

Jak widzimy, warunki brzegowe w teorii płyt trójwarstwowych należy w każdym przypadku ściśle definiować wg (1.2). W pracy niniejszej przez termin «swobodne podparcie» rozumiemy krawędź spełniającą warunki antysymetrii (1.2)<sub>1</sub>.

## 2. OBCIĄŻENIE JEDNOSTKOWYMI MOMENTAMI SKUPIONYMI

W punkcie niniejszym zajmiemy się kołową płytą trójwarstwową swobodnie podpartą na całym obwodzie obciążoną w punkcie  $B(a, \psi)$  momentami skupionymi  $m_r = 1$  (rys. 1).

Poszukiwane rozwiązanie musi spełnić jednorodny układ równań [4]

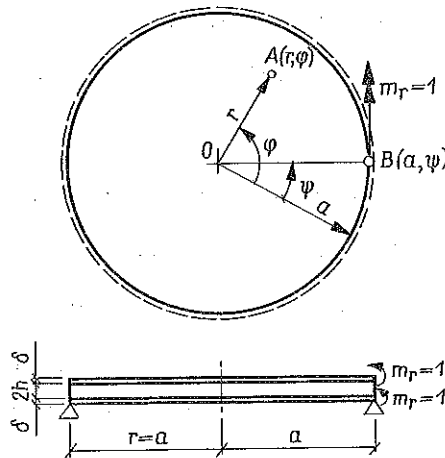
$$(2.1) \quad \left( 1 - \frac{1}{\lambda^2} \nabla^2 \right) \nabla^2 \nabla^2 U_1(r, \varphi; a, \psi) = 0, \quad \left( 1 - \frac{1}{\mu^2} \nabla^2 \right) \Theta_1(r, \varphi; a, \psi) = 0$$

przy następujących warunkach brzegowych na krawędzi  $r = a$ :

$$(2.2) \quad m_r(a, \varphi) = \delta(\varphi - \psi), \quad -D \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \right] \times \\ \times (1 - \kappa \nabla^2) U_1 = \delta(\varphi - \psi);$$

$$\begin{aligned}
 (2.2) \quad & w(a, \varphi) = 0, \quad (1 - \kappa \nabla^2) U_1 = 0; \\
 \text{[c.d.]} \quad & N_r(a, \varphi) = 0, \quad \frac{\partial^2 U_1}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial U_1}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 U_1}{\partial \varphi^2} - \frac{1 - \nu}{r} \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial r \partial \varphi} - \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial \Theta_1}{\partial \varphi} = 0; \\
 & u_\varphi(a, \varphi) = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial U_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Theta_1}{\partial r} = 0,
 \end{aligned}$$

gdzie  $\lambda$ ,  $\mu$  i  $\kappa$  są współczynnikami zależnymi od stałych materiałowych i wymiarów geometrycznych płyty. Żądamy ponadto, ażeby dla  $r=0$  wszystkie wielkości statyczne były ograniczone.



Rys. 1

Dążąc do rozdzielenia zmiennych, przedstawmy funkcje  $U_1$  i  $\Theta_1$  w postaci następujących szeregów:

$$(2.3) \quad U_1 = \sum_{m=0}^{\infty} R_m(r) \cos m(\varphi - \psi), \quad \Theta_1 = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(r) \sin m(\varphi - \psi),$$

a warunek brzegowy (2.2)<sub>1</sub> napiszmy w postaci

$$m_r(a, \varphi) = \frac{1}{2\pi a} \left[ 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos m(\varphi - \psi) \right].$$

Podstawiając (2.3) do (2.1) otrzymamy układ równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\begin{aligned}
 (2.4) \quad & \left[ 1 - \frac{1}{\lambda^2} \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \right) \right] \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \right)^2 R_m(r) = 0, \\
 & \left[ 1 - \frac{1}{\mu^2} \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \right) \right] P_m(r) = 0.
 \end{aligned}$$

Rozwiązanie równania (2.4)<sub>1</sub> przedstawić możemy w postaci sumy

$$(2.5) \quad R_m(r) = B_m(r) + H_m(r),$$

gdzie

$$(2.6) \quad \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \right)^2 B_m(r) = 0, \quad \left[ 1 - \frac{1}{\lambda^2} \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \right) \right] H_m(r) = 0.$$

Równanie (2.6)<sub>1</sub> ma następujące rozwiązanie:

$$B_0(r) = A_0^1 + A_0^2 r^2 + A_0^3 \ln r + A_0^4 r^2 \ln r \quad \text{dla } m=0,$$

$$B_1(r) = A_1^1 r + A_1^2 r^3 + A_1^3 r^{-1} + A_1^4 r \ln r \quad \text{dla } m=1,$$

$$B_m(r) = A_m^1 r^m + A_m^2 r^{-m} + A_m^3 r^{m+2} + A_m^4 r^{-m+2} \quad \text{dla } m > 1,$$

a równanie (2.6)<sub>2</sub>

$$H_m(r) = A_m^5 I_m(\lambda r) + A_m^6 K_m(\lambda r), \quad m=0, 1, 2, \dots$$

Rozwiązaniem równania (2.4)<sub>2</sub>, na podstawie analogii do równania (2.6)<sub>2</sub>, jest funkcja

$$P_m(r) = A_m^7 I_m(\mu r) + A_m^8 K_m(\mu r), \quad m=0, 1, 2, \dots$$

Podstawiając powyższe rozwiązania do zależności (2.5) i (2.3), przy jednoczesnym wykorzystaniu warunku w punkcie  $r=0$ , otrzymamy poszukiwane przez nas rozwiązanie układu równań (2.1):

$$(2.7) \quad U_1(r, \varphi; a, \psi) = A_0^1 + A_0^2 r^2 + A_0^5 I_0(\lambda r) + \sum_{m=1}^{\infty} [A_m^1 r^m + A_m^3 r^{m+2} + A_m^5 I_m(\lambda r)] \cos m(\varphi - \psi),$$

$$\Theta_1(r, \varphi; a, \psi) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m^7 I_m(\mu r) \sin m(\varphi - \psi).$$

Korzystając z warunków brzegowych (2.2) otrzymamy dla każdego  $m$  następujący układ równań:

dla  $m=0$

$$(2.8) \quad 2(1+\nu)A_0^2 + (1-\kappa\lambda^2)\lambda^2 \left[ I_0(\lambda a) - \frac{1-\nu}{\lambda a} I_1(\lambda a) \right] A_0^5 = -\frac{1}{2\pi Da},$$

$$A_0^1 + (a^2 - 4\kappa)A_0^2 + (1-\kappa\lambda^2)I_0(\lambda a)A_0^5 = 0,$$

$$2(1+\nu)A_0^2 + \lambda^2 \left[ I_0(\lambda a) - \frac{1-\nu}{\lambda a} I_1(\lambda a) \right] A_0^5 = 0,$$

$$A_0^7 = 0;$$

dla  $m \geq 1$

$$\begin{aligned}
 & m(m-1)(1-\nu)a^{m-2}A_m^1 + (m+1)(1-\nu)a^m \left[ m + \frac{2(1+\nu)}{1-\nu} - m(m-1)\frac{4\kappa}{a^2} \right] A_m^3 + \\
 & + (1-\kappa\lambda^2)\lambda^2 \left[ I_m(\lambda a) + m(m-1)\frac{1-\nu}{\lambda^2 a^2} I_m(\lambda a) - \frac{1-\nu}{\lambda a} I_{m+1}(\lambda a) \right] A_m^5 = -\frac{1}{\pi D a}, \\
 & a^m A_m^1 + a^m [a^2 - (m+1)4\kappa] A_m^3 + (1-\kappa\lambda^2) I_m(\lambda a) A_m^5 = 0, \\
 (2.9) \quad & m(m-1)(1-\nu)a^{m-2}A_m^1 + (m+1)(1-\nu)a^m \left[ m + \frac{2(1+\nu)}{1-\nu} \right] A_m^3 + \\
 & + \lambda^2 \left[ I_m(\lambda a) + m(m-1)\frac{1-\nu}{\lambda^2 a^2} I_m(\lambda a) - \frac{1-\nu}{\lambda a} I_{m+1}(\lambda a) \right] A_m^5 - \\
 & - \mu^2 \left[ m(m-1)\frac{1-\nu}{\mu^2 a^2} I_m(\mu a) + m\frac{1-\nu}{\mu a} I_{m+1}(\mu a) \right] A_m^7 = 0, \\
 & -ma^{m-1}A_m^1 - ma^{m+1}A_m^3 - \\
 & -m\frac{1}{a}I_m(\lambda a)A_m^5 + \mu \left[ m\frac{1}{\mu a}I_m(\mu a) + I_{m+1}(\mu a) \right] A_m^7 = 0.
 \end{aligned}$$

Rozwiązując te równania, otrzymamy

dla  $m=0$

$$\begin{aligned}
 (2.10) \quad & A_0^1 = \frac{a}{2\pi D_z(1+\nu)} + \check{A}_0^1, \quad A_0^2 = -\frac{1}{2\pi D_z a(1+\nu)}, \\
 & A_0^5 = \check{A}_0^5 = \frac{1}{\pi D_z a \left[ \lambda^2 I_0(\lambda a) - (1-\nu)\frac{\lambda}{a} I_1(\lambda a) \right]}, \quad A_m^7 = 0,
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\check{A}_0^1 = -\frac{1}{\pi D_z a} \left[ \frac{2\kappa}{1+\nu} + \frac{(1-\kappa\lambda^2)I_0(\lambda a)}{\lambda^2 I_0(\lambda a) - (1-\nu)\frac{\lambda}{a} I_1(\lambda a)} \right], \quad D_z = 2D\kappa\lambda^2;$$

dla  $m \geq 1$

$$\begin{aligned}
 (2.11) \quad & A_m^1 = \frac{1}{\pi D_z a^{m-1}(2m+1+\nu)} + \check{A}_m^1, \quad A_m^3 = -\frac{1}{\pi D_z a^{m+1}(2m+1+\nu)} + \check{A}_m^3, \\
 & A_m^5 = \check{A}_m^5 = \frac{2}{\pi D_z a(1-\nu)} \times \\
 & \times \frac{m - \frac{\mu}{a} \frac{I_{m+1}(\mu a)}{I_m(\mu a)} \left[ \frac{2m(m+1)(1-\nu)}{2m+1+\nu} \kappa - a^2 \right]}{\left[ \frac{\lambda^2}{1-\nu} I_m(\lambda a) - \frac{\lambda}{a} I_{m+1}(\lambda a) \right] \left\{ m + \frac{\mu}{a} \frac{I_{m+1}(\mu a)}{I_m(\mu a)} \times \right.} \\
 & \left. \times \left[ \frac{2m(m+1)(1-\nu)}{2m+1+\nu} \left( \frac{1}{\lambda^2} - \kappa \right) + a^2 \right] \right\} - m\frac{\mu}{a} I_m(\lambda a) \frac{I_{m+1}(\mu a)}{I_m(\mu a)}}
 \end{aligned}$$

$$(2.11) \quad A_m^7 = \overset{*}{A}_m^7 = -\frac{2m\kappa\lambda^2}{\pi D_z a(1-\nu) I_m(\mu a)} \times$$

$$\frac{2(m+1)(1-\nu)}{2m+1+\nu} \frac{1}{\lambda^2} \left[ \frac{\lambda^2}{1-\nu} I_m(\lambda a) - \frac{\lambda}{a} I_{m+1}(\lambda a) \right] - I_m(\lambda a)$$

$$\times \frac{\left[ \frac{\lambda^2}{1-\nu} I_m(\lambda a) - \frac{\lambda}{a} I_{m+1}(\lambda a) \right] \left\{ m + \frac{\mu}{a} \frac{I_{m+1}(\mu a)}{I_m(\mu a)} \times \right.}{\left. \times \left[ \frac{2m(m+1)(1-\nu)}{2m+1+\nu} \left( \frac{1}{\lambda^2} - \kappa \right) + a^2 \right] \right\} - m \frac{\mu}{a} I_m(\lambda a) \frac{I_{m+1}(\mu a)}{I_m(\mu a)}}$$

gdzie

$$\overset{*}{A}_m^1 = -\frac{4(m+1)\kappa + [a^2 - 4(m+1)\kappa](1-\kappa\lambda^2)}{\pi D_z a^{m+1}(2m+1+\nu)} + \frac{2(1-\kappa\lambda^2)}{\pi D_z a^{m+1}} \times$$

$$\left\{ \frac{a^2 - 4(m+1)\kappa}{2(2m+1+\nu)} \left[ \frac{\lambda^2}{1-\nu} I_m(\lambda a) - \frac{\lambda}{a} I_{m+1}(\lambda a) \right] - \frac{I_m(\lambda a)}{1-\nu} \right\} \times$$

$$\times \left\{ m - \frac{\mu}{a} \frac{I_{m+1}(\mu a)}{I_m(\mu a)} \left[ \frac{2m(m+1)(1-\nu)}{2m+1+\nu} \kappa - a^2 \right] \right\}$$

$$\times \frac{\left[ \frac{\lambda^2}{1-\nu} I_m(\lambda a) - \frac{\lambda}{a} I_{m+1}(\lambda a) \right] \times}{\left[ \frac{\lambda^2}{1-\nu} I_m(\lambda a) - \frac{\lambda}{a} I_{m+1}(\lambda a) \right] \times$$

$$\times \left\{ m + \frac{\mu}{a} \frac{I_{m+1}(\mu a)}{I_m(\mu a)} \left[ \frac{2m(m+1)(1-\nu)}{2m+1+\nu} \left( \frac{1}{\lambda^2} - \kappa \right) + a^2 \right] \right\} - m \frac{\mu}{a} I_m(\lambda a) \frac{I_{m+1}(\mu a)}{I_m(\mu a)}$$

$$\overset{*}{A}_m^3 = \frac{m(1-\kappa\lambda^2)}{\pi D_z a^{m+1}(2m+1+\nu)} \times$$

$$\frac{\mu}{a} \frac{I_{m+1}(\mu a)}{I_m(\mu a)} \left\{ \frac{2(m+1)(1-\nu)}{2m+1+\nu} \frac{1}{\lambda^2} \left[ \frac{\lambda^2}{1-\nu} I_m(\lambda a) - \frac{\lambda}{a} I_{m+1}(\lambda a) \right] - I_m(\lambda a) \right\}$$

$$\times \frac{\left[ \frac{\lambda^2}{1-\nu} I_m(\lambda a) - \frac{\lambda}{a} I_{m+1}(\lambda a) \right] \times}{\left[ \frac{\lambda^2}{1-\nu} I_m(\lambda a) - \frac{\lambda}{a} I_{m+1}(\lambda a) \right] \times$$

$$\times \left\{ m + \frac{\mu}{a} \frac{I_{m+1}(\mu a)}{I_m(\mu a)} \left[ \frac{2m(m+1)(1-\nu)}{2m+1+\nu} \left( \frac{1}{\lambda^2} - \kappa \right) + a^2 \right] \right\} - m \frac{\mu}{a} I_m(\lambda a) \frac{I_{m+1}(\mu a)}{I_m(\mu a)}$$

Przez  $\overset{*}{A}_m^i$  oznaczono wielkości charakteryzujące wpływ struktury trójwarstwowej.

Podstawiając stałe (2.10) i (2.11) do wyrażeń (2.7) otrzymamy rozwiązanie problemu w postaci

$$(2.12) \quad U_1(r, \varphi; a, \psi) = -\frac{a}{\pi D_z} \left\{ \frac{r^2}{a^2} - 1 \right. + \left. \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r^m}{2m+1+\nu} \frac{\left( \frac{r^2}{a^2} - 1 \right)}{a^2} \cos m(\varphi - \psi) \right\} +$$

$$+ \overset{*}{A}_0^1 + I_0(\lambda r) \overset{*}{A}_0^5 + \sum_{m=1}^{\infty} [r^m \overset{*}{A}_m^1 + r^{m+2} \overset{*}{A}_m^3 + I_m(\lambda r) \overset{*}{A}_m^5] \cos m(\varphi - \psi),$$

$$\Theta_1(r, \varphi; a, \psi) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m^7 I_m(\mu r) \sin m(\varphi - \psi).$$

Podamy jeszcze rozwiązanie na ugięcie dla omawianego przypadku kołowej płyty trójwarstwowej obciążonej momentami skupionymi  $m_r=1$  na krawędzi. Wykorzystując rozwiązanie (2.12), otrzymamy

$$(2.13) \quad w_1(r, \varphi; a, \psi) = (1 - \kappa \nabla^2) U_1(r, \varphi; a, \psi) =$$

$$= -\frac{a}{\pi D_z} \left\{ \frac{r^2}{a^2} - 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r^m \left( \frac{r^2}{a^2} - 1 \right)}{2m+1+\nu} \cos m(\varphi - \psi) \right\} + \bar{A}_0^1 + \frac{2\kappa}{\pi D_z a(1+\nu)} +$$

$$+ (1 - \kappa \lambda^2) I_0(\lambda r) \bar{A}_0^5 + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ r^m \bar{A}_m^1 + r^{m+2} \bar{A}_m^3 + r^m 4(m+1)\kappa \times \right.$$

$$\times \left[ \frac{1}{\pi D_z a^{m+1}(2m+1+\nu)} - \bar{A}_m^3 \right] + (1 - \kappa \lambda^2) I_m(\lambda r) \bar{A}_m^5 \left. \right\} \cos m(\varphi - \psi).$$

Jeżeli przyjmujemy, że moduł na ścinanie  $G_w$  dąży do nieskończoności [3] (tzn. że  $\kappa \rightarrow 0$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $\mu \rightarrow \infty$ ), to ugięcie (2.13) wyrazi się wzorem

$$(2.14) \quad w_1 = U_1 = -\frac{a}{\pi D_z} \left\{ \frac{\rho^2 - 1}{2(1+\nu)} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\rho^m (\rho^2 - 1)}{2m+1+\nu} \cos m(\varphi - \psi) \right\}, \quad \text{gdzie } \rho = \frac{r}{a}.$$

Wzór (2.14) przedstawia ugięcie dla izotropowej płyty kołowej o sztywności  $D_z$  swobodnie podpartej, obciążonej dwoma momentami skupionymi  $m_r=1$  na krawędzi [6].

### 3. OBCIĄŻENIE PARĄ SIŁ NORMALNYCH $N_r=1$

Rozważmy teraz kołową płytę trójwarstwową, swobodnie podpartą na całym obwodzie, obciążoną w punkcie  $B(a, \psi)$  parą sił normalnych  $N_r=1$  (rys. 2).

Podobnie jak w przypadku płyty kołowej obciążonej jednostkowymi momentami skupionymi interesować nas będzie rozwiązanie jednorodnego układu równań

$$(3.1) \quad \left( 1 - \frac{1}{\lambda^2} \nabla^2 \right) \nabla^2 \nabla^2 U_2(r, \varphi; a, \psi) = 0, \quad \left( 1 - \frac{1}{\mu^2} \nabla^2 \right) \Theta_2(r, \varphi; a, \psi) = 0,$$

z odpowiednimi warunkami brzegowymi.

Rozwiązanie równań (3.1) jest następujące:

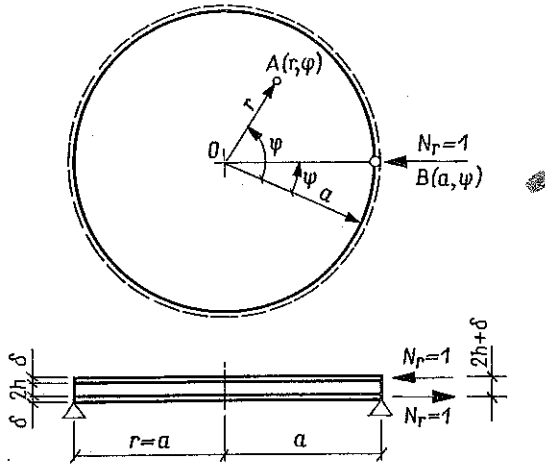
$$(3.2) \quad U_2(r, \varphi; a, \psi) = A_0^1 + A_0^2 r^2 + A_0^5 I_0(\lambda r) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} [A_m^1 r^m + A_m^3 r^{m+2} + A_m^5 I_m(\lambda r)] \cos m(\varphi - \psi),$$

$$\Theta_2(r, \varphi; a, \psi) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m^7 I_m(\mu r) \sin m(\varphi - \psi).$$

Stałe całkowania wyznaczmy z następujących warunków brzegowych dla krawędzi  $r=a$ :

$$\begin{aligned}
 m_r(a, \varphi) &= 0, & \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \right] (1 - \kappa \nu^2) U_2 &= 0; \\
 w(a, \varphi) &= 0, & (1 - \kappa \nu^2) U_2 &= 0; \\
 N_r(a, \varphi) &= -\frac{E\delta(2h+\delta)}{2(1-\nu^2)} \left\{ \frac{\partial^2 U_2}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial U_2}{\partial r} + \right. \\
 (3.3) \quad & \left. + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 U_2}{\partial \varphi^2} - \frac{1-\nu}{r} \frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial r \partial \varphi} - \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial \Theta_2}{\partial \varphi} \right\} = \frac{1}{2\pi a} \left[ 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos m(\varphi - \psi) \right]; \\
 u_\varphi(a, \varphi) &= 0, & \frac{1}{r} \frac{\partial U_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Theta_2}{\partial r} &= 0.
 \end{aligned}$$



Rys. 2

Podstawiając (3.2) do (3.3) otrzymamy dla każdego  $m$  następujący układ równań: dla  $m=0$

$$\begin{aligned}
 2(1+\nu)A_0^2 + (1-\kappa\lambda^2)\lambda^2 \left[ I_0(\lambda a) - \frac{1-\nu}{\lambda a} I_1(\lambda a) \right] A_0^5 &= 0, \\
 A_0^4 + (a^2 - 4\kappa)A_0^2 + (1-\kappa\lambda^2)I_0(\lambda a)A_0^5 &= 0, \\
 (3.4) \quad 2(1+\nu)A_0^2 + \lambda^2 \left[ I_0(\lambda a) - \frac{1-\nu}{\lambda a} I_1(\lambda a) \right] A_0^5 &= -\frac{1-\nu^2}{\pi E \delta a (2h+\delta)}, \\
 A_0^7 &= 0;
 \end{aligned}$$



dla  $m \geq 1$

$$\begin{aligned}
 & m(m-1)(1-\nu)a^{m-2}A_m^1 + (m+1)(1-\nu)a^m \left[ m + \frac{2(1+\nu)}{1-\nu} - m(m-1)\frac{4\kappa}{a^2} \right] A_m^3 + \\
 & + (1-\kappa\lambda^2)\lambda^2 \left[ I_m(\lambda a) + m(m-1)\frac{1-\nu}{\lambda^2 a^2} I_m(\lambda a) - \frac{1-\nu}{\lambda a} I_{m+1}(\lambda a) \right] A_m^5 = 0, \\
 & a^m A_m^1 + a^m [a^2 - 4\kappa(m+1)] A_m^3 + (1-\kappa\lambda^2) I_m(\lambda a) A_m^5 = 0, \\
 (3.5) \quad & m(m-1)(1-\nu)a^{m-2}A_m^1 + (m+1)(1-\nu)a^m \left[ m + \frac{2(1+\nu)}{1-\nu} \right] A_m^3 + \\
 & + \lambda^2 \left[ I_m(\lambda a) + m(m-1)\frac{1-\nu}{\lambda^2 a^2} I_m(\lambda a) - \frac{1-\nu}{\lambda a} I_{m+1}(\lambda a) \right] A_m^5 - \\
 & - \mu^2 \left[ m(m-1)\frac{1-\nu}{\mu^2 a^2} I_m(\mu a) + m\frac{1-\nu}{\mu a} I_{m+1}(\mu a) \right] A_m^7 = -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E \delta a (2h+\delta)}, \\
 & - m a^{m-1} A_m^1 - m a^{m+1} A_m^3 - m \frac{1}{a} I_m(\lambda a) A_m^5 + \\
 & + \mu \left[ m \frac{1}{\mu a} I_m(\mu a) + I_{m+1}(\mu a) \right] A_m^7 = 0.
 \end{aligned}$$

Po rozwiązaniu równań (3.4) i (3.5) otrzymamy:

dla  $m=0$

$$\begin{aligned}
 (3.6) \quad A_0^1 &= -\frac{1-\kappa\lambda^2}{\pi E \delta a (2h+\delta) \kappa \lambda^2} \left[ \frac{(1-\nu)(a^2-4\kappa)}{2} - \frac{(1+\nu)I_0(\lambda a)}{\frac{\lambda^2}{1-\nu} I_0(\lambda a) - \frac{\lambda}{a} I_1(\lambda a)} \right], \\
 A_0^2 &= \frac{(1-\nu)(1-\kappa\lambda^2)}{2\pi E \delta a (2h+\delta) \kappa \lambda^2}, \\
 A_0^5 &= -\frac{1+\nu}{\pi E \delta a (2h+\delta) \kappa \lambda^2 \left[ \frac{\lambda^2}{1-\nu} I_0(\lambda a) - \frac{\lambda}{a} I_1(\lambda a) \right]}, \\
 A_0^7 &= 0,
 \end{aligned}$$

dla  $m \geq 1$

$$\begin{aligned}
 (3.7) \quad A_m^1 &= -\frac{2(1+\nu)(1-\kappa\lambda^2)}{\pi E \delta a^{m+1} (2h+\delta) \kappa \lambda^2} \times \\
 & \times \frac{\left\{ \frac{[a^2 - 4(m+1)\kappa](1-\nu)}{2(2m+1+\nu)} \left[ \frac{\lambda^2}{1-\nu} I_m(\lambda a) - \frac{\lambda}{a} I_{m+1}(\lambda a) \right] - I_m(\lambda a) \right\} \left\{ m + \mu a \frac{I_{m+1}(\mu a)}{I_m(\mu a)} \right\}}{\left[ \frac{\lambda^2}{1-\nu} I_m(\lambda a) - \frac{\lambda}{a} I_{m+1}(\lambda a) \right] \times} \\
 & \times \left\{ m + \frac{\mu}{a} \frac{I_{m+1}(\mu a)}{I_m(\mu a)} \left[ \frac{2m(m+1)(1-\nu)}{2m+1+\nu} \left( \frac{1}{\lambda^2} - \kappa \right) + a^2 \right] \right\} - m \frac{\mu}{a} I_m(\lambda a) \frac{I_{m+1}(\mu a)}{I_m(\mu a)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3.7) \quad [e.d.] \quad A_m^3 &= \frac{(1-\nu^2)(1-\kappa\lambda^2)}{\pi E \delta a^{m+1} (2h+\delta) \kappa \lambda^2 (2m+1+\nu)} \times \\
 &\quad \left[ \frac{\lambda^2}{1-\nu} I_m(\lambda a) - \frac{\lambda}{a} I_{m+1}(\lambda a) \right] \left[ m + \mu a \frac{I_{m+1}(\mu a)}{I_m(\mu a)} \right] \\
 &\quad \times \frac{\left[ \frac{\lambda^2}{1-\nu} I_m(\lambda a) - \frac{\lambda}{a} I_{m+1}(\lambda a) \right] \left\{ m + \frac{\mu}{a} \frac{I_{m+1}(\mu a)}{I_m(\mu a)} \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left[ \frac{2m(m+1)(1-\nu)}{2m+1+\nu} \left( \frac{1}{\lambda^2} - \kappa \right) + a^2 \right] \right\} - m \frac{\mu}{a} I_m(\lambda a) \frac{I_{m+1}(\mu a)}{I_m(\mu a)}}{2(1+\nu)} \\
 A_m^5 &= - \frac{2(1+\nu)}{\pi E \delta a (2h+\delta) \kappa \lambda^2} \times \\
 &\quad \frac{m + \mu a \frac{I_{m+1}(\mu a)}{I_m(\mu a)}}{\left[ \frac{\lambda^2}{1-\nu} I_m(\lambda a) - \frac{\lambda}{a} I_{m+1}(\lambda a) \right] \left\{ m + \frac{\mu}{a} \frac{I_{m+1}(\mu a)}{I_m(\mu a)} \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left[ \frac{2m(m+1)(1-\nu)}{2m+1+\nu} \left( \frac{1}{\lambda^2} - \kappa \right) + a^2 \right] \right\} - m \frac{\mu}{a} I_m(\lambda a) \frac{I_{m+1}(\mu a)}{I_m(\mu a)}}{2(1+\nu)m} \\
 A_m^7 &= - \frac{2(1+\nu)m}{\pi E \delta a (2h+\delta) I_m(\mu a)} \times \\
 &\quad I_m(\lambda a) - \frac{2(m+1)(1-\nu)}{2m+1+\nu} \left( \frac{1}{\lambda^2} - \kappa \right) \left[ \frac{\lambda^2}{1-\nu} I_m(\lambda a) - \frac{\lambda}{a} I_{m+1}(\lambda a) \right] \\
 &\quad \times \frac{\left[ \frac{\lambda^2}{1-\nu} I_m(\lambda a) - \frac{\lambda}{a} I_{m+1}(\lambda a) \right] \left\{ m + \frac{\mu}{a} \frac{I_{m+1}(\mu a)}{I_m(\mu a)} \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left[ \frac{2m(m+1)(1-\nu)}{2m+1+\nu} \left( \frac{1}{\lambda^2} - \kappa \right) + a^2 \right] \right\} - m \frac{\mu}{a} I_m(\lambda a) \frac{I_{m+1}(\mu a)}{I_m(\mu a)}}{2(1+\nu)m}
 \end{aligned}$$

Wykorzystując powyższe zależności otrzymamy rozwiązanie zagadnienia (3.2) w postaci:

$$\begin{aligned}
 (3.8) \quad U_2(r, \varphi; a, \psi) &= \frac{1}{\pi E \delta a (2h+\delta) \kappa \lambda^2} \times \\
 &\quad \times \left\{ \frac{(1-\nu)(1-\kappa\lambda^2)}{2} (a^2 - r^2 - 4\kappa) + \frac{(1+\nu) [I_0(\lambda r) - (1-\kappa\lambda^2) I_0(\lambda a)]}{\frac{\lambda^2}{1-\nu} I_0(\lambda a) - \frac{\lambda}{a} I_1(\lambda a)} \right\} - \frac{1+\nu}{\pi E \delta a (2h+\delta) \kappa \lambda^2} \times \\
 &\quad \left[ m + \mu a \frac{I_{m+1}(\mu a)}{I_m(\mu a)} \right] \left\{ (1-\nu)(1-\kappa\lambda^2) \left[ \frac{\lambda^2}{1-\nu} I_m(\lambda a) - \frac{\lambda}{a} I_{m+1}(\lambda a) \right] \times \right. \\
 &\quad \left. \times [a^2 - r^2 - 4(m+1)\kappa] \frac{r^m}{a^m} + 2 \left[ I_m(\lambda r) - (1-\kappa\lambda^2) \frac{r^m}{a^m} I_m(\lambda a) \right] \right\} \\
 &\quad \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left[ \frac{\lambda^2}{1-\nu} I_m(\lambda a) - \frac{\lambda}{a} I_{m+1}(\lambda a) \right] \left\{ m + \frac{\mu}{a} \frac{I_{m+1}(\mu a)}{I_m(\mu a)} \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left[ \frac{2m(m+1)(1-\nu)}{2m+1+\nu} \left( \frac{1}{\lambda^2} - \kappa \right) + a^2 \right] \right\} - m \frac{\mu}{a} I_m(\lambda a) \frac{I_{m+1}(\mu a)}{I_m(\mu a)}}{\cos m(\varphi - \psi)},
 \end{aligned}$$

$$(3.8) \quad \Theta_2(r, \varphi; a, \psi) = -\frac{2(1+\nu)}{\pi E \delta a (2h+\delta)} \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{I_m(\mu r)}{I_m(\mu a)} \times$$

$$\left\{ I_m(\lambda a) - \frac{2(m+1)(1-\nu)}{2m+1+\nu} \left( \frac{1}{\lambda^2} - \kappa \right) \left[ \frac{\lambda^2}{1-\nu} I_m(\lambda a) - \frac{\lambda}{a} I_{m+1}(\lambda a) \right] \right\} \sin m(\varphi - \psi)$$

$$\times \left[ \frac{\lambda^2}{1-\nu} I_m(\lambda a) - \frac{\lambda}{a} I_{m+1}(\lambda a) \right] \times$$

$$\times \left\{ m + \frac{\mu}{a} \frac{I_{m+1}(\mu a)}{I_m(\mu a)} \left[ \frac{2m(m+1)(1-\nu)}{2m+1+\nu} \left( \frac{1}{\lambda^2} - \kappa \right) + a^2 \right] \right\} - m \frac{\mu}{a} I_m(\lambda a) \frac{I_{m+1}(\mu a)}{I_m(\mu a)}$$

Ugięcie pionowe płyty dla rozważanego przypadku wyraża się wzorem:

$$(3.9) \quad w_2(r, \varphi; a, \psi) = -\frac{(1-\kappa\lambda^2)}{\pi E \delta a (2h+\delta) \kappa \lambda^2} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1-\nu}{2} (a^2 - r^2) - \frac{1+\nu}{\frac{\lambda^2}{1-\nu} I_0(\lambda a) - \frac{\lambda}{a} I_1(\lambda a)} [I_0(\lambda a) - I_0(\lambda r)] \right\} - \frac{(1+\nu)(1-\kappa\lambda^2)}{\pi E \delta a (2h+\delta) \kappa \lambda^2} \times$$

$$\left[ m + \mu a \frac{I_{m+1}(\mu a)}{I_m(\mu a)} \right] \left\{ \frac{1-\nu}{2m+1+\nu} \left[ \frac{\lambda^2}{1-\nu} I_m(\lambda a) - \frac{\lambda}{a} I_{m+1}(\lambda a) \right] \times \right.$$

$$\left. \times \frac{r^m}{a^m} (a^2 - r^2) + 2 \left[ I_m(\lambda r) - \frac{r^m}{a^m} I_m(\lambda a) \right] \right\}$$

$$\times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left[ \frac{\lambda^2}{1-\nu} I_m(\lambda a) - \frac{\lambda}{a} I_{m+1}(\lambda a) \right] \left\{ m + \frac{\mu}{a} \frac{I_{m+1}(\mu a)}{I_m(\mu a)} \times \right.$$

$$\left. \times \left[ \frac{2m(m+1)(1-\nu)}{2m+1+\nu} \left( \frac{1}{\lambda^2} - \kappa \right) + a^2 \right] \right\} - m \frac{\mu}{a} I_m(\lambda a) \frac{I_{m+1}(\mu a)}{I_m(\mu a)}}{\cos m(\varphi - \psi)}.$$

Na krawędzi dla  $r=a$  ugięcie płyty (3.9) wynosi zero, co jest zgodne z warunkiem brzegowym (3.3)<sub>2</sub>.

Jeżeli zagadnienie płyty trójwarstwowej sprowadzimy do płyty zwykłej [1 i 3], tzn. że  $\kappa \rightarrow 0$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $\mu \rightarrow \infty$ ,  $\kappa\lambda^2 = 1$ , to otrzymamy  $w_2 \equiv 0$ . Wynik taki jest poprawny, ponieważ problem sprowadził się w tym przypadku do zagadnienia tarczowego.

#### 4. UWAGI KOŃCOWE

W wyznaczonych powyżej rozwiązaniach starano się wydzielić składniki znane z rozwiązań płyt izotropowych cienkich oraz składniki charakteryzujące strukturę warstwową płyty, które, gdy moduł odkształcenia postaciowego warstwy wewnętrznej zmierza do nieskończoności, znikają. Należy jednak podkreślić, że sztywność płytowa występująca w pierwszych składnikach [punkt 2, wzory (2.12) i (2.13)] nie jest tradycyjną sztywnością płyty izotropowej, lecz sztywnością dwóch izotropowych płytek zewnętrznych odległych od siebie o grubość warstwy wewnętrznej, równej  $2h$ .

Wyprowadzone w pracy podstawowe rozwiązania na funkcje  $U_1(r, \varphi; a, \psi)$ ,  $\Theta_1(r, \varphi; a, \psi)$  i  $U_2(r, \varphi; a, \psi)$ ,  $\Theta_2(r, \varphi; a, \psi)$  posłużą nam do rozwiązania wielu zagadnień nieciągłych warunków brzegowych dla kołowych płyt trójwarstwowych [7].

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. H. MIKOŁAJCZAK, *Zagadnienia nieciągłych warunków brzegowych dla prostokątnych płyt trójwarstwowych*, rozpr. habil., roczniki WSR w Poznaniu, dodatek 12, 1965.
2. N. J. HOFF, *Bending and buckling of rectangular sandwich plates*, NACA T.N. No. 2225, 1950.
3. J. WACHOWIAK, P. WILDE, *Wolnopodparte prostokątne płyty trójwarstwowe*, Arch. Inżyn. Ładow., 1, 1966.
4. H. MIKOŁAJCZAK, J. GOŁAŚ, *Trójwarstwowa płyta kołowa obciążona osiowo-symetrycznie*, Pozn. Tow. Przyj. Nauk, 2, 6, 1969.
5. R. GANOWICZ, *Wybrane zagadnienia teorii płyt Reissnera i teorii płyt trójwarstwowych*, Mech. Teoret. i Stos., 5, 3, 1966.
6. W. NOWACKI, Z. OLESIAK, *Płyta kołowa na obwodzie częściowo utwierdzona zupełnie i częściowo podparta*, Arch. Mech. Stos., 8, 1956.
7. J. GOŁAŚ, *Kołowe płyty trójwarstwowe o nieciągłych warunkach brzegowych — zagadnienia statyczne*, Rocznik WSR w Poznaniu [w druku].

#### Резюме

#### НЕКОТОРЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ЗАГРУЖЕННЫХ НА КРАЮ ТРЕХСЛОЙНЫХ КРУГОВЫХ ПЛАСТИНОК

В работе даются решения для круговых трехслойных пластинок свободно опертых по всей окружности  $(1.2)_1$ , загруженных на краю сосредоточенными моментами  $m_r = 1$ , а также парой нормальных сил  $N_r = 1$  (рис. 1 и 2). При обсуждении учитываются трехслойные пластинки с теоретической моделью, предложенной Н. И. Хоффом [2].

#### SUMMARY

#### CERTAIN SOLUTIONS FOR CIRCULAR THREE-LAYER PLATES LOADED AT THE EDGE

In this paper are determined the solutions for circular three-layer plates, freely supported on the entire circumference  $(1.2)_1$ , loaded at the edge by condensed moments  $m_r = 1$  and by a pair of normal forces  $N_r = 1$ , (Fig. 1 and 2). Three-layer plates of the theoretical model given by N. J. Hoff [2] are taken into consideration.

WYŻSZA SZKOŁA ROLNICZA  
POZNAŃ

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 czerwca 1970 r.