

PLASTYCZNE SKRĘCANIE PRĘTÓW

ANDRZEJ MIODUCHOWSKI (WARSZAWA)

Teoria plastyczności rozwija się w ostatnich latach bardzo szybko przynosząc coraz to nowe i coraz liczniejsze opracowania zarówno z dziedziny samej teorii, jak i dziedziny zastosowań inżynierskich. Przykładem jej stosowalności w zagadnieniach praktycznych może być m.in. problematyka plastycznego skręcania prętów.

Zagadnienie sprężystego skręcania prętów doczekało się już wielu najróżniejszych opracowań i wyczerpujących monografii (por. np. [1]), natomiast problematyka plastycznego skręcania, mimo dużej liczby prac poświęconych temu zagadnieniu, nie znalazła swego osobnego opracowania. Znajdujemy co najwyżej osobne rozdziały w monografiach poświęconych teorii plastyczności. Ponieważ jednak dziedzina ta rozwija się w ostatnich latach bardzo szybko, przeto prace te nie zawierają na ogół najnowszych wyników badań takich, jak np. zagadnienia plastycznego skręcania prętów z uwzględnieniem niejednorodności czy coraz liczniejszych rozwiązań numerycznych takich problemów. Z punktu widzenia zastosowań inżynierskich wydają się one być szczególnie ważne, gdyż z jednej strony rozwój technologii powoduje pojawienie się nowych materiałów i ich kompozycji, co w efekcie daje właśnie elementy konstrukcyjne niejednorodne, a z drugiej strony coraz szersze zastosowanie maszyn cyfrowych pozwala na szybkie i efektywne rozwiązywanie konkretnych problemów.

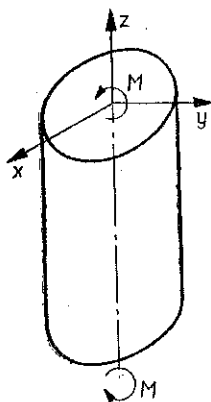
W niniejszej pracy przeglądowej, poświęconej problemowi plastycznego skręcania prętów, położono szczególny nacisk na takie właśnie zagadnienia. Praca składa się z sześciu następujących punktów:

1. Sprężyste skręcanie prętów pryzmatycznych (ten krótki rozdział wprowadzono dla nadania całości większej zwartości).
2. Nośność graniczna dla prętów jednorodnych, niejednorodnych i anizotropowych.
3. Skręcanie sprężysto-plastyczne dla prętów jednorodnych i niejednorodnych.
4. Pewne problemy optymalizacji kształtu i niejednorodności.
5. Uogólnienie problematyki plastycznego skręcania prętów:
 - a) pręty o zmiennej średnicy i pręty w kształcie torusa,
 - b) złożone obciążenia — rozciąganie i skręcanie, zginanie i skręcanie dla prętów jednorodnych i niejednorodnych.
6. Modelowanie i wyniki doświadczalne dla prętów jednorodnych i niejednorodnych.

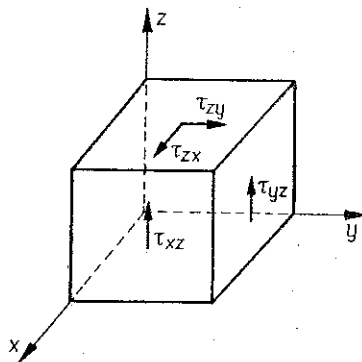
1. SPRĘŻYSTE SKRĘCANIE PRĘTÓW

1.1. Rozpatrzmy pryzmatyczny pręt skręcany w odniesieniu do prostokątnego kartezjańskiego układu współrzędnych x, y, z . Niech oś z tego układu będzie skierowana równoległe do tworzącej powierzchni bocznej pręta.

Niech pręt będzie skręcany wokół osi z równymi i przeciwnie skierowanymi parami sił o momencie M (rys. 1). Założymy, że powierzchnia boczna pręta jest wolna od naprężeń oraz że siły masowe są pomijalne. Aby nasze rozważania uprościć, ograniczymy się tylko do prętów o jednorodnych przekrojach poprzecznych.



Rys. 1



Rys. 2

Zgodnie z przyjętą przez nas metodą postępowania, zaproponowaną przez Saint-Venanta [2], niech składowe wektora przemieszczenia v wzdłuż osi x, y, z wynoszą

$$(1.1) \quad v_x = -yz\theta, \quad v_y = xz\theta, \quad v_z = \psi(x, y, \theta),$$

gdzie θ jest kątem skręcenia pręta. Funkcję ψ nazywać dalej będziemy spaczeniem przekroju poprzecznego.

Z przemieszczeń (1.1) możemy otrzymać składowe tensora deformacji:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xy} = 0, \\ \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}(-\theta y + \psi_{,x}), \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}(\theta x + \psi_{,y}). \end{aligned}$$

Jak widać, jedynymi różnymi od zera składowymi tensora deformacji są ε_{xz} i ε_{yz} . Eliminując funkcję spaczenia z tych składowych, otrzymujemy tzw. warunek nierozdzielności odkształceń

$$(1.3) \quad \varepsilon_{yz,x} - \varepsilon_{xz,y} = \theta.$$

Opierając się na prawie Hooke'a możemy otrzymać zgodnie z (1.2) dla składowych tensora naprężenia warunek

$$(1.4) \quad \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = 0.$$

Jak widać, jedynymi różnymi od zera składowymi tensora naprężeń są σ_{xz} i σ_{yz} , które dalej oznaczać będziemy przez τ_{xz} , τ_{yz} (rys. 2). Przy pominięciu sił masowych jedyne, niespełnione tożsamościowo równanie równowagi będzie miało postać

$$(1.5) \quad \tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} = 0.$$

Równanie to będzie tożsamościowo spełnione przez przyjęcie składowych τ_{xz} i τ_{yz} tensora naprężenia w następującej postaci:

$$(1.6) \quad \tau_{xz} = \Phi_{,y}, \quad \tau_{yz} = -\Phi_{,x},$$

gdzie $\Phi = \Phi(x, y, \theta)$ jest tzw. funkcją naprężenia.

Zgodnie z prawem Hooke'a mamy

$$(1.7) \quad \varepsilon_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{2G}, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{2G}.$$

Wstawiając z kolei (1.7) po uwzględnieniu (1.6) do warunku nierozdzielności odkształceń (1.3) znajdujemy

$$(1.8) \quad \Phi_{,xx} + \Phi_{,yy} = -2G\theta.$$

Otrzymaliśmy w ten sposób równanie różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu dla funkcji naprężeń. Aby określić warunki brzegowe dla tego równania, sięgnijmy do naszego założenia o wolnej od obciążeń powierzchni bocznej pręta. Zgodnie z nim w każdym punkcie konturu L dowolnego przekroju poprzecznego pręta wektor naprężenia stycznego $\tau = \tau_{xz} \mathbf{i} + \tau_{yz} \mathbf{j}$ (gdzie \mathbf{i} , \mathbf{j} są wersorami osi x i y) musi mieć kierunek styczny do tego konturu. Otrzymujemy stąd

$$(1.9) \quad \frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}} = \frac{dy}{dx}$$

wzdłuż L . Podstawiając (1.6) do (1.9) otrzymujemy

$$\Phi_{,x} dx + \Phi_{,y} dy = 0$$

na L , a stąd

$$(1.10) \quad \Phi = \text{const na } L.$$

Ponieważ interesują nas tylko pierwsze pochodne funkcji naprężeń Φ , jako dające poszukiwane składowe wektora naprężenia, możemy przyjąć, iż wzdłuż konturu L obszaru jednopójnego spełniony jest warunek

$$(1.11) \quad \Phi = 0.$$

Jak widać z powyższych rozważań, w dowolnym punkcie przekroju poprzecznego rozpatrywanego pręta wektor naprężenia stycznego $\tau = \tau_{xz} \mathbf{i} + \tau_{yz} \mathbf{j}$ jest styczny do krzywej $\Phi = \text{const}$ przechodzącej przez ten punkt; dlatego linie $\Phi = \text{const}$ nazywać będziemy trajektoriami naprężeń.

Dla danej wartości kąta θ równanie różniczkowe (1.8) wraz z warunkiem brzegowym (1.11) określa jednoznacznie funkcję naprężeń Φ . Naprężenia możemy

obliczyć teraz z (1.6), a składowe tensora deformacji z (1.7). Funkcję spaczenia ψ możemy z dokładnością do stałej obliczyć przez całkowanie dwu ostatnich równań (1.2).

Jak widać, otrzymany w ten sposób rozkład naprężeń spełnia podstawowe równania teorii sprężystości i warunki brzegowe dla problemu skręcania. Na zakończenie należy jeszcze pokazać, że otrzymane rozwiązanie istotnie odpowiada założonemu przez nas czystemu skręcaniu pręta (przez przeciwne skierowane pary sił). Innymi słowy, należy pokazać, że naprężenia działające w dowolnym przekroju pręta równoważne są tylko momentowi skręcającemu. Ponieważ zgodnie z (1.4) $\sigma_z = 0$, to zarówno siła osiowa jak i moment zginający będą tożsamościowo równe zero. Wypadkowa siła w kierunku osi x , działająca na przekrój poprzeczny pręta, spełnia warunek

$$P_x = \int_S \int \tau_{xz} ds = \int_S \int \Phi_{,y} ds = \int_L \Phi n_y dl = 0$$

zgodnie z warunkiem brzegowym (1.11); wielkość n_y oznacza składową jednostkowego wektora n prostopadłego do konturu L w kierunku osi y . Analogicznie możemy pokazać, że wypadkowa siła w kierunku osi y , działająca na przekrój poprzeczny pręta, jest równa zero. Wobec dowolności kierunków przyjętego przez nas układu (x, y) w płaszczyźnie przekroju poprzecznego pręta, wypadkowa siła styczna do tego przekroju $P = P_x i + P_y j$ jest równa zero. Wypadkowy moment skręcający, działający w przekroju poprzecznym pręta będzie, zgodnie z przyjętym przez nas zwrotem składowych wektora naprężenia, równy

$$(1.12) \quad M = \int_S \int (x\tau_{yz} - y\tau_{xz}) ds = - \int_S \int (x\Phi_{,x} + y\Phi_{,y}) ds = \\ = - \int_L \Phi (xn_x + yn_y) dl + 2 \int_S \int \Phi ds = 2 \int_S \int \Phi ds$$

po uwzględnieniu warunku brzegowego (1.11). Jak widać, znalezienie funkcji naprężeń Φ z (1.8) i warunku brzegowego (1.11) dla danego kąta skręcenia pozwala znaleźć wartość momentu skręcającego.

1.2. Zilustrujemy nasze rozważania następującym przykładem. Niech dany będzie pręt przyrównany o przekroju poprzecznym w kształcie elipsy. Brzeg tego przekroju L niech określa równanie

$$(1.13) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

gdzie $2a$ i $2b$ są odpowiednio większą i mniejszą osią elipsy.

Funkcja

$$(1.14) \quad \Phi = c \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)$$

znika na L . Spełnia ona także równanie różniczkowe (1.8), jeżeli stała

$$c = \frac{a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)} F,$$

gdzie $F = -2G\theta$. Stąd otrzymujemy następującą postać funkcji naprężeń:

$$(1.15) \quad \Phi = \frac{a^2 b^2 F}{2(a^2 + b^2)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right).$$

Podstawiając (1.15) do (1.12) obliczymy wartość momentu skręcającego

$$M = \frac{a^2 b^2 F}{a^2 + b^2} \left(\frac{1}{a^2} \int_S \int x^2 ds + \frac{1}{b^2} \int_S \int y^2 ds - \int_S \int ds \right) = - \frac{\pi a^3 b^3 F}{2(a^2 + b^2)}.$$

Obliczając stąd wartość F i wstawiając do (1.15) znajdujemy postać funkcji naprężeń

$$(1.16) \quad \Phi = - \frac{M}{\pi ab} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right).$$

Zgodnie z (1.6) możemy teraz obliczyć składowe wektora naprężenia:

$$(1.17) \quad \tau_{xz} = - \frac{2M_y}{\pi ab^3}, \quad \tau_{yz} = \frac{2M_x}{\pi a^3 b}.$$

Jest oczywiste, że maksymalne naprężenia styczne w danym przekroju występują na jego konturze L i jak łatwo zauważyć maksymalne naprężenia tego konturu występują na końcach mniejszej osi elipsy. Podstawiając $y=b$ ($x=0$) w (1.17) otrzymujemy, że absolutna wartość tego maximum jest równa

$$(1.18) \quad \tau = \frac{2M}{\pi ab^2}.$$

Wzrastającej wartości momentu skręcającego M odpowiada wzrost wartości wektora naprężenia. Odbywa się on aż do momentu, kiedy naprężenie osiągnie wartość granicy plastyczności $\tau = k$. Ta graniczna wartość momentu skręcającego wynosi

$$(1.19) \quad M^* = \frac{\pi}{2} ab^2 k.$$

W przypadku $a=b$ otrzymujemy znany wynik dla przekroju poprzecznego w kształcie koła:

$$(1.20) \quad M^* = \frac{\pi}{2} a^3 k.$$

Łatwo można obliczyć zależność pomiędzy kątem skręcenia θ a przyłożonym momentem M :

$$(1.21) \quad \theta = M \frac{a^2 + b^2}{\pi a^3 b^3 G},$$

jak również funkcję spaczenia ψ przekroju poprzecznego:

$$(1.22) \quad \psi = M \frac{(b^2 - a^2) xy}{\pi a^3 b^3 G}.$$

Jak widać, rozwiązanie problemu sprężystości skręcanego pręta o przekroju poprzecznym w kształcie elipsy było dosyć łatwe. Wynikało to oczywiście z faktu, że funkcja naprężeń Φ miała prostą postać. Należy sobie zdawać sprawę, iż na ogół tego typu

problemy są jednak dosyć trudne; nie zagłębiając się bliżej w to zagadnienie odsyłamy czytelnika do wyczerpującej monografii dotyczącej tego tematu [1].

Do problemu wyznaczania funkcji naprężeń dla pewnych, bardziej skomplikowanych przypadków jeszcze powrócimy przy okazji rozwiązywania zagadnień sprężysto-plastycznego skręcania pryzmatycznych prętów jednorodnych i niejednorodnych (por. p. 3).

1.3. Zwróćmy tu jeszcze uwagę na tzw. analogię membranową, na podstawie której można wyznaczyć funkcję naprężeń na drodze eksperymentalnej [3 i 4]. Weźmy pod uwagę mianowicie niewielki pojemnik i w jednym z jego boków wytnijmy otwór o kształcie odpowiadającym przekrojowi poprzecznemu rozpatrywanego pręta. Przykryjemy ten otwór cienką membraną umocowaną na brzegach otworu. Kiedy w pojemniku wywołamy pewne nadciśnienie p , wtedy pionowe przemieszczenia z tej membrany spełniają równanie różniczkowe

$$(1.23) \quad z_{,xx} + z_{,yy} = -\frac{P}{S}$$

i warunek brzegowy

$$(1.24) \quad z = 0$$

na brzegu L tego otworu.

Porównując równania (1.23) i (1.24) dla przemieszczeń pionowych z membrany z równaniami (1.8) i (1.11) dla funkcji naprężeń Φ widzimy, iż oba te problemy są identyczne. Stąd ze znanych wartości przemieszczeń z membrany możemy otrzymać odpowiednie wartości funkcji naprężeń zastępując wyraz $-P/S$ wielkością $-2G\theta$.

Oczywiście praktyczne znaczenie analogii membranowej nie polega na tym, że pozwala ona znaleźć funkcję naprężeń na drodze eksperymentalnej, ale na tym, że w przypadkach, kiedy dokładne jej określenie na drodze analitycznej jest pracochłonne, możemy łatwo podać jej przybliżone wartości.

Do problemu tej analogii pozwalającej w łatwy sposób wyobrazić sobie rozkład przestrzenny funkcji naprężeń Φ nad przekrojem poprzecznym rozpatrywanego pręta pryzmatycznego oraz prześledzenie jej zmiany na skutek zmieniającego się kąta skręcania θ ($\theta = \theta(M)$) powrócimy jeszcze przy okazji rozpatrywania zagadnienia sprężysto-plastycznego i plastycznego skręcania pryzmatycznego prętów jednorodnych i niejednorodnych (por. p. 6).

Ten krótki przegląd problemu sprężystego skręcania prętów pryzmatycznych wystarczy nam dalej do pełniejszego zrozumienia problemu plastycznego i sprężysto-plastycznego skręcania tych prętów i interpretacji otrzymanych rezultatów z jednej strony, zapewniając jednocześnie ciągłość naszych rozważań z drugiej.

2. PLASTYCZNE SKRĘCANIE PRĘTÓW

Rozważając w poprzednim punkcie problem sprężystego skręcania prętów pryzmatycznych obliczyliśmy m.in. graniczne wartości momentów skręcających M^* [por. (1.19) i (1.20)], przy których naprężenie osiągnie wartość granicy plastyczności

w pewnym punkcie przekroju poprzecznego. Jasne jest, że zwiększenie przyłożonego momentu M ($M > M^*$) spowoduje osiągnięcie granicy plastyczności przez naprężenie ścinające w niektórych obszarach przekroju poprzecznego i utworzenie się tzw. *stref plastycznych*. Stan taki nazywać będziemy dalej *sprężysto-plastycznym*. Dalsze zwiększenie momentu M — to zwiększenie się powierzchni stref plastycznych. Proces ten możemy kontynuować aż do chwili, kiedy moment skręcający osiągnie swoją drugą graniczną wartość (oznaczać ją dalej będziemy przez M^{**}), a materiał pręta w całym przekroju poprzecznym ulegnie uplastycznieniu. Jest to jednocześnie moment, w którym następuje proces *niepowstrzymanego płynięcia*. Moment M^{**} jest więc maksymalnym momentem skręcającym, jaki może przenieść pręt, jeśli pominiemy wzmocnienie. Niniejszy punkt poświęcony jest właśnie obliczaniu wartości tego granicznego momentu dla skręcanych prętów pryzmatycznych.

2.1. *Rozważania nasze zaczniemy od badania skręcanych prętów pryzmatycznych, jednorodnych, tzn. takich, że wartość granicy plastyczności materiału, z którego zbudowany jest pręt, jest stała:*

$$k = k(x, y, z) = \text{const.}$$

A. Przyjmijmy, że stan naprężenia, tak jak dla prętów skręcanych sprężystości, określony jest przez następujące składowe tensora naprężenia:

$$(2.1) \quad \tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y), \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y), \quad \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = 0.$$

Warunek plastyczności ma postać

$$(2.2) \quad \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k^2,$$

a jedyne niespełnione tożsamościowo równanie równowagi postać poprzednią

$$(2.3) \quad \tau_{xz, x} + \tau_{yz, y} = 0.$$

Należy oczywiście podkreślić, że zarówno warunek plastyczności Hubera-Misesa jak i warunek Treski prowadzą do tego samego równania. Ponieważ jak widać pole naprężeń możemy określić z powyższego układu równań ((2.2) i (2.3)), przeto teorie Misesa i Prandtla-Reussa prowadzą do tego samego rozwiązania w obszarach plastycznych.

W tym miejscu ograniczymy nasze rozważania tylko do prętów pryzmatycznych o jednopójnych przekrojach poprzecznych [to założenie, jak się potem okaże, nie ograniczy klasy rozpatrywanych przez nas problemów: pręty o wielospójnych przekrojach poprzecznych są szczególnym przypadkiem poprzecznej skokowej niejednorodności (por. p. 2.3)]. Przyjęcie założenia o wolnej od obciążeń powierzchni bocznej rozpatrywanego pręta i o stanie naprężenia (2.1) prowadzi do warunku brzegowego

$$(2.4) \quad \frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}} = \frac{dy}{dx}$$

wzdłuż L . Wprowadzając jak poprzednio funkcję naprężeń $\Phi = \Phi(x, y)$

$$(2.5) \quad \tau_{xz} = \Phi_{,y}, \quad \tau_{yz} = -\Phi_{,x}$$

po uwzględnieniu (2.4) możemy napisać

$$(2.6) \quad \Phi = 0 \quad \text{na } L.$$

Przyjęcie składowych naprężenia w postaci (2.5) spełnia tożsamościowo równanie równowagi (2.3), a z warunku plastyczności (2.2) otrzymujemy

$$(\Phi_{,x})^2 + (\Phi_{,y})^2 = k^2$$

lub inaczej

$$(2.7) \quad |\text{grad } \Phi| = k.$$

Jak widać, znalezienie stanu naprężenia dla plastycznie skręconego pręta sprowadza się do rozwiązania równania różniczkowego cząstkowego nieliniowego pierwszego rzędu (2.7) z warunkiem brzegowym (2.6). Opierając się na (2.5) znajdziemy składowe naprężenia w całym obszarze przekroju poprzecznego, a graniczną wartość momentu skręcającego M^{**} możemy podobnie jak poprzednio obliczyć z zależności

$$(2.8) \quad M = M^{**} = 2 \iint_S \Phi \, dx \, dy,$$

gdzie Φ jest tym razem rozwiązaniem równania (2.7). Zwróćmy jeszcze uwagę, że równanie, na podstawie którego poszukujemy funkcji naprężeń Φ , wykazuje, że ta powierzchnia ma stałe nachylenia równe const w całym obszarze S . Innymi słowy, rozwiązanie równania (2.7) z warunkiem brzegowym (2.6) jest równoważne zbudowaniu nad obszarem przekroju poprzecznego S powierzchni o stałym nachyleniu (spadku) i rzędnej na konturze L równej zero. Tak jak dla prętów skręconych sprężyste mieliśmy pewną interpretację rozwiązywanego problemu w postaci analogii membranowej Prandtla, tak tu opierając się na poprzednio stwierdzonej własności funkcji naprężeń nad rozpatrywanym konturem będziemy mieli tzw. analogię wzgórza piaskowego Nádai'a. Zagadnienie to omówimy dokładnie, w p. 6.

B. Zajmiemy się teraz szczegółowszą analizą pola naprężenia pręta uplastycznionego. Niech składowe τ_{xz} i τ_{yz} tego pola mają postać

$$(2.9) \quad \tau_{xz} = -k \sin \alpha, \quad \tau_{yz} = k \cos \alpha,$$

gdzie $\alpha = \alpha(x, y)$ oznacza nie znaną na razie funkcję; ma ona bardzo prostą interpretację geometryczną jako kąt pomiędzy osią x i prostą prostopadłą w danym punkcie przekroju poprzecznego do wektora naprężenia k . Jak widać, warunek plastyczności (2.2) spełniony jest tożsamościowo, a z równania równowagi otrzymujemy dla funkcji $\alpha = \alpha(x, y)$ równanie

$$(2.10) \quad \alpha_{,x} \cos \alpha + \alpha_{,y} \sin \alpha = 0.$$

Dla określenia charakterystyk mamy związku

$$\frac{dx}{\cos \alpha} = \frac{dy}{\sin \alpha},$$

skąd po całkowaniu otrzymujemy

$$(2.11) \quad y = x \operatorname{tg} \alpha + c(\alpha), \quad \alpha = \text{const.}$$

Jak widać, charakterystyki równania (2.10) są w płaszczyźnie x, y liniami prostymi, a kąt α zmienia się tylko od prostej do prostej. Zakładając, że mamy gładki kontur L i oznaczając przez α_0 kąt, jaki tworzy normalna do tego konturu z osią x , otrzymujemy

$$(2.12) \quad dx = -dl \sin \alpha_0, \quad dy = dl \cos \alpha_0,$$

gdzie dl jest elementarnym odcinkiem tego konturu. Podstawiając (2.12) i (2.9) do warunku brzegowego (2.4) otrzymujemy $\operatorname{ctg} \alpha_0 = \operatorname{ctg} \alpha$, czyli α (z dokładnością do wielokrotności π) jest równe α_0 . Innymi słowy, charakterystyki są liniami prostymi, prostopadłymi do konturu, a wektor naprężenia jest wzdłuż charakterystyki stały i prostopadły do niej.

Na zakończenie tego punktu należałoby jeszcze raz podkreślić, że linie największego spadku określone równaniem (2.7) są ortogonalne do linii stałego wzniosu powierzchni Φ . Linie $\Phi = \text{const}$ zgodnie z (2.6) są liniami stycznymi do wektora naprężenia k i dlatego dalej nazywać je będziemy trajektoriami naprężeń stycznych. Jak widać, rzuty linii największego spadku na płaszczyznę przekroju poprzecznego pokrywają się z charakterystykami (2.11), które często dlatego bywają nazywane liniami poślizgu.

W odniesieniu do pręta o przekroju kołowym możemy zgodnie z wyżej wypowiedzianymi uwagami stwierdzić, że liniami największego spadku są promienie tego okręgu. Przyjmując początek układu współrzędnych w środku okręgu, otrzymujemy dla funkcji naprężeń Φ zgodnie z (2.7) zależność

$$\Phi_{,r} = -k,$$

a uwzględniając warunek brzegowy (2.6) mamy ostatecznie

$$\Phi = k(a - r),$$

gdzie a jest promieniem konturu L . Wstawiając tę wartość do (2.8) otrzymujemy wartość graniczną M^{**} takiego pręta:

$$M^{**} = 2 \int_0^a k(a-r) 2\pi r dr = \frac{2}{3} \pi k a^3$$

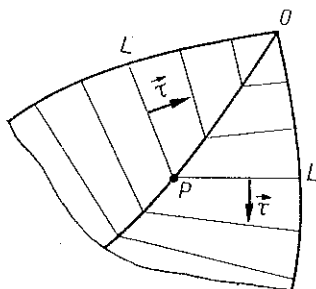
[por. wartość (1.20)].

C. Przyjęcie założenia o gładkości konturu L pozwoliło na wyciągnięcie szeregu istotnych wniosków natury jakościowej o polu naprężenia w jego otoczeniu. Teraz rozpatrzmy kolejno pole naprężenia w otoczeniu punktu styku dwu gładkich odcinków konturu: kiedy styczne do nich tworzą w punkcie przecięcia kąt wypukły lub kąt wklęsły.

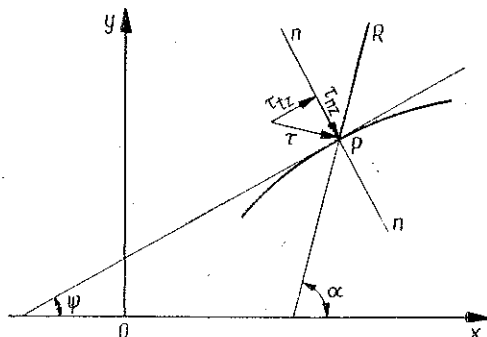
W przypadku pierwszym (rys. 3), prowadząc zgodnie z poprzednimi uwagami charakterystyki prostopadłe od konturu, otrzymujemy punkty ich wzajemnego prze-

cięcia się, np. w punkcie P . Miejsce geometryczne tych punktów nazywać będziemy linią nieciągłości pola naprężeń. Obliczając składowe wektora naprężenia, styczną i normalną do tej linii, otrzymujemy

$$(2.13) \quad \tau_{tz} = k \sin(\alpha - \psi), \quad \tau_{nz} = k \cos(\alpha - \psi),$$



Rys. 3



Rys. 4

gdzie ψ oznacza kąt nachylenia linii nieciągłości w danym punkcie do osi x (rys. 4). Zaopatrując znakiem plus i minus odpowiednio wartość kąta α po obu stronach linii nieciągłości, z warunku równości naprężeń normalnych na tej linii mamy

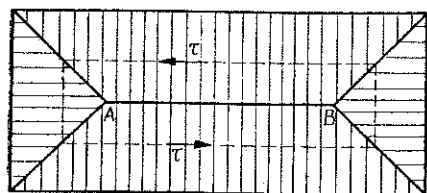
$$(2.14) \quad \psi = \frac{\alpha^+ + \alpha^-}{2}$$

z dokładnością do wielokrotności kąta π . W świetle naszych poprzednich wyników linia nieciągłości jest w danym punkcie dwusieczną kąta pomiędzy przecinającymi się w nim charakterystykami.

Przy przejściu przez linię nieciągłości składowa styczna τ_{tz} zmienia swą wartość, przy czym skok wynosi

$$(2.15) \quad [\tau_{tz}] = \tau_{tz}^+ - \tau_{tz}^- = 2k \sin \frac{\alpha^+ - \alpha^-}{2} = 2k \sin \frac{[\alpha]}{2}.$$

Jak widać, maksymalna jego wartość wynosząca $2k$ odpowiada kątowi π , tzn. ma miejsce w przypadku, gdy przecinające się charakterystyki wychodzą z dwu równoległych do siebie brzegów konturu.

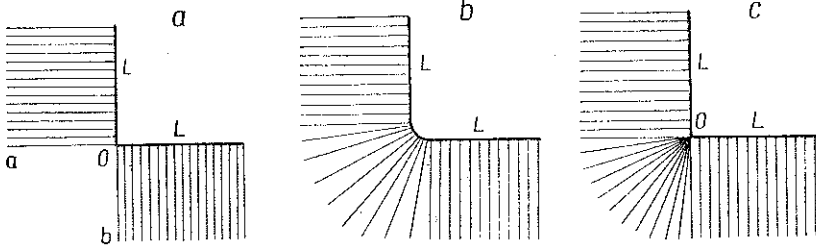


Rys. 5

Na rys. 5, przedstawiającym rozwiązanie dla pola naprężeń przy plastycznym skręcaniu pręta o przekroju poprzecznym w kształcie prostokąta, mamy ten przypadek dla odcinka AB . Oczywiście, zgodnie z (2.7) układ charakterystyk i linii nieciągłości pola naprężeń odpowiada rzutowi powierzchni o stałym spadku

zbudowanej nad polem przekroju poprzecznego S na ten przekrój; linią przerywaną oznaczono trajektorię naprężeń stycznych.

W przypadku kiedy styczne do gładkich odcinków konturu tworzą w punkcie ich przecięcia kąt wklęsły (rys. 6a), potrafimy zbudować wykres charakterystyk, prowadząc je prostopadłe do konturu (poza obszarem aob). Traktując ten przypadek

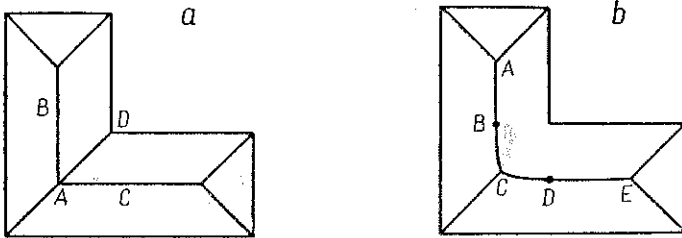


Rys. 6

jako przejście graniczne od konturu zawierającego odcinek okręgu (rys. 6b), otrzymujemy w rezultacie dla obszaru aob wachlarz charakterystyk, wychodzący z punktu o (rys. 6c).

Obliczanie nośności granicznej dla skręcanych prętów o różnych przekrojach poprzecznych jest wyczerpująco omówione w pracy [92].

D. Dotychczasowe rozważania odnosiły się tylko do zbadania ogólnych własności pola naprężeń oraz ich budowy w otoczeniu konturu. Informacje te w zasadzie



Rys. 7

już wystarczają do zbudowania pełnego rozwiązania w naprężeniach. Niemniej jednak należy jeszcze w tym miejscu podkreślić pewien fakt; zwróćmy mianowicie uwagę na dwa rozwiązania tego samego problemu plastycznie skręcanego pręta o przekroju poprzecznym w kształcie litery L (rys. 7). Jak widać, w obu przypadkach było możliwe zbudowanie nad tym samym obszarem S dwu różnych powierzchni spełniających równanie (2.7) z warunkiem brzegowym (2.4), co w konsekwencji daje oczywiście dwie różne wartości momentu maksymalnego M^{**} . Rozwiązaniem właściwym jest to, które jest zgodnie z kinematyką ruchu. Gdy kinematyka ruchu nie jest badana, ze zbioru możliwych rozwiązań należy wybrać to, które daje największą wartość momentu granicznego (największą objętość bryły pod powierzchnią stałego spadku). Zgodnie z tym kryterium wyboru i zgodnie z naszymi poprzednimi rozważaniami o układzie charakterystyk w otoczeniu kąta wklęsłego na konturze rozwiązaniem prawidłowym jest przedstawione na rys. 7b.

W wielu przypadkach jednak trudno jest ocenić natychmiast, które z przedstawionych rozwiązań statycznych jest poprawne. Dlatego nieodzowne staje się zbadanie kinematyki ruchu. Problem ten omówimy dokładnie nieco dalej, obejmując jednocześnie swymi rozważaniami znacznie szerszą klasę przypadków prętów skręcanych, mianowicie tzw. pręty skokowo-niejednorodne (p. 2.3). Jako prosty wniosek otrzymamy sprzeczność kinematyki ruchu dla rozwiązania przedstawionego na rys. 7a.

2.2. *Rozpatrzmy teraz przypadek skręcanego pręta pryzmatycznego niejednorodnego, to znaczy takiego, że wartość granicy plastyczności jest funkcją*

$$k = k(x, y, z).$$

Jednakże przyjęcie klasycznych założeń Saint-Venanta odnośnie przemieszczeń (1.1) prowadzi do konieczności ograniczenia się do przypadku, gdy granica plastyczności k nie zależy od osi z . Istotnie, założenie Saint-Venanta prowadzi do zależności $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = 0$ (1.4). Z równań równowagi mamy $\tau_{xz, z} = 0$ i $\tau_{yz, z} = 0$ (por. rys. 2). Warunek plastyczności może być teraz spełniony jednocześnie na raz w całym pręcie tylko dla $k_{, z} = 0$.

Tak więc rozpatrując pręty niejednorodne będziemy mieli na myśli pręty o niejednorodności poprzecznej:

$$(2.16) \quad k = k(x, y).$$

A. Zgodnie z poprzednim (2.1) stan naprężenia w plastycznie skręcanym pręcie jest scharakteryzowany przez składowe $\tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y)$ i $\tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y)$ spełniające warunek plastyczności

$$(2.17) \quad \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k^2(x, y)$$

[por. (2.2)] i tak jak poprzednio równanie równowagi

$$(2.18) \quad \tau_{xz, x} + \tau_{yz, y} = 0.$$

Przyjęcie założenia o wolnej od obciążeń powierzchni bocznej rozpatrywanego pręta daje warunek brzegowy

$$(2.19) \quad \frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}} = \frac{dy}{dx}.$$

Wprowadzając jak poprzednio funkcję naprężenia Φ otrzymujemy analogicznie

$$(2.20) \quad |\text{grad } \Phi| = k(x, y)$$

z warunkiem na konturze L

$$(2.20') \quad \Phi = 0$$

oraz graniczną wartość momentu skręcającego

$$M^{**} = 2 \iint_S \Phi \, dx \, dy,$$

gdzie Φ jest rozwiązaniem równania (2.20) z warunkiem (2.20') dla danego rozkładu niejednorodności.

B. Analiza pola naprężeń dla pręta o ciągłej niejednorodności poprzecznej może być przeprowadzona podobnie jak poprzednio; przyjmując

$$(2.21) \quad \tau_{xz} = -k(x, y) \sin \alpha, \quad \tau_{yz} = k(x, y) \cos \alpha,$$

otrzymujemy z (2.18) [(2.17) jest spełnione tożsamościowo]

$$-k_{,x} \sin \alpha + k_{,y} \cos \alpha - k(\alpha_{,x} \cos \alpha + \alpha_{,y} \sin \alpha) = 0$$

[przedstawiając $k = \text{const}$ otrzymujemy (2.10)]. Odpowiadające mu równanie charakterystyk jest następujące:

$$-\frac{dx}{\sin \alpha} = \frac{dy}{\cos \alpha} = \frac{dk}{k\alpha_{,x} \cos \alpha + k\alpha_{,y} \sin \alpha};$$

przekształcamy je do postaci [5]

$$(2.22) \quad ky'' + (1+y'^2)(k_{,x}y' - k_{,y}) = 0.$$

Jest to równanie zwyczajne, nieliniowe drugiego rzędu i jego rozwiązanie $y = y(x, p, q)$, gdzie p i q są stałymi całkowania, w sposób ścisły możliwe jest tylko w bardzo szczególnych przypadkach niejednorodności. Stałe całkowania wyznaczmy oczywiście z tych samych warunków brzegowych, jakie uzyskaliśmy dla pręta jednorodnego: kontur jest trajektorią naprężeń stycznych oraz linie poślizgu są do niego ortogonalne.

Problemami plastycznego skręcania prętów pryzmatycznych o ciągłej niejednorodności poprzecznej zajmowano się dotychczas mało. Pierwszym ogólnym studium o nośności granicznej takich prętów była praca A. I. KUŹNIECOWA [7], który analizował układ równań (2.17) i (2.18). Posługując się metodą półodwrotną wykazał on m.in., że w przypadku gdy granica plastyczności zależy jedynie od odległości od konturu; to wektor naprężenia stycznego jest prostopadły do normalnej do konturu. Dla takiego przypadku niejednorodności oraz dla prostych przekrojów poprzecznych takich, jak np. prostokąt, można było znaleźć w formie zamkniętej formuły na naprężenia oraz na moment graniczny. Pokrewne problemy rozpatrywano również w pracach M. GALOSA [8] i M. ŻYCKOWSKIEGO [9]. W pracy [6] rozpatrzono szczegółowo przypadek plastycznego pręta niejednorodnego o przekroju poprzecznym w kształcie wycinka kołowego. Niejednorodność przyjęta została w postaci funkcji zależnej w sposób wykładniczy tylko od odległości od wierzchołka tego wycinka. Opierając się na (2.22) określono linie poślizgu, znaleziono funkcję naprężeń Φ i nośność graniczną M^{**} . Z nieco odmiennym podejściem spotykamy się w pracy J. RYCHLEWSKIEGO [10]; dla pręta o dowolnej niejednorodności poprzecznej poszukuje się naprężeń w postaci szeregów potęgowych, rozwijając funkcję niejednorodności materiału w szereg wokół brzegu przekroju.

2.3. *Rozpatrzmy teraz pewien szczególny przypadek plastycznie skręcanych prętów niejednorodnych, tzw. przypadek skokowej poprzecznej niejednorodności.*

Wyobraźmy sobie pręt złożony z kilku pryzmatycznych części o różnych granicach plastyczności; przyjmijmy też, że wytrzymałość łączy pomiędzy poszczególnymi częściami jest nie mniejsza niż granica plastyczności którejkolwiek z tych części.

W przekroju poprzecznym takiego pręta mamy do czynienia z obszarami o stałych granicach plastyczności, które zmieniają się skokowo przy przejściu z jednego obszaru do drugiego.

W świetle naszych poprzednich rozważań o plastycznie skręcanych prętach jednorodnych uzyskamy pełną informację o polu naprężeń prętów skokowo niejednorodnych, rozpatrując warunki na linii kontaktu stref o różnych granicach plastyczności. Ograniczymy się tylko do prętów złożonych z dwu różnych części. Analiza stanu naprężenia dla pręta złożonego z kilku różnych części przebiegać będzie w sposób identyczny: zawsze na linii kontaktu będziemy mieli do czynienia z materiałem o wyższej i niższej granicy plastyczności.

1.A. Przyjmijmy krzywoliniowy ortogonalny układ współrzędnych α, β . Niech linia kontaktu obszarów o różnych granicach plastyczności L_{\pm} pokrywa się z linią β ($\alpha = \text{const}$) tego układu współrzędnych [11]. Wektor naprężenia w tych obszarach o granicach plastyczności K_+, K_- będzie dalej oznaczany odpowiednio przez τ^+ i τ^- .

Ponieważ po obu stronach linii L_{\pm} materiał musi być uplastyczniony, to moduły tych wektorów są następujące:

$$(2.23) \quad |\tau^+|^2 = (\tau_{\alpha z}^+)^2 + (\tau_{\beta z}^+)^2 = k_+^2, \quad |\tau^-|^2 = (\tau_{\alpha z}^-)^2 + (\tau_{\beta z}^-)^2 = k_-^2.$$

Jak widać, linia nieciągłości granicy plastyczności jest zawsze linią nieciągłości naprężeń. Z warunku ciągłości składowych normalnych wektora naprężenia otrzymujemy

$$\tau_{\alpha z}^+ = \tau_{\alpha z}^- = \tau_{\alpha z}.$$

Zgodnie z (2.23) skok składowej stycznej wektora naprężenia na linii kontaktu wynosi

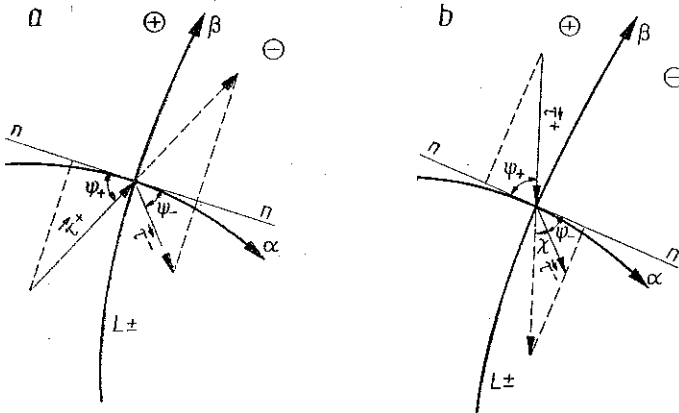
$$(2.24) \quad |\tau_{\beta z}^+ - \tau_{\beta z}^-| = \begin{cases} |(k_+^2 - \tau_{\alpha z}^2)^{1/2} - (k_-^2 - \tau_{\alpha z}^2)^{1/2}|, \\ |(k_+^2 - \tau_{\alpha z}^2)^{1/2} + (k_-^2 - \tau_{\alpha z}^2)^{1/2}|. \end{cases}$$

Według przyjętej terminologii w pracy [11] przypadek, któremu odpowiada znak minus w (2.24), będziemy nazywali linią nieciągłości pierwszego rodzaju, a przypadek odpowiadający znakowi plus — linią nieciągłości drugiego rodzaju. Linia kontaktu L_{\pm} będzie z reguły linią nieciągłości pierwszego rodzaju powstałą tylko na skutek niejednorodności (rys. 8b). Nieciągłość drugiego rodzaju odpowiada specjalnemu przypadkowi, kiedy linia kontaktu pokrywa się z linią nieciągłości pola naprężeń, która powstałaby w materiale jednorodnym (rys. 8a). Przyjmując np., że $K_+ > K_-$ i kierunek wektora τ^- za znane, z łatwością możemy określić kierunek wektora τ^+ . Dla rozwiązywania konkretnych problemów brzegowych potrzeba znać wartości kątów ψ_+, ψ_- i λ (rys. 8b). Zależności pomiędzy nimi dla linii nieciągłości pierwszego rodzaju otrzymuje się łatwo z warunku ciągłości składowych normalnych wektora naprężenia:

$$(2.25) \quad \psi_+ = \arccos \left(\frac{k_-}{k_+} \cos \psi_- \right), \quad \lambda = \psi_+ + \psi_-.$$

1.B. Podstawowy problem przy budowaniu rozwiązania dla plastycznie skręcanych prętów skokowo niejednorodnych polega oczywiście na znalezieniu linii nie-

ciągłości pola naprężeń różnych od linii kontaktu L_{\pm} . Jeżeli linia nieciągłości granic plastyczności przecina kontur w punkcie A , to dodatkowa linia nieciągłości naprężeń rozpoczyna się zazwyczaj z tego punktu [11]. Przytoczymy tu dwa typowe przypadki rozważone w wyżej cytowanej pracy.



Rys. 8

Niech regularna linia L_{\pm} , oddzielająca materiały o różnych granicach plastyczności $K_+ > K_-$ i przecinająca regularny łuk konturu zewnętrznego L w punkcie A leży po prawej stronie normalnej do tego konturu (patrzmy od konturu) w tym punkcie (rys. 9). Wtedy przez obszar materiału mocniejszego przechodzi linia nieciągłości l . Opierając się na zależnościach (2.25) łatwo znajduje się równanie różniczkowe tej linii:

$$(2.26) \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \left\{ \varphi_+ + \alpha + \arccos \left[\frac{k_-}{k_+} \cos (\varphi_- - \alpha) \right] \right\},$$

gdzie przyjęto oznaczenia wg rys. 9. Jeżeli kontur L i linia kontaktu L_{\pm} są liniami prostymi, to również linia l jest prosta. Ważnym dla zastosowań jest przypadek, kiedy linia L_{\pm} pokrywa się z normalną do konturu. Wtedy równanie (2.26) przyjmuje postać

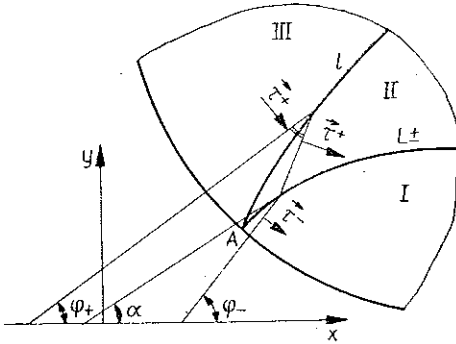
$$(2.27) \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\varphi_+ + \alpha_A + \kappa),$$

gdzie

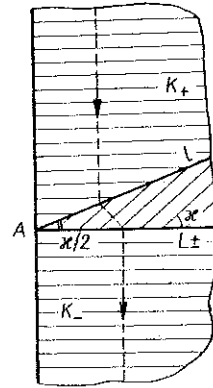
$$(2.28) \quad \kappa = \arccos \frac{k_-}{k_+}.$$

Szczególne rozwiązanie tego przypadku przedstawione jest na rys. 10; linią przerywaną oznaczono trajektorię naprężeń stycznych (jest to oczywiście rzut linii stałego wzniosu powierzchni funkcji naprężeń; do problemu tego powrócimy jeszcze w p. D). Jak widać, dla $K_- \rightarrow K_+$ linia l dąży do linii kontaktu L_{\pm} [zgodnie z (2.28)] i w granicznym przypadku otrzymujemy znane już rozwiązanie dla pręta jednorodnego.

Trochę bardziej skomplikowane rozwiązanie otrzymamy w przypadku, kiedy linia normalna do konturu w punkcie, z którego wychodzi linia kontaktu L_{\pm} , leży w obszarze materiału o niższej granicy plastyczności (rys. 11). Wtedy w zależności

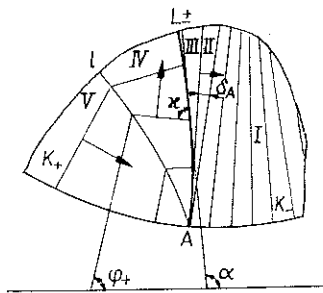


Rys. 9

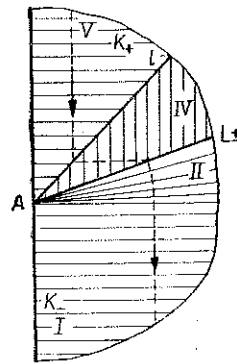


Rys. 10

od wzajemnego ustawienia linii L_{\pm} i konturu L w obszarze materiału o wyższej granicy plastyczności może pojawić się linia nieciągłości naprężeń l (jak na rys. 11) lub otrzymujemy rozwiązanie ciągle. Odsyłając czytelnika do pracy [11], gdzie zagadnienia te omówiono wyczerpująco, zajmijmy się tu szczególnym przypadkiem przedstawionym na rys. 11. Dla stałych wartości kątów φ_+ i α linia nieciągłości l



Rys. 11

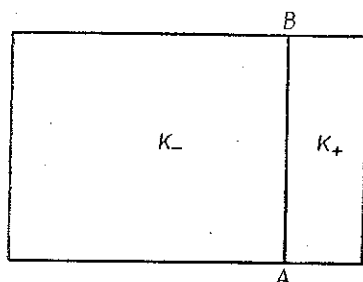


Rys. 12

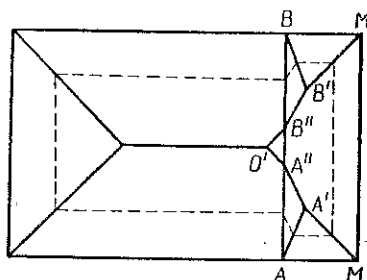
jest linią prostą (rys. 12). W strefie materiału o niższej granicy plastyczności mamy dwa obszary: w obszarze I linie poślizgu stanowią rodzinę prostych równoległych prostopadłych do konturu; w obszarze II linie te tworzą wachlarz o wierzchołku w punkcie A . W strefie materiału o wyższej granicy plastyczności linia nieciągłości l pola naprężeń przebiega tak, jak w materiale jednorodnym, tzn. jest dwusieczną kąta pomiędzy liniami poślizgu z obszarów V i IV. Oczywiście jednocześnie muszą być spełnione na brzegach obszarów V i IV następujące warunki: linie poślizgu są prostopadłe do konturu L , a na linii kontaktu L_{\pm} naprężenia normalne są ciągłe.

Kiedy linia kontaktu dąży do normalnej do konturu w punkcie A , obszar II zanika i rozwiązanie przedstawione na rys. 12 pokrywa się z przedstawionym na rys. 10.

1. C. W charakterze przykładu rozpatrzmy tak jak poprzednio (rys. 5) pryzmatyczny pręt skręcany o przekroju prostokątnym. Niech składa się on z dwu obszarów o różnych granicach plastyczności $K_+ > K_-$ i niech obszar materiału o wyższej gra-



Rys. 13



Rys. 14

nicy plastyczności przedstawia się, jak na rys. 13. Zgodnie z naszymi poprzednimi rozważaniami (rys. 10) z punktu A wychodzi w głąb materiału linia nieciągłości naprężeń nachylona pod kątem $\kappa/2$ do linii kontaktu L_{\pm} . Z wierzchołka M też wychodzi linia nieciągłości naprężeń (rys. 5). Obie te linie przecinają się w punkcie A' (rys. 14). Linie $A'A''$ znajdujemy z łatwością jako dwusieczną kąta, pod jakim przecinają się ze sobą linie poślizgu z jednej strony prostopadłe do konturu MM a z drugiej nachylone do linii kontaktu pod kątem κ . Układ linii nieciągłości $O'A''$ i $O'B''$ pola naprężeń w materiale słabszym otrzymujemy łatwo, opierając się na następującej uwadze: ponieważ od strony materiału mocniejszego linie poślizgu są prostopadłe do odcinka kontaktu $A'B''$ (składowa normalna naprężenia względem tego odcinka jest równa zero), to i linie poślizgu po drugiej stronie (w materiale słabszym) też muszą być prostopadłe do odcinka $A'B''$; linie $O'A''$ i $O'B''$ otrzymujemy zatem jako dwusieczną kąta, pod jakim przecinają się linie poślizgu prostopadłe z jednej strony do $A'B''$ a z drugiej do konturu (por. rys. 55 w punkcie 6).

Rozpatrzony tu przykład skręcanego pręta jest szczególnym przypadkiem przykładu przedstawionego w pracy [12], rys. 7, gdzie rozpatrzono problem plastycznego skręcania prętów pryzmatycznych skokowo niejednorodnych o przekroju poprzecznym w kształcie prostokąta.

1. D. Zgodnie z naszymi poprzednimi rozważaniami (2.7), oznaczając przez S_i część obszaru przekroju poprzecznego o stałej wartości granicy plastyczności K_i , możemy napisać

$$(2.29) \quad |\text{grad } \Phi| = k_i \quad \text{w } S_i.$$

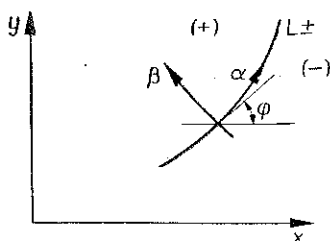
Innymi słowy, powierzchnia reprezentująca funkcję naprężeń Φ jest powierzchnią stałego spadku, różnego w każdym z obszarów S_i . W [11] pokazano, że powierzchnię tę można przyjąć za ciągłą w całym obszarze przekroju poprzecznego S [przy

spełnieniu (2.29)]; przyjmując jednocześnie $\Phi=0$ na konturze L otrzymujemy graniczną wartość momentu skręcającego podobnie jak poprzednio:

$$(2.30) \quad M = M^{**} = 2 \int_S \int \Phi \, ds.$$

Zwróćmy tu również uwagę na dwa istotne wnioski wypływające z teorii plastycznego skręcania prętów skokowo niejednorodnych. Zauważmy, że w takim przypadku nie ma potrzeby oddzielnego analizowania prętów o wielospójnych przekrojach poprzecznych. Są one po prostu szczególnym przypadkiem, kiedy $K_i=0$ w pewnych obszarach S_i . Odpowiada to wypełnieniu pryzmy S_i ciałem nie przenoszącym naprężeń stycznych — cieczą idealną, nie wpływającą na skręcanie pręta. Jednorodnie, plastycznie skręcane pręty o wielospójnych przekrojach poprzecznych są szczególnym przypadkiem prętów skokowo niejednorodnych. Dlatego wzór określający ich nośność graniczną jest taki sam, jak dla prętów jednorodnych jednospojnych [por. (2.8) i (2.30)] po uwzględnieniu poprzednich uwag o powierzchni Φ dla prętów skokowo niejednorodnych. Bliższą analizą kształtu takich powierzchni zajmiemy w punkcie 6 na podstawie nieco odmiennego podejścia do tego zagadnienia.

Już poprzednio w (2.1) zwróciliśmy uwagę na niejednoznaczność rozwiązania zadania w naprężeniach i problemu zbudowania powierzchni o stałym spadku nad



Rys. 15

danym przekrojem poprzecznym. Wybór właściwego układu linii nieciągłości pola naprężeń dla skręcanego pręta w stanie granicznym, zapewniającego maximum momentu M^{**} w odniesieniu do prętów niejednorodnych, jest jeszcze bardziej skomplikowany niż dla prętów jednorodnych. Zgodnie z poprzednimi uwagami trudności te można ominąć rozpatrując kinematykę ruchu tych prętów. Rozwiązaniem właściwym będzie to, które jest z nią zgodne.

2. A. Wprowadźmy krzywoliniowy układ ortogonalny α, β , z tak, że oś współrzędnych α pokrywa się z linią nieciągłości naprężeń L_{\pm} , natomiast oś β skierowana jest wzdłuż osi pręta. Znaki plus i minus niech odnoszą się odpowiednio do obszarów po obu stronach tej linii (rys. 15). Oznaczając

$$X = x \cos \varphi + y \sin \varphi, \quad Y = y \cos \varphi - x \sin \varphi,$$

gdzie

$$x = x(\alpha, \beta), \quad y = y(\alpha, \beta), \quad \varphi = \varphi(\alpha, \beta),$$

podstawowe założenia kinematyczne Saint-Venanta przedstawimy w postaci składowych wektora prędkości przemieszczenia:

$$(2.31) \quad V^{\alpha} = -\frac{1}{h_{\alpha}} \theta_z Y, \quad V^{\beta} = \frac{1}{h_{\beta}} \theta_z X, \quad V_z = w(x, y),$$

gdzie θ oznacza kąt skręcenia pręta oraz w deplancję przekroju poprzecznego. Ponieważ w przyjętym przez nas układzie $h_x = 1$, to niezerowe składowe tensora prędkości odkształcenia są następujące:

$$(2.32) \quad \dot{\epsilon}_{\beta z} = \theta X + \frac{1}{h_\beta} w_{,\beta}, \quad \dot{\epsilon}_{\alpha z} = -\theta Y + \frac{1}{h_\alpha} w_{,\alpha}.$$

Jeżeli teraz na linii L_\pm : $w^{(+)} \neq w^{(-)}$, wzdłuż linii nieciągłości naprężeń występowałby skok deplancji

$$w = w^{(-)} + (w^{(+)} - w^{(-)}) H(\beta),$$

to $w_{,\alpha}$ oraz $w_{,\beta}$ możemy przedstawić następująco [13]:

$$(2.33) \quad w_{,\alpha} = w_{,\alpha}^{(-)} + (w_{,\alpha}^{(+)} - w_{,\alpha}^{(-)}) H(\beta), \\ w_{,\beta} = w_{,\beta}^{(-)} + (w_{,\beta}^{(+)} - w_{,\beta}^{(-)}) H(\beta) + v_\beta (w^{(+)} - w^{(-)}) \delta(\beta),$$

gdzie $H(\beta)$ jest funkcją Heaviside'a, a $\delta(\beta)$ funkcją Dirac'a. Ponieważ w przyjętym przez nas układzie

$$(2.34) \quad \dot{\epsilon}_{\alpha z} \tau_{\beta z} - \dot{\epsilon}_{\beta z} \tau_{\alpha z} = 0,$$

to uwzględniając (2.32) i (2.33) mamy

$$(2.35) \quad -\theta Y \tau_{\beta z} - \theta X \tau_{\alpha z} + \frac{1}{h_\alpha} [w_{,\alpha}^{(-)} + (w_{,\alpha}^{(+)} - w_{,\alpha}^{(-)}) H(\beta)] \tau_{\beta z} - \\ - \frac{1}{h_\beta} [w_{,\beta}^{(-)} + (w_{,\beta}^{(+)} - w_{,\beta}^{(-)}) H(\beta)] \tau_{\alpha z} + v_\beta (w^{(+)} - w^{(-)}) \tau_{\alpha z} \delta(\beta) = 0.$$

Ponieważ założyliśmy, że linia L_\pm jest linią nieciągłości naprężeń, $|\tau_{\alpha z}| > 0$, to wzdłuż niej jak widać $|(w^{(+)} - w^{(-)})| = 0$; jednocześnie $\tau_{\alpha z}^{(+)} = -\tau_{\alpha z}^{(-)}$. Skąd ostatecznie

$$(2.36) \quad \lambda^{(+)} = \lambda^{(-)} = 0,$$

gdzie λ jest parametrem stowarzyszonego prawa płynięcia.

2. B. Jak wiadomo [14], znając deplancję przekroju poprzecznego w punkcie P_0 na linii nieciągłości naprężeń możemy obliczyć jej wartość w punkcie R :

$$(2.37) \quad w_R = w_{P_0} + \int_{P_0}^R \frac{dw}{ds} + \theta en,$$

gdzie (rys. 16) $e = \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_s$, $n = r_P - r_R$ [odległość n jest zdefiniowana dodatnio, jeżeli jest mierzona od punktu R do punktu P zgodnie z kierunkiem wektora \mathbf{e}_r]. Jeśli linia nieciągłości naprężeń L_\pm ma przedstawienie parametryczne unormowane: $x = x(s)$, $y = y(s)$, to

$$\frac{dw}{ds} - \theta (\dot{x}y - x\dot{y}) + \lambda (\tau_{xz} \dot{x} + \tau_{yz} \dot{y}).$$

Możemy teraz określić wartość deplancji w punkcie R , uwzględniając (2.36) (por. [90]):

$$(2.38) \quad w_R = \theta \int_{P_0}^R (y dx - x dy) + \theta en + w_{P_0}.$$

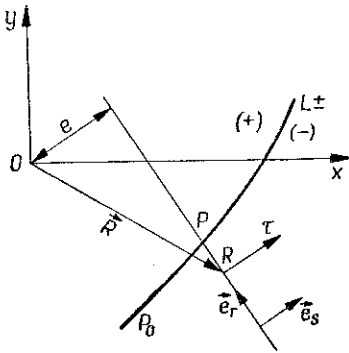
2. C. Pole szybkości v_i nazywamy kinematycznie dopuszczalnym, kiedy spełnia ono następujące warunki: a) warunek nieściśliwości $v_{i,i} = 0$, b) równanie stanu, c) warunki brzegowe oraz d) warunek dodatności dysypacji mocy $\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \geq 0$.

Przyjęcie założeń Saint-Venanta (2.31) odnośnie prędkości przemieszczeń spełnia warunki a) i c), z warunku b) mamy (2.38). Pozostaje tylko sformułowanie kryterium zapewniającego spełnienie warunku d).

TWIERDZENIE. *Warunkiem koniecznym i wystarczającym dodatności dysypacji energii w danym punkcie jest spełnienie nierówności*

$$(2.39) \quad n \left(1 + \frac{R_n}{R_b} \right) \geq 0,$$

gdzie n jest poprzednio zdefiniowaną odległością rozpatrywanego punktu od linii nieciągłości naprężeń mierzona wzdłuż linii poślizgu oraz R_n i R_b są odpowiednio odległościami od linii nieciągłości i rozpatrywanego punktu do środka krzywizny mierzonymi wzdłuż tej samej linii poślizgu [15].



Rys. 16

Linia nieciągłości granicy plastyczności jest zawsze linią nieciągłości naprężeń [11]. Umożliwia nam to oczywiście badanie deplanacji na linii kontaktu w taki sam sposób, jak na linii nieciągłości naprężeń. Tak samo jak w przypadku 2.A wprowadzimy krzywoliniowy układ ortogonalny α, β, z . Znaki K_- i K_+ niech oznaczają odpowiednio granice plastyczności materiału «słabszego» i «mocniejszego».

Wprowadźmy również następujące oznaczenia:

$$A \equiv -\theta Y \tau_{\beta z} - \theta X \tau_{\alpha z} + \frac{1}{h_\alpha} [w_{,\alpha}^{(-)} + (w_{,\alpha}^{(+)} - w_{,\alpha}^{(-)}) H(\beta)] \tau_{\beta z} - \\ - \frac{1}{h_\beta} [w_{,\beta}^{(-)} + (w_{,\beta}^{(+)} - w_{,\beta}^{(-)}) H(\beta)] \tau_{\alpha z}$$

oraz

$$B \equiv -\theta X \tau_{\alpha z} - \frac{1}{h_\beta} [w_{,\beta}^{(-)} + (w_{,\beta}^{(+)} - w_{,\beta}^{(-)}) H(\beta)] \tau_{\alpha z}.$$

Rozpatrzmy trzy charakterystyczne przypadki wzajemnego układu linii nieciągłości granicy plastyczności oraz pola naprężeń, opierając się na zależnościach (2.33) i (2.35).

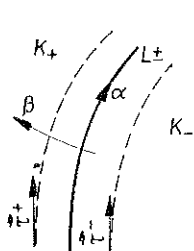
3. A. Niech linia L_\pm oraz pole naprężeń będą określone jak na rys. 17. Zgodnie z przyjętymi oznaczeniami na tej linii dla materiału słabszego (K_-) spełniony jest warunek

$$A + \nu_\beta (w^{(+)} - w^{(-)}) \tau_{\alpha z}^- \delta(\beta) = 0.$$

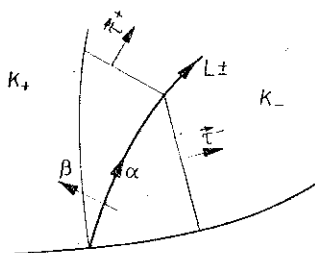
Ponieważ $\tau_{\alpha z}^{(-)} \neq 0$, to $(w^{(+)} - w^{(-)}) = 0$ na linii L_{\pm} . Analogicznie dla materiału mocniejszego (K_{+}) na linii kontaktu

$$A + \nu_{\beta} (w^{(+)} - w^{(-)}) \tau_{\alpha z}^{(+)} \delta(\beta) = 0.$$

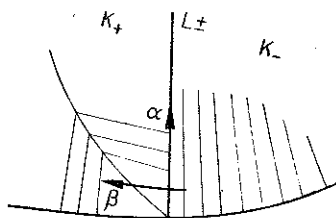
Ponieważ $\tau_{\alpha z}^{(+)} \neq 0$, to $(w^{(+)} - w^{(-)}) = 0$ na linii L_{\pm} . Widać, że dla sytuacji przedstawionej na rys. 17 wzdłuż linii nieciągłości granicy plastyczności skok deplacji przekroju poprzecznego nie występuje, czyli $w^{(+)} = w^{(-)}$.



Rys. 17



Rys. 18



Rys. 19

3. B. Niech linia L_{\pm} oraz pole naprężeń są takie, jak to przedstawiono na rys. 18. Dla materiału słabszego (K_{-}) na linii kontaktu

$$B + \nu_{\beta} (w^{(+)} - w^{(-)}) \tau_{\alpha z}^{(-)} \delta(\beta) = 0.$$

Ponieważ $\tau_{\alpha z}^{(-)} \neq 0$, to $(w^{(+)} - w^{(-)}) = 0$ na linii L_{\pm} . Analogicznie dla materiału mocniejszego (K_{+}) na linii kontaktu

$$B + \nu_{\beta} (w^{(+)} - w^{(-)}) \tau_{\alpha z}^{(+)} \delta(\beta) = 0.$$

Ponieważ $\tau_{\alpha z}^{(+)} \neq 0$, to $(w^{(+)} - w^{(-)}) = 0$ na linii L_{\pm} . Widać, że dla sytuacji przedstawionej na rys. 18 wzdłuż linii nieciągłości granicy plastyczności skok deplacji przekroju poprzecznego nie występuje, czyli $w^{(+)} = w^{(-)}$.

3. C. Niech linia L_{\pm} oraz pole naprężeń są takie, jak to przedstawiono na rys. 19. Dla materiału słabszego (K_{-}) na linii kontaktu mamy

$$A + \nu_{\beta} (w^{(+)} - w^{(-)}) \tau_{\alpha z}^{(-)} \delta(\beta) = 0.$$

Ponieważ $\tau_{\alpha z}^{(-)} = 0$, to $|w^{(+)} - w^{(-)}| \geq 0$ na linii L_{\pm} . Dla materiału mocniejszego (K_{+}) na linii kontaktu

$$A + \nu_{\beta} (w^{(+)} - w^{(-)}) \tau_{\alpha z}^{(+)} \delta(\beta) = 0.$$

Ponieważ $\tau_{\alpha z}^{(+)} \neq 0$, to $(w^{(+)} - w^{(-)}) = 0$. Jak widać, dla takiego przypadku na kontakcie materiałów o różnych granicach plastyczności może wystąpić skok deplacji.

Rozpatrywanie kinematyki ruchu skręcanego pręta przyzmatycznego ma na celu wybór rozwiązania dającego maksimum wartości momentu. Istotne więc jest podanie warunków poprawności rozwiązania statycznego dla danego przekroju poprzecznego, wynikających z analizy kinematyki.

a) Jeżeli w badanym obszarze linie poślizgu przecinałyby dwie linie nieciągłości naprężeń, to kinematyka tego obszaru będzie sprzeczna. Istotnie, wynika to z (2.38).

Wartość deplanacji moglibyśmy wyznaczyć z warunków brzegowych wzdłuż tych linii; ponieważ jednak zagadnienie Cauchy'ego w odniesieniu do każdej z nich daje jednoznaczne rozwiązanie w badanym obszarze, dochodzimy do sprzeczności.

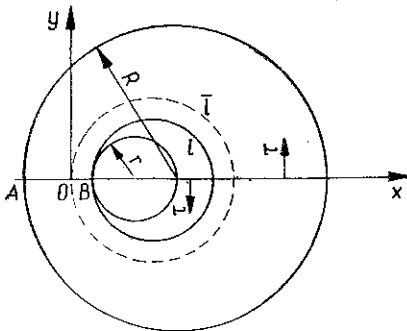
b) Kinematycznie dopuszczalne pole prędkości musi spełniać warunki podane w C. Zgodnie z tymi warunkami pole szybkości (2.31) musi spełniać (2.39). Ponieważ $1 + R_n/R$ jest stale nieujemne, powinno zachodzić $n \geq 0$. Należy zbadać także moc dysypacji energii dla linii nieciągłości prędkości v_z . Kiedy linia α jest linią nieciągłości deplanacji, to zwrot wektora naprężeń stycznych $\tau = \tau_{\alpha z} e_z$ musi być zgodny ze zwrotem wektora skoku $[\mathbf{v}] = [w] e_z$. Jako przykład rozpatrzmy pręt kołowy z mimośrodowym otworem (rys. 20). Poprawne rozwiązanie ma linię nieciągłości pola naprężeń l . Rozwiązanie statyczne z linią nieciągłości l jest niepoprawne. Wynika to z (2.38). Wielkość

$$\int_{\bar{C}} (y dx - x dy)$$

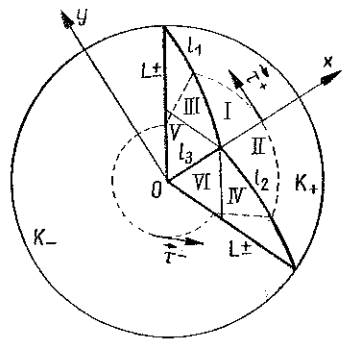
jest różna od zera:

$$\int_{\bar{C}} (x dy - y dx) = 2C,$$

gdzie C jest polem ograniczonym przez linię nieciągłości l . Wzdłuż odcinka AB otrzymujemy skok prędkości deplanacji. Ponieważ zwrot wektora skoku $[\mathbf{v}]$, jak łatwo zauważyć nie jest zgodny ze zwrotem wektora naprężeń stycznych, przeto otrzymujemy ujemną moc dysypacji energii wzdłuż odcinka OB .



Rys. 20



Rys. 21

c) W przypadku prętów pryzmatycznych o poprzecznej skokowej niejednorodności należy traktować linię kontaktu obu materiałów jako linię nieciągłości naprężeń zgodnie z poprzednimi wynikami. W związku z tym linia kontaktu spełnia warunki a) i b).

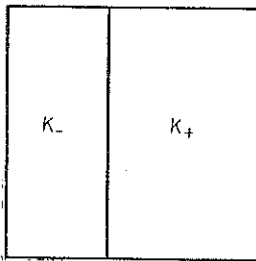
Jak widać, sprawdzenie warunków kinematycznej poprawności rozwiązania statycznego sprowadza się w każdym obszarze danego przekroju poprzecznego do zbadania wzajemnego układu linii poślizgu i linii nieciągłości naprężeń względem układu wersorów (e_r, e_θ) danego obszaru. Rozpatrzmy jako przykład przypadek skręcania pręta pryzmatycznego składającego się z dwu materiałów K_-, K_+ ,

gdzie $K_+ > K_-$ (rys. 21). Kąt rozwarcia strefy mocniejszej oznaczymy przez γ . Linie L_{\pm} oznaczają linię kontaktu materiałów, a l_1, l_2, l_3 linie nieciągłości pola naprężeń materiału mocniejszego. Obierając wartość deplanacji w punkcie O , np. $w_{p0}=0$ zgodnie z (2.38) możemy obliczyć jej wartość wzdłuż linii l_1, l_2, l_3 , a następnie we wszystkich obszarach przekroju poprzecznego nie uzyskując sprzeczności. Np. wychodząc od linii l_2 wyznaczamy deplanację w obszarach II i IV, od linii l_3 w obszarach V i VI itd. Widać również, że dla obszaru materiału słabszego nie uzyskujemy sprzeczności: deplanacja jest tu wyznaczana bezpośrednio z punktu O , przez który przechodzą wszystkie linie poślizgu tego obszaru. Dla całego przekroju poprzecznego warunek a) jest więc spełniony. Deplanacja dowolnego punktu w każdym z rozpatrywanych obszarów była wyznaczana w odniesieniu do odpowiedniej linii nieciągłości naprężeń zgodnie z kierunkiem e_r , czyli $n \geq 0$. Ponieważ linia kontaktu materiałów jest typu 3.C, czyli może wystąpić na niej skok deplanacji, co ma miejsce w naszym przypadku. Na linii tej mamy jednak zgodność wektorów v i τ . Jak widać, rozwiązanie statyczne przedstawione na rys. 21 spełnia warunki kinematyczne poprawności.

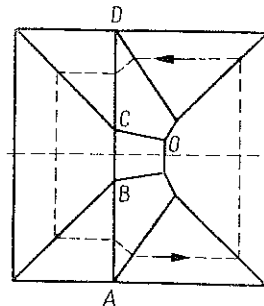
Jako drugi przykład rozpatrzmy pręt przyzmatyczny o przekroju kwadratowym, składający się z dwu materiałów (rys. 22), dla których granice plastyczności są w stosunku

$$\frac{k_-}{k_+} = 0,65.$$

Dobór takich granic plastyczności podyktowany został tym, że w punkcie 6 rozpatruje się pręt o takim samym przekroju poprzecznym, dla którego przy realizacji analogii Nádai'a użyto materiałów sypkich, których tangensy kąta tarcia wewnętrznego są również w takim samym stosunku (rys. 60).



Rys. 22



Rys. 23

Opierając się na wzorach zawartych w [12] możemy zbudować rozwiązanie statyczne (rys. 23). Linia $ABCD$ jest linią kontaktu, linia przerywana jest trajektorią naprężeń stycznych, a linie ciągłe są liniami nieciągłości pola naprężeń. Przyjmując wartość deplanacji w punkcie O , np. $w_{p0}=0$ zgodnie z (2.38), możemy obliczyć jej wartość wzdłuż wszystkich linii nieciągłości pola naprężeń, a następnie we wszystkich obszarach przekroju poprzecznego nie uzyskując sprzeczności (co widać

z układu trajektorii naprężeń stycznych). Oczywiście spełniony jest również warunek $n \geq 0$. Skok deplanacji na linii kontaktu ma miejsce tylko na odcinkach AB i CD , na której mamy zgodność wektorów \mathbf{v} i $\boldsymbol{\tau}$. Jak widać, rozwiązanie statyczne przedstawione na rys. 23 spełnia również warunki kinematycznej poprawności.

Z naszych rozważań wynika również niepoprawność rozwiązania przedstawionego na rys. 7a. Mianowicie w obszarach ADC i ADB linie poślizgu przecinają dwie linie nieciągłości pola naprężeń: jest to sprzeczne z wnioskiem 3.Ca. Rozwiązanie poprawne jest przedstawione na rys. 7b.

2.4. *Problemem pokrewnym do rozpatrywanych poprzednio jest plastyczne skręcanie prętów pryzmatycznych, wykonanych z materiałów anizotropowych.*

Omówimy skręcanie takiego pręta wykonanego z idealnie sztywno-plastycznego anizotropowego materiału. Przyjmiemy tak jak poprzednio (por. p. 2.2), że anizotropia ta nie zależy od osi z , skierowanej wzdłuż tworzącej pręta. Przyjmując stan naprężenia tak jak poprzednio (2.1)

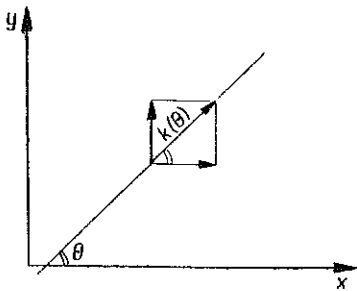
$$(2.40) \quad \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = 0,$$

otrzymujemy warunek plastyczności

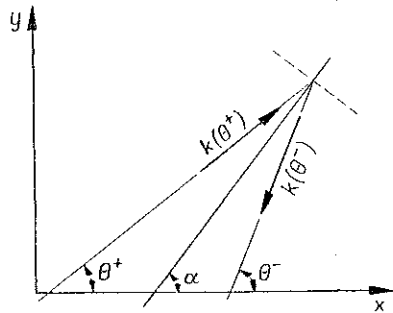
$$(2.41) \quad \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k^2(\theta),$$

gdzie θ określa kierunek na płaszczyźnie xy (rys. 24). Przyjęcie stanu naprężenia jak w (2.40) prowadzi do równania równowagi (2.3). Analizę pola naprężeń przeprowadzimy podobnie jak w punkcie B. Przyjmując składowe niezerowe

$$\tau_{xz} = k(\theta) \cos \theta, \quad \tau_{yz} = k(\theta) \sin \theta$$



Rys. 24



Rys. 25

widzimy, że warunek plastyczności (2.41) jest spełniony tożsamościowo, a z równania równowagi otrzymujemy

$$\left(-k \sin \theta + \frac{dk}{d\theta} \cos \theta\right) \theta_{,x} + \left(k \cos \theta + \frac{dk}{d\theta} \sin \theta\right) \theta_{,y} = 0.$$

Dla określenia charakterystyk mamy równania

$$\frac{dx}{-k \sin(\theta) + k' \cos \theta} = \frac{dy}{k \cos \theta + k' \sin \theta},$$

gdzie

$$k' = \frac{dk}{d\theta};$$

skąd po scałkowaniu otrzymujemy

$$(2.42) \quad y = \frac{k \cos \theta + k' \sin \theta}{-k \sin \theta + k' \cos \theta} x + \Phi(\theta).$$

Jak widać z (2.42) charakterystyki są prostymi liniami wzdłuż $\theta = \text{const}$. Łatwo jest również wykazać, że do tego przypadku odnoszą się te same zależności określające deplanację przekroju poprzecznego (por. p. 2.3), co dla prętów wykonanych z materiału idealnie plastycznego.

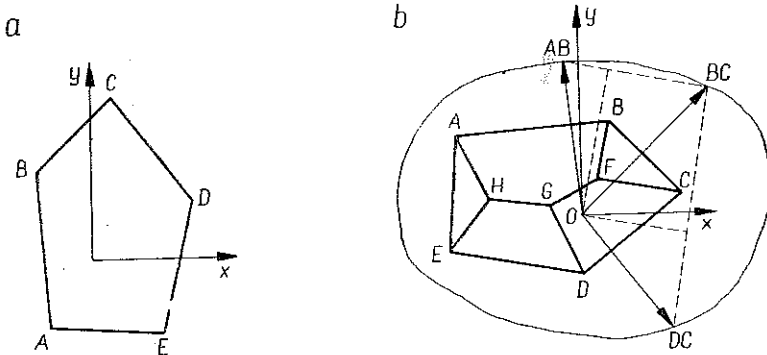
Podobnie jak poprzednio (por. p. C) znajdziemy linie nieciągłości pola naprężeń; będą to oczywiście linie proste. Oznaczając przez O^+ i O^- kierunek linii po obu stronach linii nieciągłości (rys. 25) z łatwością znajdujemy jej równanie różniczkowe

$$(2.43) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{k(\theta^+) \sin \theta^+ - k(\theta^-) \sin \theta^-}{k(\theta^+) \cos \theta^+ - k(\theta^-) \cos \theta^-},$$

przy czym

$$\frac{dy}{dx} = \text{tg } \alpha.$$

Jako przykład rozpatrzmy skręcanie pryzmatycznego pręta o przekroju poprzecznym w kształcie wieloboku (rys. 26). W otoczeniu każdego z boków tego wielo-



Rys. 26

kąta mamy taki stan naprężenia, jaki by powstał w analogicznym pręcie wykonanym z materiału izotropowego (wzdłuż prostoliniowego, wolnego od naprężeń brzegu) kierunek θ jest stały i $k(\theta) = \text{const}$.

Łatwo jest teraz wyobrazić sobie powierzchnię zbudowaną nad tym przekrojem poprzecznym a odpowiadającą funkcji naprężeń [por. (2.7)]. Przez każdy z n boków wielokąta prowadzimy płaszczyznę nachyloną do powierzchni przekroju poprzecznego pod kątem odpowiadającą danej wartości granicy plastyczności $k_n(\theta) = \text{const}$. Płaszczyzny te przetną się wzdłuż pewnych prostych, które w rzucie na

przekrój poprzeczny dadzą linie nieciągłości poszukiwanego pola naprężeń. Znalezienie wartości momentu granicznego sprowadza się teraz oczywiście do obliczenia objętości bryły zawartej pomiędzy tak znaną powierzchnią funkcji naprężeń a płaszczyzną przekroju poprzecznego.

Linie nieciągłości pola naprężeń dla zbadanego przekroju poprzecznego skręcanego pręta można również bardzo łatwo znaleźć na drodze graficznej [16]. W tym celu w przyjętym układzie współrzędnych rysujemy krzywą anizotropii $|\tau|=p(\theta)$. Na ten wykres nanosimy rysunek przekroju poprzecznego badanego pręta obrócony w płaszczyźnie xy o kąt 90° w kierunku skręcania pręta (rys. 26a i b).

Dla określenia stanu naprężenia panującego w otoczeniu boku BC wystarczy poprowadzić z początku układu współrzędnych prostopadłą $\overline{O,BC}$ do tego boku. Wektor $\overline{O,BC}$ przedstawia wielkość naprężenia w obszarze przylegającym do boku BC . Analogicznie wektor $\overline{O,AB}$ przedstawia wielkość naprężenia τ w obszarze przylegającym do boku AB itd. Dla określenia linii nieciągłości rysujemy odcinek $BC - AB$ i wystawiamy do niego prostopadłą przechodzącą przez początek układu współrzędnych. Ta prostopadła wyznacza kierunek linii nieciągłości wychodzącej z punktu B [por. (2.43) i rys. 25].

W analogiczny sposób otrzymujemy linie nieciągłości pola naprężeń, wychodzące z pozostałych wierzchołków. Z punktu F przecięcia się linii BF i CF rozpoczyna się linia nieciągłości, określająca pole naprężenia dla obszarów przylegających do boków AB i CD itd. Otrzymujemy w ten sposób pełny obraz pola naprężeń dla badanego pręta o danej poprzecznej anizotropii.

Problem plastycznego skręcania prętów anizotropowych był przedmiotem zainteresowania szeregu badaczy [8, 17, 18 i 19]. Między innymi w pracy [18] pokazano, że przez odpowiednią transformację problem skręcania pręta anizotropowego może być sprowadzony do problemu skręcania pręta izotropowego o odpowiednio zmienionym kształcie przekroju poprzecznego; stosując taką metodę podano w pracy [8] ogólną metodę obliczania wartości momentu granicznego dla prętów anizotropowych.

3. SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNE SKRĘCANIE PRĘTÓW

3.1. *Rozpatrywaliśmy poprzednio przypadek sprężystego a potem plastycznego skręcania prętów pryzmatycznych.*

Obecnie zajmiemy się bliżej stanem pośrednim, tzw. skręcaniem sprężysto-plastycznym.

A. W uplastycznionej części przekroju poprzecznego pole naprężeń spełnia zależność (2.7), a w jego części sprężystej równanie różniczkowe (1.8). Ponieważ warunek brzegowy dla funkcji naprężeń Φ otrzymaliśmy na podstawie rozważań statycznych [por. (1.11) z (2.6)], dlatego pozostaje on w mocy dla całego konturu — zarówno dla tej jego części, która odpowiada obszarowi sprężystemu L' , jak i tej, która odpowiada obszarowi plastycznemu L'' .

Równanie różniczkowe cząstkowe eliptyczne dla funkcji naprężeń (1.8) oraz warunek jej znikania wzdłuż konturu L nie wystarczają do wyznaczenia tej funkcji w obszarze sprężystym, ponieważ nie znamy pozostałej granicy Γ (linia rozdzielająca obszar sprężysty i plastyczny) tego obszaru ani wartości funkcji naprężeń Φ na niej. Z drugiej strony równanie różniczkowe typu parabolicznego (2.7) dla funkcji Φ i warunek brzegowy jej znikania na konturze L określają jednoznacznie tę funkcję w obszarze plastycznym bez względu na granicę Γ .

Jak widać z jednej strony, mamy do czynienia z dokładnie uwarunkowanym stanem plastycznym, z drugiej natomiast — z bliżej nieokreślonym stanem sprężystym. Łatwo można wykazać, że warunkiem łączącym te dwa stany jest żądanie ciągłości funkcji naprężeń Φ oraz jej pochodnych na granicy obszarów sprężystego i plastycznego.

Znalezienie pola naprężenia dla sprężysto-plastycznego skręcania prętów pryzmatycznych jest, jak widać, równoważne rozwiązaniu następującego problemu matematycznego: należy znaleźć funkcję $\Phi(x, y)$, która znika na konturze L i która razem ze swoimi pierwszymi pochodnymi jest ciągła w obszarze ograniczonym tym konturem. Gradient tej funkcji nie może być nigdzie w tym obszarze większy niż k ; tam natomiast, gdzie jest mniejszy, funkcja naprężeń musi spełniać równanie różniczkowe (1.8).

Innymi słowy, opierając się na pojęciu funkcji naprężeń problem sprężysto-plastycznego skręcania możemy przedstawić jak niżej:

$$(3.1) \quad \Phi_{,xx} + \Phi_{,yy} = -2G\theta$$

dla S i jednocześnie

$$(3.2) \quad |\text{grad } \Phi| \leq k,$$

gdzie Φ jest funkcją ciągłą wraz ze swoimi pierwszymi pochodnymi w całym obszarze przekroju poprzecznego. Na jego konturze L : $\Phi=0$. Oczywiście tam, gdzie występuje znak równości we wzorze (3.2) mamy strefy materiału uplastycznionego. Tak jak poprzednio wartość momentu skręcającego jest równa

$$(3.3) \quad M = \bar{M} = 2 \int \int_S \Phi \, dx \, dy.$$

Rozpatrując poprzednio sprężyste skręcanie pręta kołowego, obliczyliśmy m.in. graniczną wartość momentu skręcającego M^* (1.20), przy przekroczeniu której na obwodzie pojawiają się strefy materiału uplastycznionego. Oczywiście, ze względu na kołową symetrię tego problemu granica Γ , rozdzielająca obszar sprężysty i plastyczny, też ma kształt okręgu o pewnym promieniu ρ . Bardzo łatwo można znaleźć [14], że jego wartość wynosi

$$(3.4) \quad \rho = \frac{k}{G\theta}$$

dla danego kąta skręcenia θ , a odpowiadająca mu wartość momentu skręcającego wynosi

$$(3.5) \quad M = \frac{2}{3} \pi a^3 k \left[1 - \frac{1}{4a^3} \left(\frac{k}{G\theta} \right)^3 \right].$$

Zwiększenie kąta skręcenia θ daje wzrost stref plastycznych. Dla $\theta \rightarrow \infty$ otrzymujemy z (3.5)

$$M = M^{**} = \frac{2}{3} \pi k a^3$$

[por. (2.8)].

B. W rozpatrywanym przez nas przykładzie znaleźliśmy z góry kształt graniczny sprężysto-plastyczny (ze względu na kołową symetrię). Pozwoliło to nam, jak widać, na łatwe rozwiązanie tego na ogół trudnego problemu, jakim jest zagadnienie sprężysto-plastycznego skręcania. W pozostałych jednak przypadkach (poza przekrojem poprzecznym w kształcie pierścienia, gdzie też mamy do czynienia z kołową symetrią) podejście tego typu jak przedstawione wyżej jest niemożliwe. Dlatego często stosujemy tzw. metody odwrotne. Można np. obracać kształt strefy sprężystej i poszukiwać odpowiadającego jej konturu przekroju poprzecznego pręta [20]. Mając dane rozwiązanie w pewnym obszarze dla funkcji z (3.1) możemy je przedłużyć poza kontur Γ tego obszaru w taki sposób, by było spełnione równanie różniczkowe

$$|\text{grad } \Phi| = k,$$

a funkcja Φ i jej pierwsze pochodne były ciągłe.

Oznaczmy przez P dowolny punkt na linii Γ , a przez τ wektor naprężenia stycznego w tym punkcie; składowe tego wektora możemy łatwo określić z równania (3.1). Trajektoriami naprężeń stycznych w tym punkcie jest styczna do tego wektora. Ponieważ w obszarze plastycznym trajektorie naprężeń stycznych są krzywymi równoległymi, to normalna w punkcie P do trajektorii naprężeń stycznych jest wspólną normalną dla tych trajektorii. Analogiczny fakt zachodzi dla innych punktów na linii Γ . Wystawienie normalnych do tej linii daje normalne do trajektorii naprężeń stycznych w obszarze plastycznym, czyli również same trajektorie, ponieważ są one jedynymi krzywymi ortogonalnymi do tych normalnych. Możemy teraz dowolną z zamkniętych trajektorii przyjąć za brzeg przekroju poprzecznego, otrzymując dla niego sprężysto-plastyczne rozwiązanie.

Tak otrzymane rozwiązanie przedstawia sprężysto-plastyczny rozkład naprężeń dla pewnego specjalnego konturu i danego kąta skręcenia θ ; nie mamy żadnych informacji o propagacji stref plastycznych dla tego samego konturu przy zmiennej wartości kąta θ . Dla zwiększenia efektywności powyżej przedstawionej metody półodwrotnej postępujemy w sposób następujący: zamiast poszukiwać rozwiązania równania (3.1) dla danej wartości θ , poszukujemy całej rodziny funkcji naprężeń spełniających to równanie, gdzie nie tylko θ ale i niektóre inne wielkości występują jako parametry. Dokładne omówienie tej metody przedstawione jest w pracy [21], gdzie przytoczono również szereg efektywnych wyników, a m.in. sprężysto-plastyczne rozwiązanie dla tzw. owalu Sokołowskiego.

Inną z metod odwrotnych mamy przedstawioną w pracach [22 i 23]. Kontur przekroju poprzecznego rozpatrywanego pręta jest określany za pomocą pewnej funkcji na płaszczyźnie zmiennej zespolonej. Następnie wszystkie wielkości charakte-

ryzujące sprężysto-plastyczny stan naprężenia określamy również za pomocą tej samej funkcji. Dla jej znalezienia, to jest dla rozwiązania postawionego zadania, można by otrzymać nieliniowe równanie całkowe. Stosując podejście odwrotne, tzn. obierając tę funkcję, mamy możliwość znalezienia szeregu efektywnych rozwiązań. W przytoczonych powyżej pracach przedstawiono kilka rozwiązań dla przekrojów poprzecznych w kształcie wieloboków.

Jak widać ze wzorów (3.1) – (3.3) bezpośrednie rozwiązanie problemu sprężysto-plastycznego skręcania prętów pryzmatycznych jest zadaniem dosyć trudnym. Dlatego też często są stosowane metody przybliżone (relaksacyjne, wariacyjne, energetyczne) [24, 25, 26, 27 i 28]. Metoda odwrotna zaproponowana w pracy [20] została rozwinięta w pracy [29] metodą zmiennych zespolonych. W pracy [30] przedstawiono metodę analityczno-wykreslną.

3.2. *Przedstawimy teraz odmienne podejście do problemu sprężysto-plastycznego skręcania jednorodnych prętów pryzmatycznych — takie, które pozwoli na jego rozwiązanie na drodze numerycznej* [31, 32, 33 i 34].

Zajmiemy się zwłaszcza bliżej metodą przedstawioną w pracach [31 i 32], gdyż wyniki przedstawione w pozostałych dwu albo nieprecyzyjnie określają linie nieciągłości pola naprężeń przy przejściu do czysto plastycznego skręcania, albo odnoszą się do przekrojów poprzecznych w kształcie cylindra.

Jeżeli mianowicie określimy nowe wielkości dla funkcji naprężeń Φ , kąta skręcenia θ i momentu skręcającego M następująco:

$$(3.6) \quad u = \frac{\Phi}{2G\theta}, \quad \alpha = \frac{2G\theta}{k}, \quad \mu = \frac{M}{2k},$$

to problem sprężysto-plastycznego skręcania prętów pryzmatycznych sformułowany jak we wzorach (3.1), (3.2) i (3.3) możemy przedstawić następująco:

$$(3.7) \quad u_{,xx} + u_{,yy} = -1$$

dla S , jednocześnie (przy $u=0$ na L)

$$(3.8) \quad u_{,x}^2 + u_{,y}^2 \leq \alpha^{-2},$$

gdzie indeksy literowe oznaczają różniczkowanie. Moment skręcający wynosi

$$(3.9) \quad \mu = \alpha \iint_S u \, dx \, dy.$$

Tak postawione zagadnienie sprowadza się do następującego problemu wariacyjnego [35]: w obszarze S należy znaleźć funkcję naprężeń $u(x, y)$, spełniającą warunek $u=0$ na L i nierówność

$$(3.10) \quad u_{,x}^2 + u_{,y}^2 \leq \alpha^{-2} \quad \text{w } S$$

oraz minimalizującą funkcjonal

$$(3.11) \quad I(u) = \iint_S \left[\frac{1}{2} (u_{,x}^2 + u_{,y}^2) - u \right] dx \, dy.$$

Oczywiście w tak postawionym zagadnieniu wielkość α gra rolę parametru: wybierając dla niego określone wartości otrzymamy rozwiązanie dla określonych wartości kąta skręcenia zgodnie z (3.6).

Problem poszukiwanej funkcji $u(x, y)$ możemy łatwo rozwiązać numerycznie posługując się tzw. metodą lokalnych wariacji [36 i 37]. Ogólnie mówiąc polega ona na tym, że obieramy pewne rozwiązanie przybliżone dla funkcji $u(x, y)$, a następnie zmieniamy jej wartość w punktach podziału obszaru S o «małą wielkość $\pm h$ » i badamy wpływ tej zmiany na wartość funkcjonału (3.11), wybierając za każdym razem tę ze zmienionych wartości funkcji u , która daje mniejszą wartość funkcjonału. Na rys. 27 przedstawione jest rozwiązanie dla sprężysto-plastycznie skręcanego pręta o przekroju kwadratowym z wycięciem w jednym z boków. Rozwiązanie to uzyskano przy podziale każdego z boków kwadratu na 20 części, zmieniając wartość h od $h_0 = 10^{-4}$ do $h \approx 10^{-7}$. Liczbami 1, 2, 3, 4 oznaczono granice stref plastycznych, tzn. obszary, dla których w zależności (3.10) występuje znak równości dla kolejnych, wzrastających wartości parametru $\alpha = 5, 20/3, 10, 20$. Oczywiście znając już rozwiązanie problemu dla funkcji $u(x, y)$, można łatwo policzyć wartość momentu skręcającego ze wzoru (3.9), odpowiadającego danemu stanowi sprężysto-plastycznemu.

Na zakończenie naszych rozważań odnośnie sprężysto-plastycznego skręcania pryzmatycznych prętów jednorodnych należy zwrócić jeszcze uwagę czytelnika na prace [38, 39 i 40], gdzie omówiono wyczerpująco m.in. takie problemy, jak jednoznaczność i istnienie rozwiązania dla tego zagadnienia w sformułowaniu (3.9), (3.10) i (3.11) w odniesieniu do jednospójnych przekrojów poprzecznych o kształcie wypukłego wielokąta; wykazano, że obszar plastyczny rośnie w miarę zwiększania kąta skręcenia oraz że kąt skręcenia jest ściśle monotoniczną rosnącą funkcją przyłożonego momentu skręcającego. Jak natomiast wykazano w pracy [91], problem ten ulega pewnej komplikacji w odniesieniu do prętów o wielospójnych przekrojach poprzecznych: mogą się pojawić pewne obszary, w których następuje odciążenie mimo iż moment skręcający ulega zwiększeniu.

3.3. Problematyka sprężysto-plastycznie skręcanych prętów niejednorodnych jest dotychczas bardzo mało zbadana. Jednakże przy wykorzystaniu numerycznej metody lokalnych wariacji (tak, jak w poprzednim punkcie) uzyskano szereg efektywnych wyników dla przypadku niejednorodności skokowej [41].

Przytoczymy tu pewne fragmenty tej pracy ze względu na stosunkowo łatwe zastosowanie przedstawionej w niej metody do zagadnień pokrewnych (sprężysto-plastyczne skręcanie prętów anizotropowych, stan sprężysto-plastyczny prętów skokowo-niejednorodnych przy obciążeniach złożonych itp. [42]).

Rozpatrzmy pręt składający się z dwu pryzmatycznych części o różnych granicach plastyczności K_1 i K_2 i różnych modułach sprężystości poprzecznej G_1 i G_2 . Obierzmy prostokątny układ współrzędnych kartezjańskich tak, aby oś z była równoległa do tworzącej powierzchni bocznej pręta. Oznaczmy ponadto: S — pole przekroju poprzecznego, S_1 i S_2 — części pola przekroju poprzecznego odpowiadające wartościom K_1, G_1 oraz K_2 i G_2 , L — granica obszaru S oraz L_{12} — linia

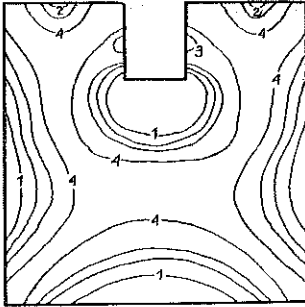
kontaktu obszarów S_1 i S_2 (rys. 28). Znalezienie rozkładu naprężeń dla sprężysto-
plastycznego skręcania sprowadza się do znalezienia w obszarze S funkcji naprężeń
 $\Phi(x, y)$ związanej z naprężeniami ścinającymi [11]:

$$\tau_{xz} = \Phi_{,y}, \quad \tau_{yz} = -\Phi_{,x}$$

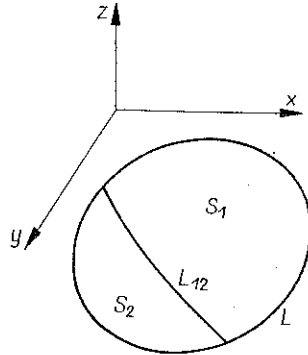
i spełniającej równania

$$\Phi_{,x}^2 + \Phi_{,y}^2 \leq k_1^2 \quad \text{w } S_1,$$

$$\Phi_{,x}^2 + \Phi_{,y}^2 \leq k_2^2 \quad \text{w } S_2.$$



Rys. 27



Rys. 28

W obszarze plastycznego płynięcia występuje w tych równaniach znak równości. W tej części obszaru S , do której odnosi się znak ostrej nierówności, ma miejsce deformacja sprężysta i spełnione jest równanie Poissona [2]:

$$\Phi_{,xx} + \Phi_{,yy} = -2G_1 \theta \quad \text{w } S_1,$$

$$\Phi_{,xx} + \Phi_{,yy} = -2G_2 \theta \quad \text{w } S_2.$$

Wielkość θ oznacza kąt skręcania pręta na jednostkę długości. Na granicy stref plastycznej i sprężystej, której na początku nie znamy, a którą obliczamy w trakcie rozwiązywania zadania, funkcja Φ jest ciągła. Na konturze C funkcja $\Phi(x, y) = \text{const}$ i w przypadku jednoczynnego obszaru S przyjmujemy $\Phi = 0$ na L . Moment skręcający jest równy

$$M = 2 \iint_S \Phi \, dx \, dy.$$

Wprowadźmy nowe zmienne u, α, μ odpowiednio dla funkcji naprężeń, kąta skręcania i momentu skręcającego w sposób następujący:

$$(3.12) \quad u = \frac{\Phi}{2G_1 \theta}, \quad \alpha_1 = \frac{2G_1 \theta}{k_1}, \quad \alpha_2 = \frac{2G_2 \theta}{k_2}, \quad \mu = \frac{M}{2k_1}.$$

Problem poszukiwanej funkcji naprężeń $\Phi(x, y)$ możemy teraz sprowadzić do następującego zagadnienia wariacyjnego [43]: należy znaleźć w obszarze S funkcję

$u(x, y)$, która musi spełniać następujące warunki: a) $u=0$ na L , b) u jest ciągła razem ze swoimi pierwszymi pochodnymi w obszarach S_1 i S_2 , c) u jest ciągła na L_{12} , d) spełnia nierówności

$$(3.13) \quad \begin{aligned} u_{,x}^2 + u_{,y}^2 &\leq \alpha_1^{-2} && \text{w } S_1, \\ u_{,x}^2 + u_{,y}^2 &\leq \alpha_2^{-2} \left(\frac{G_2}{G_1} \right)^2 && \text{w } S_2 \end{aligned}$$

oraz e) minimalizuje funkcjonal

$$(3.14) \quad I(u) = \int_{S_1} \int \left[\frac{1}{2} (u_{,x}^2 + u_{,y}^2) - u \right] dx dy + \int_{S_2} \int \left[\frac{1}{2} \frac{G_1}{G_2} (u_{,x}^2 + u_{,y}^2) - u \right] dx dy.$$

Oczywiście α_1 i α_2 są ze sobą związane następująco:

$$(3.15) \quad \alpha_2 = \alpha_1 \frac{G_2 k_1}{G_1 k_2}.$$

Problem propagacji stref plastycznych sprowadza się do znalezienia granic obszarów, w których

$$(3.16) \quad \begin{aligned} u_{,x}^2 + u_{,y}^2 &= \alpha_1^{-2} && \text{dla } S_1, \\ u_{,x}^2 + u_{,y}^2 &= \alpha_2^{-2} \left(\frac{G_2}{G_1} \right)^2 && \text{dla } S_2 \end{aligned}$$

dla kolejnych wartości kąta skręcania α_1 . Moment skręcający wynosi

$$(3.17) \quad \mu = \alpha_1 \int_S \int u dx dy.$$

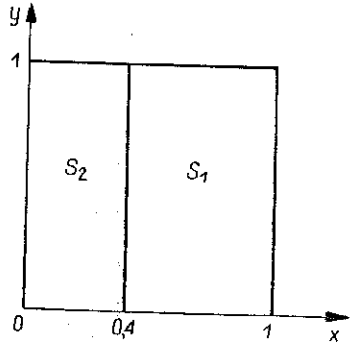
Jako przykład rozpatrzmy pręt pryzmatyczny o przekroju poprzecznym S w kształcie kwadratu $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ (rys. 29). Różnym granicom plastyczności $k_2/k_1=0,65$ niech odpowiadają odpowiednio obszary: $S_1=0,4 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$; $S_2: 0 \leq x \leq 0,4$, $0 \leq y \leq 1$.

Linia L jest teraz linią prostą $x=0,4$. Założymy ponadto, że pręt jest jednorodny sprężyste, $G_1=G_2=G$. Założenie $G_1 \neq G_2$ zmieniłoby nieco rachunki nie zmieniając w niczym algorytmu.

Zależności (3.12) – (3.15) przyjmują w tym przypadku postać następującą:

$$(3.18) \quad \begin{aligned} u &= \frac{\Phi}{2G\theta}, \quad \alpha_1 = \frac{2G\theta}{k_1}, \quad \alpha_2 = \frac{2G\theta}{k_2}, \quad \mu = \frac{M}{2k_1}, \\ u_{,x}^2 + u_{,y}^2 &\leq \alpha_1^{-2} && \text{w } S_1, \quad u_{,x}^2 + u_{,y}^2 \leq \alpha_2^{-2} && \text{w } S_2, \\ I(u) &= \int_S \int \left[\frac{1}{2} (u_{,x}^2 + u_{,y}^2) - u \right] dx dy, \quad \alpha_2 = \alpha_1 \frac{k_1}{k_2}. \end{aligned}$$

Zadanie zostało rozwiązane dla czterech różnych wartości «kąta skręcania» α_1 . Problem takiego ich doboru, który uwypukliłby charakterystyczne momenty w procesie propagacji stref plastycznych, został rozwiązany następująco. Przy dostatecznie małych wartościach α_1 i α_2 w całym obszarze S występować będą tylko odkształcenia sprężyste. Ponieważ założono $G_1 = G_2$, to do momentu, w którym naprężenia styczne osiągną wartość niższej granicy plastyczności, mamy do czynienia tylko z takimi odkształceniami. Tę graniczną wartość α_0 możemy obliczyć na podstawie znajomości rozwiązania sprężystego dla jednorodnego pręta o przekroju kwadratowym dla granicy plastyczności $k = k_2$, otrzymując $\alpha_0 = 1,927$ oraz odpowiadający mu «moment skręcający» $\mu_0 = 0,0676$.



Rys. 29

Wartość α , po przekroczeniu której w obszarze o wyższej granicy plastyczności pojawiłyby się strefy plastyczne, można by obliczyć analogicznie, przyjmując tym razem $k = k_1$. Wartość tę przytoczymy tu wg [31]:

$$\alpha'_0 = 2,963.$$

Jak widać, przyjęcie na α_1 wartości, która spełniałaby nierówność

$$(3.19) \quad \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha'_0,$$

da w efekcie rozwiązanie, dla którego strefy plastyczne pojawiają się tylko w obszarze o niższej granicy plastyczności (bo zgodnie z (3.18) i (3.19) $\alpha_2 > \alpha_0$). Jeżeli teraz dla α_1 przyjmiemy wartość, która będzie spełniać nierówność

$$(3.20) \quad \alpha'_0 < \alpha_1,$$

to w otrzymanym rozwiązaniu strefy plastyczne występować będą już w obu obszarach różnych granic plastyczności. Pozostałe wartości α_1 powinny odpowiadać już zaawansowanej deformacji plastycznej. Ma to oczywiście na celu zbadanie konfiguracji, do jakiej dążyć będą strefy sprężyste oraz porównanie jej z układem linii nieciągłości pola naprężeń dla rozwiązania plastycznego tego pręta.

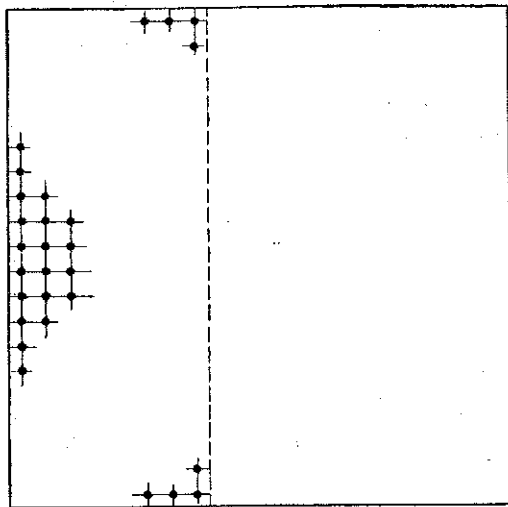
W rezultacie dla α przyjęto następujący ciąg wartości:

$$(3.24) \quad \alpha_1 = 2,4; 4; 10; 25.$$

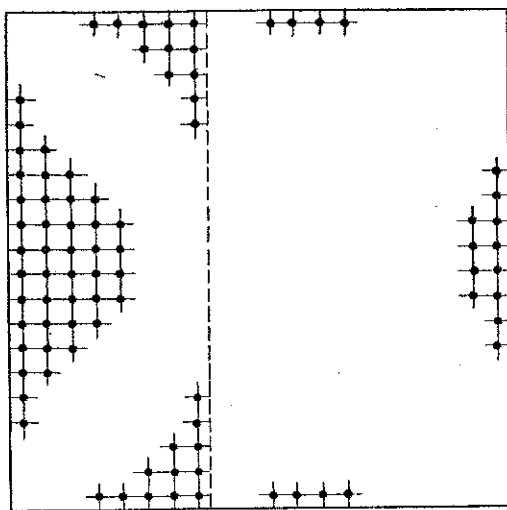
Jak widać dwie pierwsze wartości α_1 z (3.24) spełniają warunki (3.19), pozostałe zaś odpowiadają żądaniu zaawansowanej propagacji stref plastycznych.

Problem sprężysto-plastycznego skręcania sformułowany jak w (3.18) został rozwiązany numerycznie metodą lokalnych wariacji. Cały obszar przekroju poprzecznego S podzielono na 400 jednakowych kwadracików (dzieląc każdy z boków na $n = 20$ części). Podział ten został zachowany przez cały czas przeprowadzania obliczeń. Przyrosty funkcji $u(x, y)$ w poszczególnych punktach obszaru S zmieniały się od $h = 10^{-3}$ do $h \approx 10^{-8}$.

Punktami, w których sprawdzono wartość gradientu, były zawsze środki małych kwadracików. W przypadku spełnienia przez gradient równości (3.16) środek odpowiedniego kwadracika zostawał oznaczony na rysunku kropką.



Rys. 30

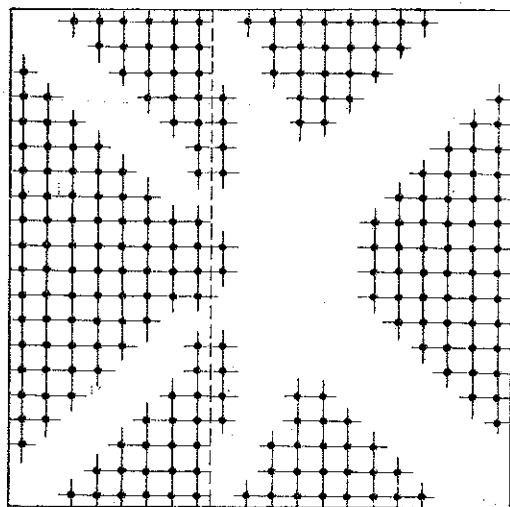


Rys. 31

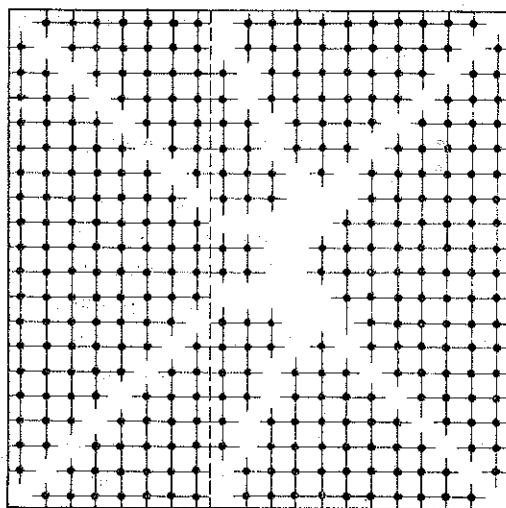
Rysunki 30, 31, 32 i 33 przedstawiają otrzymane wyniki dla kolejnych wartości $\alpha_1 = 2,4; 4; 10; 25$. Rysunek 30 przedstawia obszar stref plastycznych dla $\alpha_1 = 2,4$. Pojawiają się one w niewielkim stopniu tylko w obszarze materiału o niższej granicy plastyczności (strefa plastyczna zajmuje około 7% całego obszaru).

Rysunek 31 przedstawia obszar stref plastycznych dla $\alpha_1 = 4$. Widać dalszą propagację stref plastycznych w obszarze S_2 oraz pojawienie się niewielkich stref

plastycznych w obszarze S_1 (strefa plastyczna zajmuje w tym przypadku ok. 20% całego obszaru). Jak widać, przewidywania nasze odnośnie propagacji stref plastycznych potwierdziły się.



Rys. 32

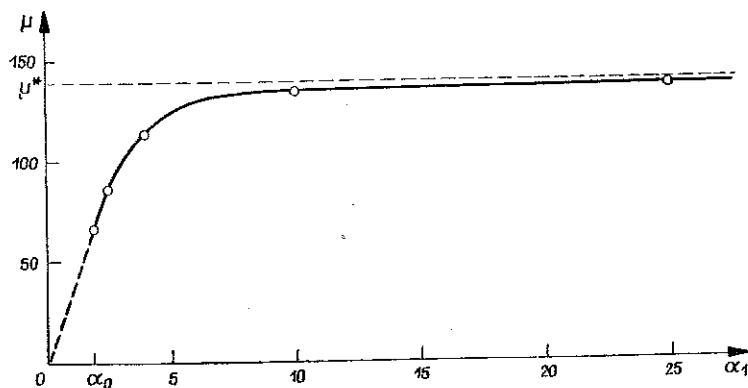


Rys. 33

Rysunek 32 przedstawia obszar stref plastycznych dla $\alpha_1 = 10$. Strefy plastyczne obszaru S_2 przekraczają linię kontaktu materiałów o różnych granicach plastyczności i pojawiają się na obszarze S_1 . Widać dalszy wzrost stref plastycznych (zajmują one 58% całego obszaru S).

Rysunek 33 odpowiada wartości $\alpha_1 = 25$. Strefy plastyczne zajmują teraz ok. 83% obszaru przekroju poprzecznego, a z konfiguracji obszaru sprężystego można już

wnioskować o układzie linii nieciągłości pola naprężeń rozwiązania plastycznego, do jakiego ta konfiguracja dąży (por. rys. 23 i 60 — w punkcie 6). Jak widać, w miarę wzrostu kąta skręcenia rozwiązanie sprężysto-plastyczne dąży do rozwiązania

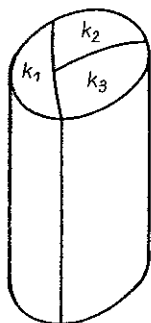


Rys. 34

plastycznego. Opierając się na rozwiązaniu przedstawionym na rys. 23 obliczano wartość momentu całkowitego uplastycznienia μ^* , odpowiadającą asymptotycznej wartości $\alpha_1 = \alpha_1^* = \infty$; wynosi ona $\mu^* = 0,1390$. Mając wartość momentu skręcającego $\mu(\alpha_1)$, odpowiadającą kolejnym kątom skręcenia α_1 , narysowano wykres sztywności tego pręta (rys. 34).

4. PEWNE PROBLEMY OPTIMALIZACJI

We współczesnych zagadnieniach inżynierskich coraz większego znaczenia nabiera problem optymalnego doboru parametrów rozwiązania, tzn. wybór takiego rozwiązania ze zbioru możliwych ze względu na ograniczenia konstrukcyjne (nałożone więzy), które jest najlepsze z punktu widzenia jego przeznaczenia. Można by przytoczyć cały szereg przykładów, w których istotnym jest właśnie takie postawienie problemu; przedstawimy tu dwa z nich.



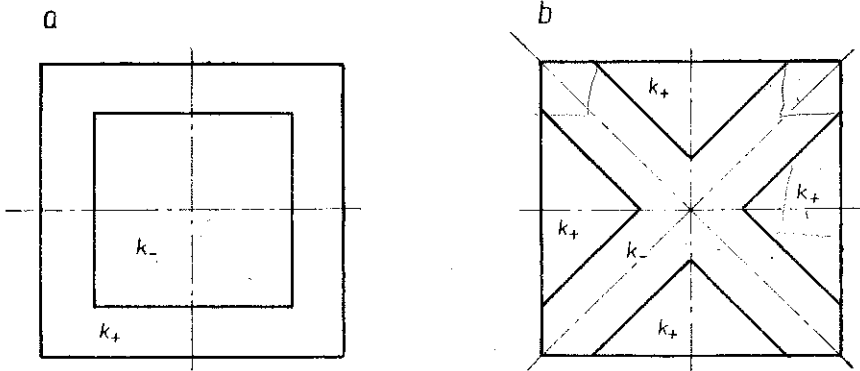
Rys. 35

W praktyce spotykamy się ze skręcanymi prętami niejednorodnymi. Niejednorodność ta może być spowodowana np. złożeniem pręta z kilku pryzmatycznych części o różnych granicach plastyczności (rys. 35).

Z punktu widzenia zastosowań praktycznych interesującym jest taki wzajemny układ tych części (przy niezmiennym konturze przekroju poprzecznego), który zapewni mu maksymalną nośność graniczną. Zagadnienia związane z tym problemem są omówione w pracy [43]. Często zdarza się, że plastyczna niejednorodność poprzeczna skręcanego pręta pryzmatycznego zmienia się nie w sposób skokowy, ale w sposób ciągły, spowodowany np. zabiegami technologicznymi. I tu również

pojawia się problem optymalnego jej rozkładu w przekroju poprzecznym, tzn. takiego jej rozkładu, który zapewni maksymalną nośność graniczną tego pręta.

O tym, że problem optymalizacji nośności granicznej skręcanego pręta ze względu na jego niejednorodność jest bardzo złożony, niech świadczy następujący przykład. Weźmy pod uwagę skokowo-niejednorodny pryzmatyczny pręt o przekroju kwadra-



Rys. 36

towym, dla którego $k_1/k_2=3/4$ i taki, że pole obszaru materiału o niższej granicy plastyczności równe jest polu obszaru o wyższej granicy plastyczności. Niech wzajemne ustawienie obu obszarów będzie takie, jak na rys. 36.

Proste rachunki pokazują, że nośność graniczna pręta dla przypadku przedstawionego na rys. 36b jest blisko 2,5% większa od nośności granicznej pręta dla przypadku przedstawionego na rys. 36a. Jak widać, różnica ilościowa jest niewielka. Spowodowane to jest oczywiście tym, że wartości granic plastyczności obu materiałów różnią się bardzo mało. Z drugiej strony jednak łatwo zauważyć, że dla dużych różnic tych wartości nośność graniczna pręta przedstawionego na rys. 36b będzie znacznie mniejsza od nośności pręta przedstawionego na rys. 36a.

W rozdziale tym przedstawimy sformułowanie problemu dla zagadnienia optymalnej niejednorodności plastycznej skręcanego pręta ze względu na jego nośność graniczną oraz omówimy pewne wyniki przedstawione w pracy [44].

Zanim przejdziemy do postawienia problemu opisującego ten typ zadania, należy poczynić pewne założenia odnośnie zmienności granicy plastyczności w przekroju poprzecznym rozpatrywanego pręta. Przyjmijmy mianowicie, że wartość granicy plastyczności jest ograniczona z góry i z dołu oraz wprowadzimy «ilościowe» ograniczenie tej wielkości typu całkowitego. Ograniczenie takie, zapobiegać będzie powstaniu trywialnego rozwiązania, w którym w całym obszarze przekroju poprzecznego występowałaby tylko górna wartość granicy plastyczności.

Jeżeli wprowadzimy prostokątny, kartezjański układ współrzędnych x, y, z tak, że oś z skierujemy równoległe do tworzącej powierzchni bocznej pręta, to problem ekstremalny sformułować można następująco.

W obszarze D poszukujemy takiej funkcji naprężeń u, x, y (i takiego rozkładu granicy plastyczności k, x, y), dla których spełnione są następujące warunki:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} |\text{grad } u(x, y)| &= k(x, y), & u(x, y)|_c &= 0, \\ k_1 &\leq k(x, y) \leq k_2, & \int_A k(x, y) dx dy &\leq A \end{aligned}$$

i które dają maximum funkcjonau

$$I(u, k) = \int_A u(x, y) dx dy,$$

gdzie D oznacza pole przekroju poprzecznego rozpatrywanego pręta, c kontur pola D ; k_1, k_2 odpowiednio dolną i górną dopuszczalną wartość granicy plastyczności, A pewną stałą. Przyjmijmy poza tym, że wprowadzone w (4.1) wielkości są wielkościami bezwymiarowymi. Ten sposób zapisu zwiększy jego przejrzystość.

Warunek konieczny istnienia ekstremum dla tak sformułowanego zadania (4.1) oparto na abstrakcyjnym schemacie, jaki dla tego typu zadań wariacyjnych opracowali NEUSTADT i HALKIN [45 i 46]. Nie zagłębiając się bliżej w metodę rozwiązywania podkreślimy tu jedynie, iż uzyskano go w postaci

$$(4.2) \quad \begin{aligned} G(s, r) &\leq 0 & \text{dla} & & k_0(s, r) &= k_1, \\ G(s, r) &\geq 0 & \text{dla} & & k_0(s, r) &= k_2, \\ G(s, r) &= 0 & \text{dla} & & k_1 &< k_0 < k_2, \end{aligned}$$

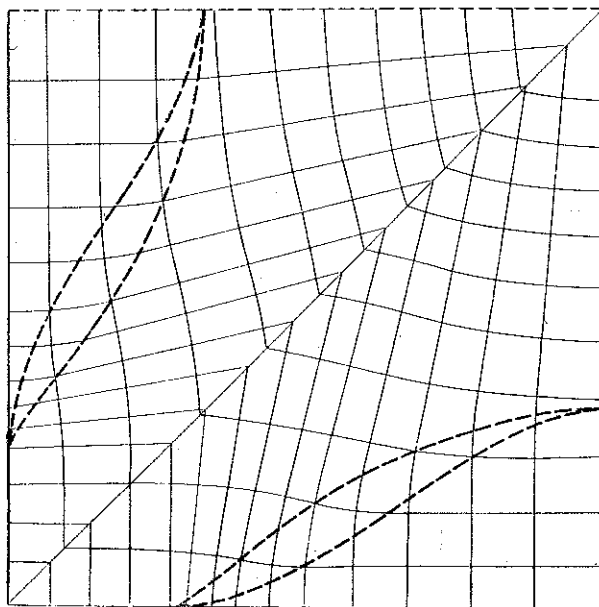
gdzie k_0 przedstawia poszukiwane wartości granicy plastyczności, a G jest pewną funkcją określoną wzdłuż linii gradientu funkcji naprężeń u w krzywoliniowym ortogonalnym układzie współrzędnych s, r .

Opierając się na tym warunku otrzymano, że w otoczeniu linii nieciągłości pola naprężenia znajdować się będzie materiał o niższej granicy plastyczności, a w otoczeniu brzegu materiał o wyższej granicy plastyczności; obszar pomiędzy nimi — to strefa materiału o zmiennej granicy plastyczności od wartości k_1 do k_2 . Dokładna analiza tego obszaru przejściowego jak i zaproponowana metoda graficznej interpretacji warunków (4.2) pozwoliły na uzyskanie szeregu efektywnych rozwiązań. Np. rys. 37 przedstawia układ stref materiałów o różnych granicach plastyczności dla pręta pryzmatycznego o przekroju poprzecznym w kształcie kwadratu (ze względu na symetrię na rysunku podajemy tylko 1/4 kwadratu). Strefa materiału zawarta pomiędzy liniami przerywanymi — to obszar o zmiennej granicy plastyczności ($G(s, r) = 0$).

W poprzednio cytowanej pracy [44] przedstawione są również rozwiązania dla innych kształtów przekrojów poprzecznych takich, jak np. siedmiokąt, koło, elipsa.

Szereg efektywnie rozwiązanych przykładów, jak i uzyskane warunki konieczne dla istnienia rozwiązania zapewniającego maksymalną nośność graniczną skręcanego pręta, pozwalają na wyciągnięcie ważnych wniosków natury jakościowej. Zwróćmy

mianowicie uwagę na sposób, w jaki propagują się strefy uplastycznionego materiału podczas sprężysto-plastycznego skręcania prętów pryzmatycznych (p. 3) i porównajmy ich kształt jak i miejsce występowania ze strefami materiału o wyższej granicy plastyczności w otrzymanych rozwiązaniach. Jak widać, w rozwiązaniach



Rys. 37

zapewniających maksymalną nośność graniczną strefy materiału o górnej granicy plastyczności pojawiły się wszędzie tam, gdzie w pręcie jednorodnym o takim samym konturze przekroju poprzecznego pojawiłyby się strefy plastyczne. Innymi słowy, wszędzie tam, gdzie zależy na zwiększeniu nośności granicznej skręcanego pręta pryzmatycznego, wkładki wzmacniające należałoby umieszczać w takich właśnie miejscach.

Należy w tym miejscu podkreślić, że przytoczone tu rezultaty odnoszą się tylko do pewnego przedziału wartości parametrów. Uzyskanie rozwiązania dla różnych przypadków niejednorodności jest możliwe na drodze numerycznej [42].

5. UOGÓLNIENIE PROBLEMATYKI PLASTYCZNEGO SKRĘCANIA PRĘTÓW

Rozpatrzmy teraz pewne przypadki plastycznego skręcania prętów, ściśle łączące się z naszymi poprzednimi rozważaniami. Zajmiemy się mianowicie prętami w kształcie wycinka torusa i prętami o zmiennej średnicy (te dwa zagadnienia omówimy łącznie, gdyż opisują je takie same równania) oraz prętami pryzmatycznymi, obciążonymi uprzednio siłami wzdłużnymi (od rozciągania i zginania).

5.1. Rozwiązania nasze zaczniemy od badania jednorodnych, skręcanych prętów w kształcie torusa (wycinka pierścienia kołowego).

Tok postępowania będzie analogiczny do zastosowanego w punkcie 2, podpunkt 2.1. A i B

A. Przyjmiemy, że stan naprężenia tak jak dla prętów skręcanych sprężysto określony jest przez następujące składowe tensora naprężenia (układ odniesienia, którym będziemy się posługiwać jest teraz oczywiście układem cylindrycznym) r, ψ, z , gdzie oś z jest osią symetrii rozpatrywanego wycinka torusa (rys. 38):

$$(5.1) \quad \tau_{r\psi} = \tau_{\psi r}(r, z), \quad \tau_{z\psi} = \tau_{\psi z}(r, z), \quad \sigma_{rr} = \sigma_{\psi\psi} = \sigma_{zz} = \tau_{rz} = 0.$$

Jak widać, w płaszczyźnie przekroju poprzecznego $\psi = \text{const}$ naprężenie styczne ma dwie składowe $\tau_{r\psi}$ i $\tau_{z\psi}$ i tylko one są różne od zera.

Warunek plastyczności ma postać

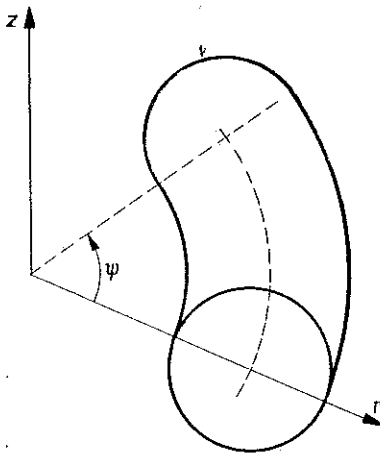
$$(5.2) \quad \tau_{r\psi}^2 + \tau_{z\psi}^2 = k^2,$$

a jedyne niespełnione tożsamościowo równanie równowagi

$$(5.3) \quad \tau_{r\psi, r} + \tau_{z\psi, z} + \frac{2}{r} \tau_{r\psi} = 0.$$

Oczywiście, przyjęcie założenia o wolnej od obciążeń powierzchni bocznej pręta prowadzi do warunku brzegowego dla naprężeń wzdłuż L [por. (2.4)]:

$$(5.4) \quad \frac{\tau_{r\psi}}{\tau_{z\psi}} = \frac{dr}{dz}.$$



Rys. 38

Wprowadzając funkcję naprężeń $\Phi = \Phi(r, z)$ w podobny sposób jak poprzednio

$$(5.5) \quad \tau_{r\psi} = \frac{1}{r^2} \Phi_{,z}, \quad \tau_{z\psi} = -\frac{1}{r^2} \Phi_{,r}$$

widzimy, że równanie równowagi jest spełnione tożsamościowo; warunek brzegowy (5.4) ma teraz postać

$$(5.6) \quad \Phi = \text{const na } L,$$

a z warunku plastyczności otrzymujemy (por. (2.7))

$$(5.7) \quad |\text{grad } \Phi| = kr^2.$$

Tak jak przy analizie obciążeń zewnętrznych dla skręcanego pręta w stanie sprężystym (por. p. 1.1) założymy, że naprężenia ścinające, działające w dowolnym

przekroju $\psi = \text{const}$, mogą zostać sprowadzone do sił P_r i P_z działających wzdłuż osi r i z oraz do momentu M_ψ względem osi ψ :

$$(5.8) \quad \begin{aligned} P_r &= \int_S \int \tau_{r\psi} dr dz, & P_z &= \int_S \int \tau_{z\psi} dr dz, \\ M_\psi &= \int_S \int (r\tau_{z\psi} - z\tau_{r\psi}) dr dz. \end{aligned}$$

Zgodnie z przyjętymi przez nas formułami dla składowych wektora naprężenia stycznego (5.5) oraz po uwzględnieniu warunku brzegowego (5.6) łatwo można wykazać [47], że

$$P_r = 0, \quad M_\psi = 0.$$

Innymi słowy, stan naprężenia przyjęty jak w (5.1) odpowiada sile P_z , działającej w kierunku osi z i przechodzącej przez początek układu współrzędnych.

B. Zajmiemy się teraz bardziej szczegółową analizą pola naprężeń pręta uplastycznionego. Tak jak poprzednio [por. (2.9)] niech składowe $\tau_{r\psi}$ i $\tau_{z\psi}$ tego pola mają postać

$$(5.9) \quad \tau_{r\psi} = -k \sin \alpha, \quad \tau_{z\psi} = k \cos \alpha.$$

Warunek plastyczności (5.2) spełniony jest tożsamościowo, a z równania równowagi otrzymujemy dla funkcji $\alpha = \alpha(r, z)$ równanie

$$\alpha_{,r} \cos \alpha + \alpha_{,z} \sin \alpha + \frac{2 \sin \alpha}{r} = 0$$

i równania różniczkowe charakterystyk

$$(5.10) \quad \frac{dr}{\cos \alpha} = \frac{dz}{\sin \alpha} = -\frac{r d\alpha}{2 \sin \alpha}.$$

Łatwo stąd znajdujemy następujące wzory:

$$(5.11) \quad \frac{dz}{dr} = \text{tg } \alpha$$

oraz

$$(5.12) \quad r^2 \sin \alpha = c_1,$$

gdzie c_1 jest stałą wzdłuż danej charakterystyki. Z (5.11) i (5.12) po scałkowaniu znajdujemy

$$z = \pm \frac{r \sqrt{|\sin \alpha|}}{2} \int \frac{d\alpha}{(\sin \alpha)^{1/2}} + c_2,$$

gdzie c_2 jest znów pewną stałą. Wprowadzając oznaczenie

$$\sin \alpha = \cos^2 \varphi$$

możemy nasze równanie napisać w znanej postaci

$$(5.13) \quad z = \pm \frac{r\sqrt{|\sin \alpha|}}{\sqrt{2}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 \varphi}} + c_2,$$

gdzie występująca całka eliptyczna pierwszego rzędu przedstawiana bywa zazwyczaj w postaci

$$\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} : F(k, \varphi) = F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \arccos \sqrt{|\sin \alpha|}\right).$$

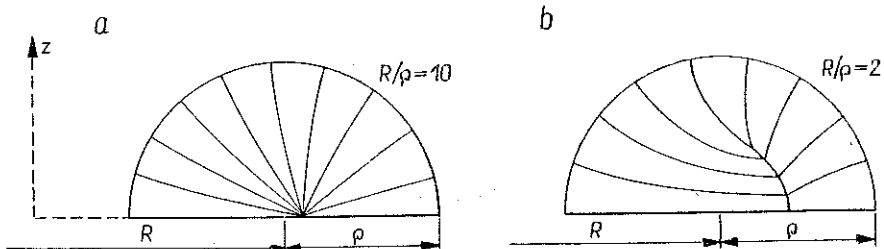
Dla całki tej istnieją tablice [48].

Zakładając, że mamy gładki kontur L i oznaczając przez α_0 kąt, jaki tworzy normalna do niego z osią r , otrzymujemy zależności analogiczne do (2.12), a stąd warunek, że na konturze $\alpha = \alpha_0$. Jak widać, charakterystyki w płaszczyźnie rz przecinają kontur L pod kątem prostym.

Możemy teraz z łatwością wyznaczyć stałe całkowania w równaniach (5.12) i (5.13). Oznaczając przez r_0 i z_0 współrzędne pewnego punktu (np. A na konturze L) otrzymujemy ostatecznie równania parametryczne charakterystyki przechodzącej przez ten punkt w postaci

$$(5.14) \quad \begin{aligned} r^2 \sin \alpha &= r_0^2 \sin \alpha_0, \\ z &= z_0 \pm \frac{r_0 \sqrt{|\sin \alpha|}}{\sqrt{2}} \left\{ F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \arccos \sqrt{|\sin \alpha|}\right) - \right. \\ &\quad \left. - F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \arccos \sqrt{|\sin \alpha_0|}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Oczywiście zbudowanie pola charakterystyk — to rozwiązanie zadania w naprężeniach; wektor naprężenia stycznego jest w każdym punkcie przekroju poprzecznego prostopadły do charakterystyki przechodzącej przez ten punkt i ma stały moduł równy wartości granicy plastyczności k .



Rys. 39

W przypadku kiedy przez dany punkt przechodzi więcej niż jedna charakterystyka, należy zbudować linie nieciągłości pola naprężeń. Powtarzając rozważania zawarte w 2.1.C otrzymujemy z warunku ciągłości naprężeń normalnych, że linia nieciągłości pola naprężeń jest dwusieczną kąta, jaki tworzą przecinające się w danym punkcie charakterystyki (rys. 39a i 39b).

Zgodnie z [50] pole prędkości deformacji możemy przedstawić przez następujące jego składowe:

$$v_r = 0, \quad v_z = p\psi, \quad v_\psi = aw(r, z),$$

gdzie p jest dowolną prędkością a , w jest prędkością deplanacji przekroju poprzecznego dla $p=1$ [por. (2.31)]. Można łatwo wykazać [50], że wzdłuż linii nieciągłości spełniony jest warunek

$$dw = \frac{1}{r}(w dr - dz),$$

skąd możemy otrzymać wartość w wzdłuż tej linii przyjmując, że w jest znane w pewnym punkcie tej linii. Znajomość deplanacji w wzdłuż linii nieciągłości pozwala ją wyznaczyć w całym obszarze przekroju poprzecznego (por. przykłady w [50]).

Problemem sprężystego skręcania wycinka pierścienia kołowego zajmowało się wielu badaczy. Dopiero w r. 1930 O. GÖHNER [51, 52 i 53] zastosował do tego problemu ogólne równania teorii sprężystości we współrzędnych walcowych, co pozwoliło (przy uwzględnieniu zasady Saint-Venanta) na otrzymanie ścisłych równań.

Zagadnienie plastycznego skręcania wycinka pierścienia kołowego zostało rozwiązane w pracy [49], gdzie jednak przyjęto błędne założenie o prędkości wzdłuż linii nieciągłości pola naprężeń [50]. Z dalszych prac poświęconych temu zagadnieniu należy wymienić jeszcze prace [54, 55, 56 oraz 57], w których autorzy podali m.in. równanie charakterystyk problemu oraz rozwiązanie kilku przykładów przy wykorzystaniu metody graficzno-analitycznej.

C. Rozpatrzmy teraz pręt, którego kołowe pole przekroju poprzecznego zmienia się wzdłuż osi. Przyjmijmy tak jak poprzednio cylindryczny układ współrzędnych r, ψ, z w ten sposób, że oś z jest równoległa do osi pręta. Niech przyłożony moment M skręca ten pręt wokół osi z .

Przyjmując stan naprężenia w pręcie tak, jak w zakresie skręcania sprężystego

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\psi\psi} = \sigma_{zz} = \tau_{rz} = 0, \quad \tau_{r\psi} = \tau_{r\psi}(r, z), \quad \tau_{z\psi} = \tau_{z\psi}(r, z),$$

otrzymujemy równania (równanie równowagi i warunek plastyczności) tak jak w punkcie A [por. (5.1), (5.2), (5.3)]

$$\tau_{r\psi, r} + \tau_{z\psi, z} + \frac{2}{r} \tau_{r\psi} = 0, \quad \tau_{r\psi}^2 + \tau_{z\psi}^2 = k^2$$

oraz identyczny warunek brzegowy. Jak widać, stan naprężenia pręta o zmiennej średnicy przekroju poprzecznego odpowiada ściśle stanowi naprężenia w pręcie o kształcie wycinka kołowego. Równania parametryczne charakterystyk przechodzących przez dany punkt (r_0, z_0) na brzegu są identyczne z (5.14). Nie analizując bliżej pola naprężeń (postępujemy podobnie jak w punktach A i B) zwróćmy tu tylko uwagę, że charakterystyki rozpoczynające się na konturze L (rys. 40) idą w głąb materiału dochodząc do obwiedni; poza nią materiał pozostaje sprężysty.

Z punktu A natomiast propaguje się wachlarz charakterystyk, który jest określony przez następujące równania [47]:

$$r^2 \sin \alpha = r_0^2 \sin \alpha_0, \quad z - z_0 = \pm \frac{r_0 \sqrt{|\sin \alpha|}}{\sqrt{2}} \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{dt}{\sqrt{|\sin t|}},$$

przy czym $0 \leq \alpha_0 \leq \alpha_0$.

Przy analizie pola prędkości deformacji pręta o zmiennej średnicy zakłada się, że płaskie przekroje, prostopadłe do osi z , pozostają płaskimi w procesie deformacji. Stąd składowe tego pola wynoszą

$$v_r = 0, \quad v_\psi = v_\psi(r, z), \quad v_z = 0.$$

Łatwo można wykazać, że charakterystyki równań, opisujących stan naprężenia, pokrywają się z charakterystykami równań, opisujących pole prędkości deformacji.

Wzdłuż tych charakterystyk spełniony jest warunek $v_\psi = c_r$, gdzie c jest pewną stałą.

Na zakończenie tego krótkiego przeglądu należy nadmienić, że problemowi sprężystego skręcania prętów o zmiennej średnicy poświęcono bardzo wiele prac, z których fundamentalnymi są [58, 59 i 60]. Badania nad rozkładem naprężeń w strefie plastycznej dla takich prętów znaleźć można w pracach [61 i 62]. Nadmienić tu również należy, że podejmowane są próby znalezienia rozkładu naprężeń na drodze numerycznej (np. [63]).

D. Zwróćmy teraz uwagę na pewną analogię pomiędzy przepływem cieczy dylatantnych [64] a sprężysto-plastycznym i plastycznym skręcaniem prętów przyzmatycznych [65]; analogia ta zachodzi

również dla przepływu cieczy dylatantnej w rurach o kształcie torusa z jednej strony, a plastycznym skręcaniem takich prętów z drugiej.

Typowa zależność pomiędzy naprężeniem ścinającym τ i prędkością ścinania γ dla cieczy dylatantnej przy prostym ścinaniu jest przedstawiona na rys. 41a. W pewnym przedziale $0 \leq \tau \leq \tau_0$ zachowanie się cieczy może być z powodzeniem aproksymowane przepływem cieczy newtonowskiej. Powyżej wartości τ_0 przyrost γ nie jest już tak duży, jak wynikałoby to dla tej aproksymacji. Idealizacja takiego zachowania się przedstawiona jest na rys. 41b; powyżej wartości τ_0 przyrost naprężeń ścinających nie powoduje przyrostu prędkości ścinania γ . Łatwo okazuje się [65], że dla przepływu przez rurę przyzmatyczną zachodzą następujące zależności (przyjęto za oś z układu x, y , z oś skierowaną równoległe do powierzchni bocznej rury):

$$(5.15) \quad \gamma_{x,x} + \gamma_{y,y} = \frac{\omega}{\mu}$$

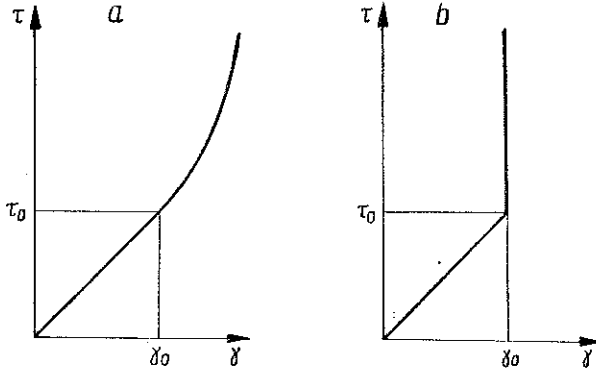
dla newtonowskiego przepływu oraz

$$(5.16) \quad \gamma_x^2 + \gamma_y^2 = k^2$$

dla przepływu dylatantnego, gdzie μ i k są pewnymi stałymi, a ω jest pewnym parametrem. Uwzględniając, że

$$2\gamma_x = w_{,x}, \quad 2\gamma_y = w_{,y},$$

otrzymujemy pełną analogię pomiędzy przepływem cieczy dylatantnej a plastycznym skręcaniem [por. (2.7)] oraz analogię pomiędzy częściowym przepływem dylatantnym [gdzie zachodzi (5.15) i (5.16)] a sprężysto-plastycznym skręcaniem [por. (3.1) i (3.2)].



Rys. 41

W sposób analogiczny do opisanego bada się przepływ dylatantny w rurach w kształcie wycinka koła. Przyjmując układ współrzędnych r, ψ, z tak jak w przypadku *A* mamy [66]

$$(5.17) \quad \tau_{r,r} + \tau_{z,z} + \frac{2}{r} \tau_r = \frac{2\omega}{r}$$

oraz

$$(5.17') \quad \gamma_r^2 + \gamma_z^2 = k^2,$$

przy czym

$$\gamma_r = \frac{\gamma}{r} \tau_r, \quad \gamma_z = \frac{\gamma}{r} \tau_z,$$

gdzie

$$\gamma^2 = \gamma_r^2 + \gamma_z^2, \quad \tau^2 = \tau_r^2 + \tau_z^2.$$

Dla układu równań (5.17) i (5.17') [por. (5.2) i (5.3)] zaproponowano graficzną metodę budowania pola charakterystyk oraz przedstawiono szereg przykładów.

E. Rozpatrzmy teraz przypadek, kiedy granica plastyczności badanych prętów kołowo-zakrzywionych i prętów o zmiennej średnicy jest wielkością zmienną [6], określoną w przyjętym przez nas układzie współrzędnych przez funkcję

$$k = k(r, z).$$

Poszukiwana funkcja naprężeń Φ [por. (5.5)] jest teraz zgodnie z (5.7) określona przez równanie

$$(5.18) \quad |\text{grad } \Phi| = k(r, z)r^2$$

z tym samym co poprzednio warunkiem brzegowym. Jak widać z poprzedniej analizy, zadanie bardzo się teraz komplikuje [jeżeli wykonamy podstawienie (5.9) do (5.3), to w otrzymanym równaniu pojawiają się teraz również pochodne wartości $k = k(r, z)$]. Zadanie to można w pewnym sensie sprowadzić do poprzednio rozpatrywanego problemu skręcanego pręta o poprzecznej ciągłej niejednorodności. Podstawiając mianowicie w (5.18)

$$(5.19) \quad k(r, z)r^2 = \bar{k}(r, z)$$

otrzymujemy (por. (2.20))

$$|\text{grad } \Phi| = \bar{k}(r, z).$$

Podobnie jak poprzednio możemy teraz też wypisać równanie linii największego spadku [por. (2.22)]:

$$\bar{k}z'' + (1+z'^2)(z'\bar{k}_r - \bar{k}_z) = 0.$$

Rozwiązanie tego równania w sposób ścisły jest w większości przypadków niemożliwe i dlatego na ogół musimy się posługiwać metodami przybliżonymi. Jednym z przykładów, które można rozwiązać w sposób ścisły, może być zadanie o skręcaniu pręta dla niejednorodności obranej jak niżej [6]:

$$k(r, z) = \frac{k_0}{r^2};$$

wtedy zgodnie z (5.19) otrzymujemy

$$|\text{grad } \Phi| = k_0,$$

co daje już stosunkowo łatwe rachunki. W poprzednio cytowanej pracy może czytelnik znaleźć dyskusję tego przykładu jak również pewne rozwiązanie dla niejednorodności zmiennej liniowo w przypadku skręcania pręta o zmiennej średnicy.

5.2. *W praktyce bardzo często spotyka się pręty obciążone nie tylko momentem skręcającym, ale również siłą podłużną czy momentem zginającym (w obu tych przypadkach w płaszczyźnie przekroju poprzecznego pojawiają się naprężenia normalne). Problematyka jednocześnie skręcanego i rozciąganego pręta jednorodnego w stanie granicznym była badana w licznych pracach [67, 68, 69, 70 i 71], gdzie podano pewne ścisłe lub przybliżone oszacowania krzywych nośności granicznej.*

Zakres sprężysto-plastycznych obciążeń dla prętów o przekroju kołowym omówiony jest w pracach [72 i 73]. Problematyka jednocześnie skręcanego i zginanego pręta była badana m.in. w pracach [74, 75 i 76], a jednocześnie skręcanie, zginanie i rozciąganie w [77].

Rozpatrzmy tu najpierw wpływ naprężeń normalnych na podstawowe równania opisujące plastyczne skręcanie prętów (por. punkt 2, podpunkty A i B), a potem omówimy krótko skręcanie prętów obciążonych uprzednio siłą wzdłużną lub momentem zginającym.

A. Przyjmijmy prostokątny układ współrzędnych kartezjańskich x, y, z tak, że oś z jest skierowana równoległe do tworzącej powierzchni bocznej pręta. Jedynymi różnymi od zera składowymi stanu naprężenia będą naprężenie normalne σ_z i składowe naprężenia stycznego τ_x i τ_y . Równania równowagi i warunek plastyczności Hubera-Misesa mają postać

$$(5.20) \quad \tau_{x,x} + \tau_{y,y} + \sigma_{z,z} = 0 \quad \sigma_z^2 + 3(\tau_x^2 + \tau_y^2) = \sigma_0(x, y),$$

gdzie $\sigma_0(x, y)$ oznacza granicę plastyczności przy jednoosiowym rozciąganiu. Ponieważ materiał przyjmujemy za jednorodny w kierunku pionowym (por. punkt 2, podp. 2), to wprowadzając pojęcie funkcji naprężeń [por. (2.5)] widzimy, że równanie równowagi jest spełnione tożsamościowo, a z warunku plastyczności otrzymujemy

$$(5.21) \quad |\text{grad } \Phi| = \frac{1}{\sqrt{3}} [\sigma_0^2(x, y) - \sigma_z^2(x, y)]^{1/2} = K(x, y)$$

równanie dla funkcji naprężeń Φ ; na konturze L przekroju poprzecznego S pręta $\Phi = 0$. Wielkość K nazywać będziemy dalej zredukowaną granicą plastyczności na ścinanie.

Podobnie jak poprzednio dla analizy pola naprężeń ścinających wprowadzimy oznaczenia (rys. 42)

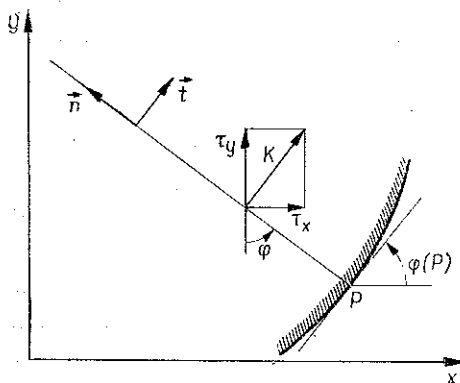
$$\tau_x = \Phi_{,y} = K(x, y) \cos \varphi, \quad \tau_y = -\Phi_{,x} = K(x, y) \sin \varphi,$$

gdzie $\varphi(x, y)$ oznacza kąt pomiędzy normalną do wektora i osią y . Równanie różniczkowe dla $\varphi = \varphi(x, y)$ ma teraz postać

$$(5.22) \quad \varphi_{,x} \sin \varphi - \varphi_{,y} \cos \varphi = \frac{1}{K} K_{,r}$$

B. Niech będzie dany pryzmatyczny pręt jednorodny obciążony siłą wzdłużną i momentem skręcającym. Ponieważ w tym przypadku σ_0 i σ_z są stałymi w polu przekroju poprzecznego, przeto z (5.21) otrzymujemy

$$|\text{grad } \Phi| = \frac{1}{\sqrt{3}} [\sigma_0^2 - \sigma_z^2]^{1/2} = K = \text{const.}$$



Rys. 42

Zgodnie z (5.22) charakterystyki (linie poślizgu) są liniami prostymi

$$y + x \text{ctg } \varphi = f(\varphi)$$

z warunkiem brzegowym $\varphi = \varphi(P)$, gdzie $\varphi(P)$ jest kątem pomiędzy styczną do konturu L w punkcie P a osią x . Jak widać, w takim przypadku układ linii nieciągłości pola naprężeń pozostaje bez zmian (pokrywa się z układem, który otrzymujemy dla przypadku czystego skręcania). Zmianie ulega tylko wartość skręcającego momentu granicznego, gdyż gradient funkcji naprężeń określony jest teraz przez zredukowaną (stałą w całym obszarze) granicę plastyczności.

Oczywiście w przypadku prętów o poprzecznej skokowej niejednorodności plastycznej rozpatrywany problem bardzo się komplikuje [78]. Dla wartości σ_0 i σ_z mamy

$$\sigma_{0i} = C_i, \quad \sigma_{zi} = Z_i$$

w każdym z podobszarów S_i ($i=1, 2, \dots$) pola przekroju poprzecznego S , gdzie C_i i Z_i są stałymi⁽¹⁾. Innymi słowy, dla każdego z podobszarów S_i warunek (5.21) przybiera postać [por. (2.29)]

$$|\text{grad } \Phi| = \frac{1}{\sqrt{3}} [\sigma_{0i} - \sigma_{zi}]^{1/2} = K_i,$$

a linie poślizgu są liniami prostymi. Oczywiście, teraz układ linii nieciągłości pola naprężeń nie pokrywa się z układem, który mamy dla przypadku samego skręcania. Wynika to z faktu, że

$$\frac{k_i}{k_j} \neq \frac{K_i}{K_j},$$

czyli że stosunek granic plastyczności nie jest równy stosunkowi zredukowanych granic plastyczności [co wynika bezpośrednio z (2.21)]. Poprzednie rozważania dotyczące skręcania prętów przyrmatycznych skokowo-niejednorodnych stosują się do naszego przypadku z tym, że zamiast granicy plastyczności na ścianie k_i mamy teraz do czynienia ze zredukowaną jej wartością K_i . W szczególności odnosi się to również do rozważań dotyczących linii kontaktu L_{12} materiałów o różnych granicach plastyczności σ_{01} i σ_{02} (przyjmijmy, że $\sigma_{01} < \sigma_{02}$). Wtedy linia nieciągłości pola naprężeń, położona w obszarze obejmującym materiał o wyższej granicy plastyczności, jest odchyłona od linii kontaktu o $\kappa/2$, gdzie (por. (2.28)):

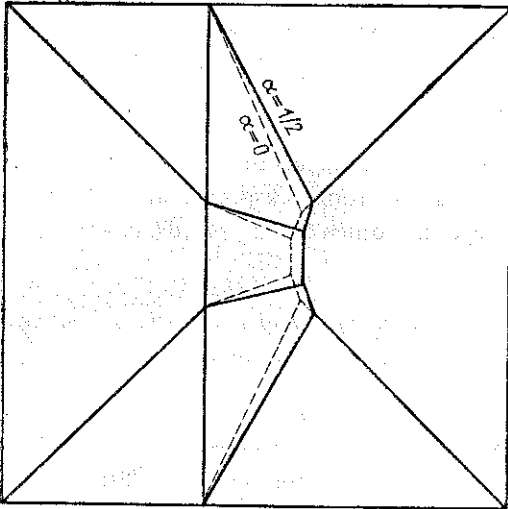
$$\kappa = \arccos \frac{K_1}{K_2}.$$

Przy analizie takiego złożonego stanu naprężenia należy oczywiście pamiętać o wzajemnym stosunku granic plastyczności σ_{01} i σ_{02} z jednej strony i naprężenia rozciągającego σ_z z drugiej (np. samo rozciąganie może już wywołać uplastycznienie pewnych części przekroju poprzecznego⁽²⁾). Na rys. 43 pokazano przykładowo

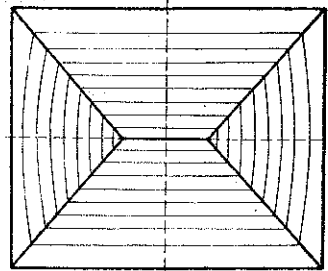
⁽¹⁾ Jeżeli siła podłużna nie wywoła uplastycznienia w żadnym z podobszarów przekroju poprzecznego, to oczywiście $Z_1 = Z = \text{const}$ w całym przekroju.

⁽²⁾ Pojawienie się stref plastycznych, wywołanych siłą podłużną, powoduje nierównomierny rozkład σ_z , a w konsekwencji złożone obciążenie: rozciąganie i zginanie.

układ linii nieciągłości pola naprężeń dla skręcanego pręta skokowo-niejednorodnego (por. rys. 29), obciążonego uprzednio siłą wzdłużną taką, że naprężenia nią wywołane σ_z są równe połowie niższej granicy plastyczności: $\alpha = \sigma_z / \sigma_{01} = 1/2$. Linia prze-



Rys. 43



Rys. 44

rywana zaznaczono rozwiązanie otrzymane dla samego skręcania, tzn. $\alpha = 0$ (por. rys. 23).

C. Niech będzie teraz dany pryzmatyczny pręt jednorodny, obciążony momentem zginającym i momentem skręcającym. Teraz tylko wartość granicy plastyczności jest stała, bo $\sigma_z = \sigma_z(y)$, gdzie y zmienia się od $-h/z$ do h/z . Oczywiście w tym przypadku

$$|\text{grad } \Phi| = K(y) \neq \text{const},$$

a równanie charakterystyki z (5.22) ma postać [79]

$$(5.23) \quad x(y) = x_p + (\mu^2 - y_p^2)^{1/2} \sin \varphi_p \left\{ \arcsin [y_p (\mu^2 \cos^2 \varphi_p + y_p^2 \sin^2 \varphi_p)^{-1/2}] - \right. \\ \left. - \arcsin [y (\mu^2 \cos^2 \varphi_p + y_p^2 \sin^2 \varphi_p)^{-1/2}] \right\},$$

gdzie $\mu = h/2m$, a m jest współczynnikiem obciążenia momentem zginającym do uplastyczniającego momentu zginającego. Pola naprężeń ścinających znajdziemy z warunku, że trajektorie tych naprężeń są rodziną linii ortogonalnych do danej rodziny charakterystyk. Przy analizie takiego złożonego stanu naprężenia należy pamiętać, że rozkład naprężeń wzdłużnych od przyłożonego momentu zginającego jest zmienny liniowo wzdłuż wysokości pola przekroju poprzecznego.

Oczywiście wszędzie tam, gdzie naprężenia σ_z osiągną granicę plastyczności, mają one wartość stałą, równą tej granicy. Na rys. 44 przedstawiony jest układ trajektorii naprężeń ścinających dla skręcanego pręta o prostokątnym przekroju poprzecznym, obciążonego uprzednio momentem zginającym, który sam nie wywołuje naprężeń uplastyczniających.

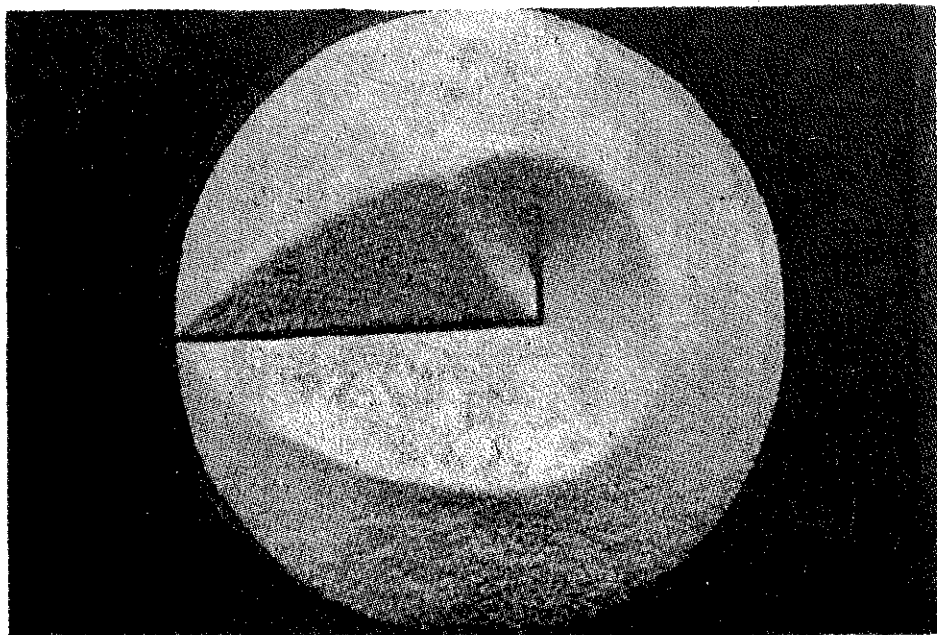
Jak widać z równania (5.23), w przypadku prętów niejednorodnych problem ulega dalszej komplikacji i prowadzi do bardzo żmudnych rachunków. Dlatego w takich przypadkach lepiej jest poszukiwać rozwiązania na drodze numerycznej [42]. Ta sama uwaga odnosi się także do przypadków, kiedy rozciągamy lub zginamy pręt pryzmatyczny obciążony uprzednio momentem skręcającym.

6. MODELOWANIE I DOŚWIADCZENIA

Już poprzednio [por. (2.7)] zwracaliśmy uwagę na możliwość znalezienia pola naprężenia dla plastycznie skręcanego pręta na drodze eksperymentalnej. W tym rozdziale omówimy takie podejście do tego zagadnienia oraz przedstawimy pewne wyniki doświadczalne.

6.1. *Usypując ziarnisty materiał, np. piasek na poziomej podstawie o konturach przekroju poprzecznego pręta, otrzymujemy wzgórek piaskowy.*

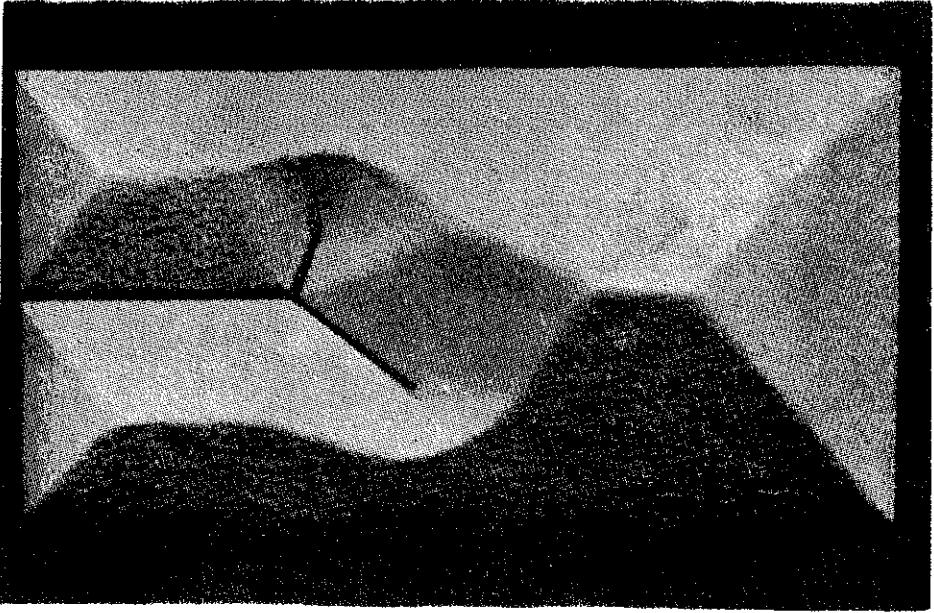
Powierzchnia tego wzgórka ma stałe nachylenie (gradient rzędnych jego powierzchni jest stały), które jest określone przez wewnętrzne tarcie piasku. Krawędzie tej powierzchni są poszukiwanymi liniami nieciągłości pola naprężeń [80]. W przy-



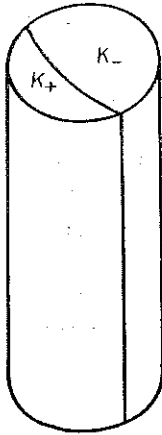
Rys. 45

toczonej pracy można znaleźć szereg przykładów zastosowania tej metody. Wykorzystując tę analogię (bywa ona często nazywana analogią Nádai'a od nazwiska jej twórcy) można łatwo znaleźć pola naprężeń dla prętów jednorodnych z głębokimi wycięciami [81] (por. rys. 45 i 46).

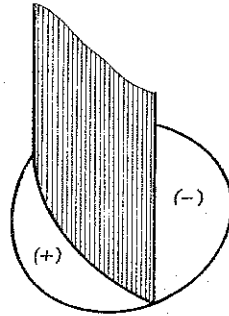
Rozszerzenie tej analogii na przypadek prętów o przekrojach wielospójnych znaleźć można w pracy [82]; omówimy go przy analizie zagadnienia plastycznego skręcania prętów skokowo-niejednorodnych. W odniesieniu do prętów o poprzecz-



Rys. 46



Rys. 47



Rys. 48

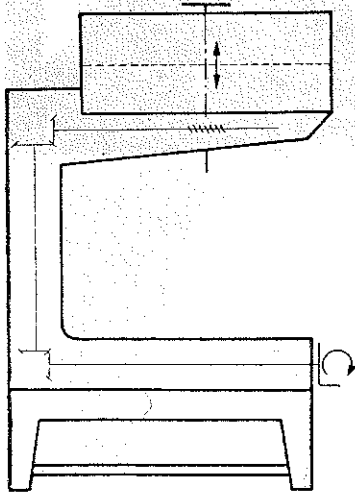
nej skokowej niejednorodności wykorzystanie analogii wzgórza piaskowego wymaga użycia w różnych obszarach przekroju poprzecznego pręta materiałów sypkich o odmiennych kątach tarcia wewnętrznego [11].

Rozpatrzmy skręcany pręt składający się z dwu pryzmatycznych części o granicach plastyczności K_+ i K_- , $K_+ > K_-$ (rys. 47). Zastosujemy analogię wzgórza piaskowego, ustawiając na poziomej podstawie o kształcie przekroju poprzecznego,

pionową bardzo cienką i «nieskończenie» wysoką ściankę wzdłuż linii kontaktu (rys. 48). Wzgórki piaskowe usypane z odpowiednich materiałów w obu częściach przekroju poprzecznego będą miały teraz maksymalnie możliwe objętości. Wzdłuż ścianki działowej otrzymamy na ogół skok powierzchni tych wzgórków. Zgodnie z twierdzeniem o nośności granicznej należy uzyskać maksymalne objętości materiałów sypkich na odpowiadających im częściach przekroju poprzecznego przy jednoczesnej ciągłości powierzchni wzgórków wzdłuż linii kontaktu. W tym celu musimy usunąć ściankę działową na odpowiednią wysokość.

TWIERDZENIE [83]. Prawidłowym rozwiązaniem jest to, które otrzymujemy usuwając ściankę działową na całej długości wzdłuż linii pokrywającej się z niższą linią wzniosu na danym odcinku. Odcinki te wyznaczone są przez punkty przecięcia się obu linii wzniosu.

Dla przeprowadzenia eksperymentów zastosowano urządzenie składające się z metalowego pojemnika oraz podnośnika śrubowego, który miał możliwość pionowego przesuwu w tym pojemniku. Na końcu



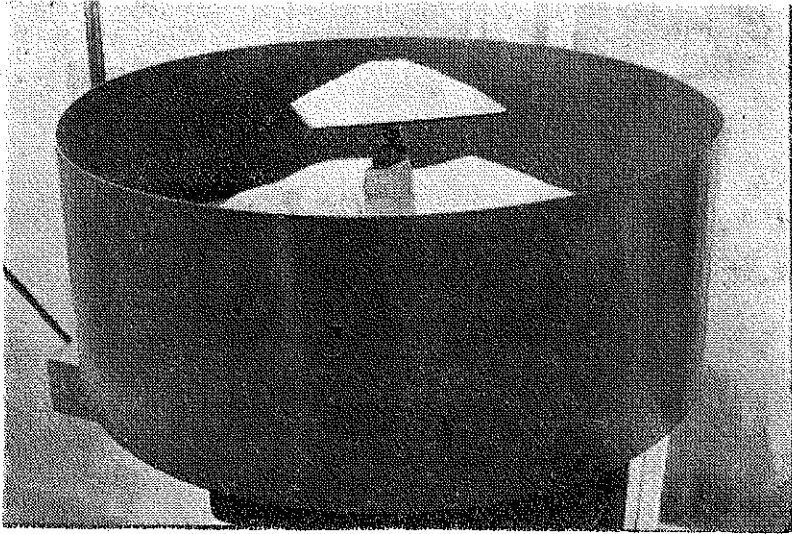
Rys. 49

podnośnika umieszczona została pozioma tarcza, na której ustawiono część przekroju poprzecznego pręta, dla której poszukiwano rozwiązania (rys. 49). Po napełnieniu pojemnika odpowiednim materiałem sypkim za pomocą podnośnika w tempie powolnym [ok. (2 cm/min)] przesuwano model tej części przekroju poprzecznego przez ośrodek syпки do góry, uzyskując statycznie usypany wzgórek (rys. 50).

Eksperymentalna realizacja analogii wzgórza piaskowego przebiega następująco. Usypujemy najpierw wzgórze piaskowe z jednego rodzaju materiału na odpowiadającej mu części przekroju poprzecznego. Na ścianie działowej, ustawionej wzdłuż linii kontaktu, zaznaczamy wznios, jaki ma powierzchnia tego wzgórków i usuwamy materiał.

Analogicznie postępujemy z drugim materiałem, usypując z niego wzgórek na pozostałej części przekroju poprzecznego. Na ścianie działowej otrzymaliśmy w ten sposób dwie linie, określające maksymalny wznios powierzchni tych wzgórków wzdłuż linii kontaktu. Usuwamy ściankę działową zgodnie z wypowiedzianym poprzednio twierdzeniem. Usypujemy następnie wzgórki piaskowe kolejno dla jednego i drugiego rodzaju materiału na odpowiadających im częściach przekroju poprzecznego i zestawiamy je razem. Kiedy linie wzniosu pokrywają się, otrzymujemy poszukiwane rozwiązanie. W przeciwnym przypadku postępujemy tak, jak poprzednio. Zaznaczamy wznios otrzymanych powierzchni wzdłuż ścianki działowej i usuwamy materiał syпки. Obcinamy ściankę działową wzdłuż tej linii wzniosu,

która na danym odcinku jest niżej, i ponownie usypujemy wzgórki piaskowe na odpowiednich częściach przekroju poprzecznego. Jeżeli po zestawieniu obu tych części linie wzniosu pokrywają się, to otrzymujemy poszukiwane rozwiązanie, za-



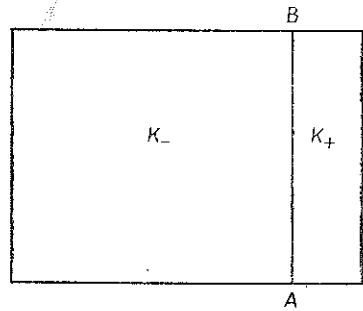
Rys. 50

pewniające maksymalną objętość wzgórków piaskowych. Oczywiście pomocnicza rola wkładki jest zakończona (sięga ona już tylko na wysokość wzniosu powierzchni otrzymanej bryły wzdłuż linii kontaktu).

Może się zdarzyć, że po każdym kolejnym usunięciu ścianki działowej na odpowiednią wysokość będą ponownie występowały różnice w wysokościach linii wzniosu usypywanych wzgórków. Teoretycznie nie jest wykluczone, że będzie to proces kolejnych przybliżeń. Oczywiście, podczas wykonywania takiego eksperymentu otrzymamy wynik przybliżony przy skończonej ilości podcięć ścianki działowej.

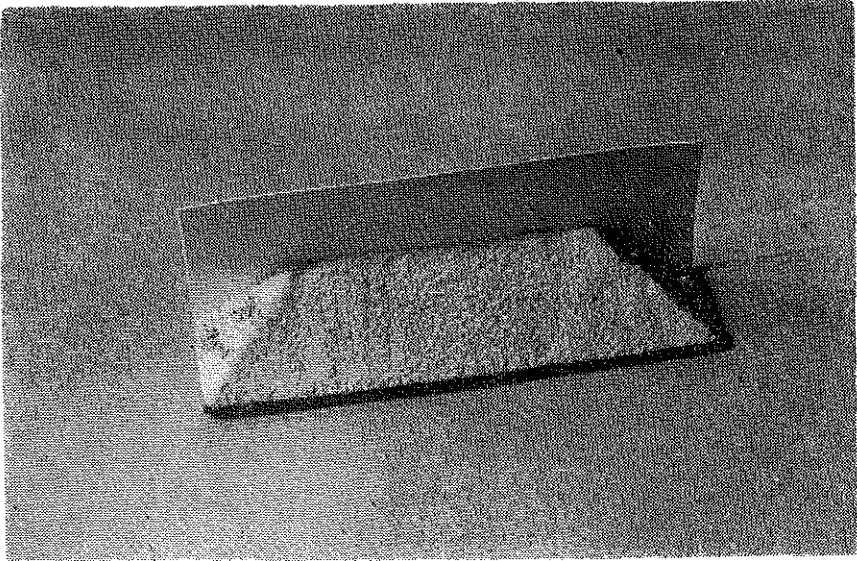
W przypadkach, z którymi zetknął się autor, otrzymano końcowe rozwiązanie co najwyżej po kilku korekturach wysokości ścianki działowej.

Jako przykład rozpatrzmy skręcany pręt prostokątny, składający się z dwu pryzmatycznych części o granicach plastyczności K_+ i K_- , gdzie $K_+ > K_-$. Strefa materiału o wyższej granicy plastyczności jest bardzo wąska (rys. 51). Jako materiału strefy mocniejszej użyto piasku o wewnętrznym kącie tarcia $\alpha_+ = 42^\circ$. Jako materiału strefy słabszej użyto szklanych kulek o średnicy 1 mm i wewnętrznym kącie $\alpha_- = 30^\circ$. Usypując wzgórki na obu częściach przekroju poprzecznego (rys. 52, 53) otrzymujemy wzdłuż ścianki działowej linie wzniosu powierzchni (rys. 54). Linia

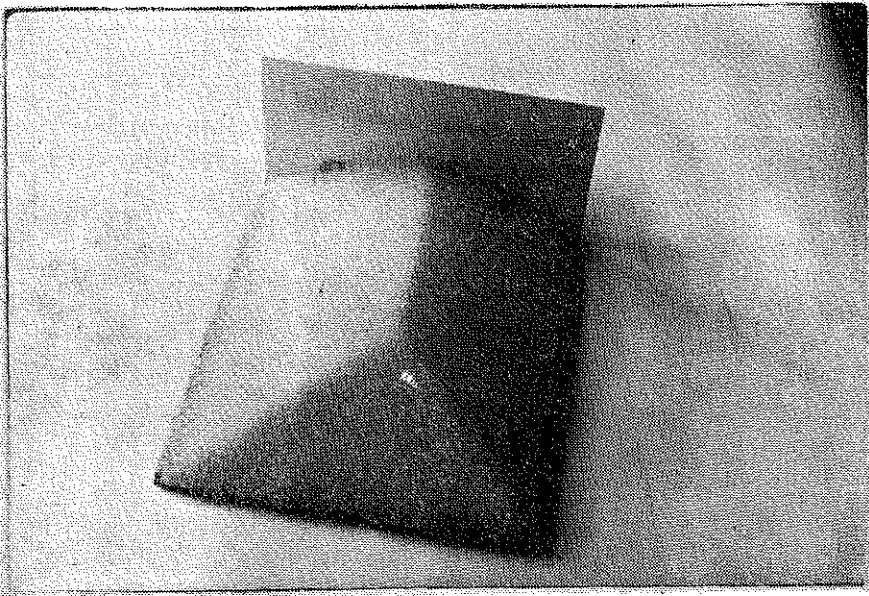


Rys. 51

łamana $AA'A''B''B'B$ odpowiada materiałowi K_+ , a linia łamana $AA''OB''B$ materiałowi K_- . Zgodnie z poprzednim usuwamy tę część ścianki działowej, która znajduje się nad linią $AA''B''B$ (na rys. 54 obszar zakreskowany). Usypując ponownie wzgórki na odpowiadających im częściach przekroju poprzecznego (ze ścianką działową $AA''B''B$) i zestawiając je razem stwierdzamy, że linie wzniosu



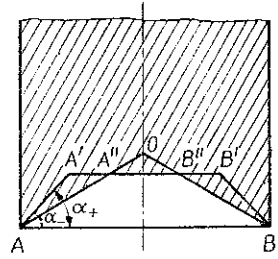
Rys. 52



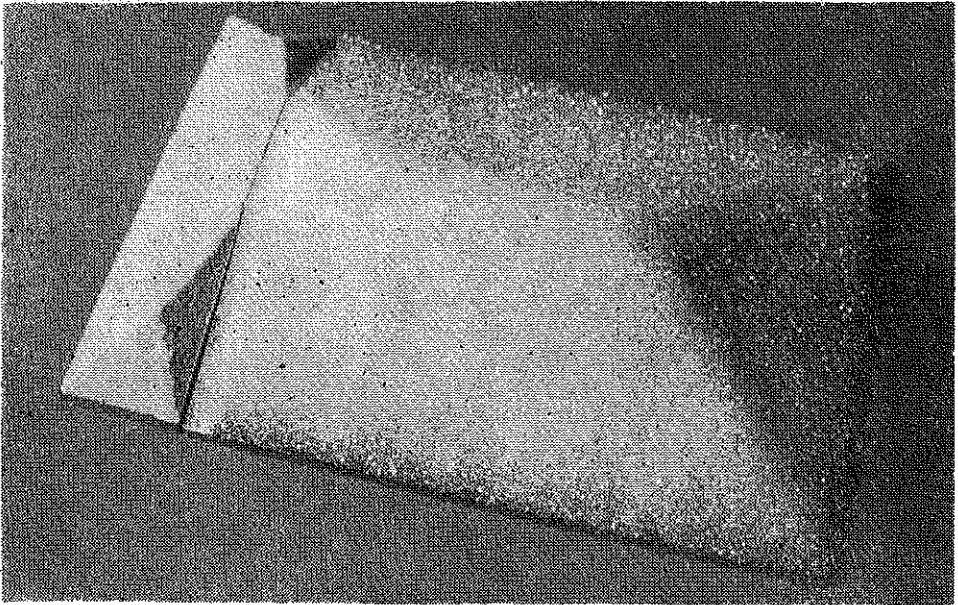
Rys. 53

powierzchni pokrywają się po obu stronach ścianki działowej. Otrzymaliśmy w ten sposób poprawne rozwiązanie (rys. 55). Jak widać, pokrywa się ono całkowicie z rozwiązaniem tego przypadku, zaproponowanym w pracy [12] (por. rys. 56 i 14).

Przykładem ilustrującym przypadek, dla którego zachodzi konieczność kilkakrotnej korekty wysokości ścianki działowej, może być skręcany pręt okrągły z mimośrodowym otworem wewnątrz (rys. 57); jest to, jak wiadomo, szczególny przypadek pręta o poprzecznej skokowej niejednorodności, dla którego $K_+ = K$, $K_- = 0$. Jako materiał strefy mocniejszej zastosujemy piasek, a strefy słabszej wodę. Ścianka działowa będzie miała teraz kształt cylindra o promieniu r . Usypujemy piasek na odpowiadającej mu części przekroju poprzecznego i zaznaczamy wznios powierzchni usypanego wzgórka. Na rys. 58 jest on zaznaczony linią ciągłą $A-A$. Następnie usuwamy wzgórek piaskowy, a do środka cylindra możemy nalać wody. Z góry jednak wiadomo, jaki kształt ma linia wzniosu takiego słupa wody (na rys. 58 oznaczona jest ona linią przerywaną $B-B$). Zgodnie z poprzednim usuwamy ściankę



Rys. 54

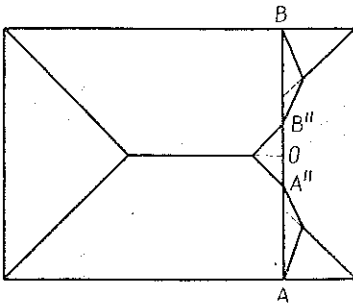


Rys. 55

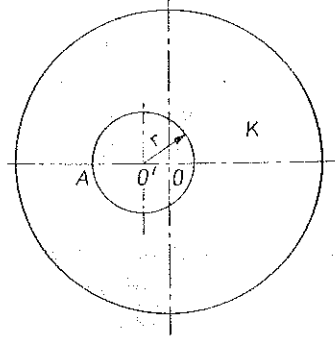
działową na wysokość niższej linii wzniosu, którą w naszym przypadku jest linia ciągła $A-A$. Ponieważ pozostała część ścianki nie jest nigdzie niższa od linii $A-A$, wystarczyłoby ponowne napełnienie cylindra wodą. Łatwo jednak wyobrazić sobie, że linia wzniosu słupa wody będzie teraz linią przerywaną $A-A$ (rys. 58). Zgodnie z twierdzeniem (str. 180) usuwamy ponownie ściankę działową na wysokość linii

przerwanej $A - A$. Po usypaniu wzgórka piaskowego na takim modelu otrzymujemy znane rozwiązanie tego przypadku.

Stosując przedstawioną metodę eksperymentalną można, jak widać, otrzymywać



Rys. 56

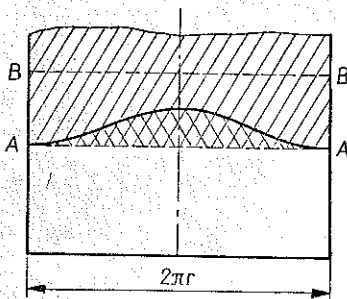


Rys. 57

rozwiązania dla skręcanych prętów pryzmatycznych o poprzecznej skokowej niejednorodności (por. np. rys. 21 i 59 oraz rys. 23 i 60).

Na zakończenie należy zwrócić tu uwagę na następujący fakt. Przy eksperymentalnym wyznaczaniu układu linii nieciągłości pola naprężeń dla skręcanego pręta jednorodnego posługujemy się dowolnym materiałem sypkim, np. piaskiem.

Wartość kąta tarcia wewnętrznego decyduje tylko o wzniosie uzyskanej powierzchni, natomiast nie wpływa na rzut poziomy układu jej krawędzi. Pozwala to na poprawne określenie układu linii nieciągłości pola naprężeń dla danego przekroju poprzecznego skręcanego pręta, przy jednoczesnym pominięciu rozbieżności pomiędzy wartościami granicy plastyczności materiału pręta i kąta tarcia wewnętrznego materiału użytego do eksperymentu.



Rys. 58

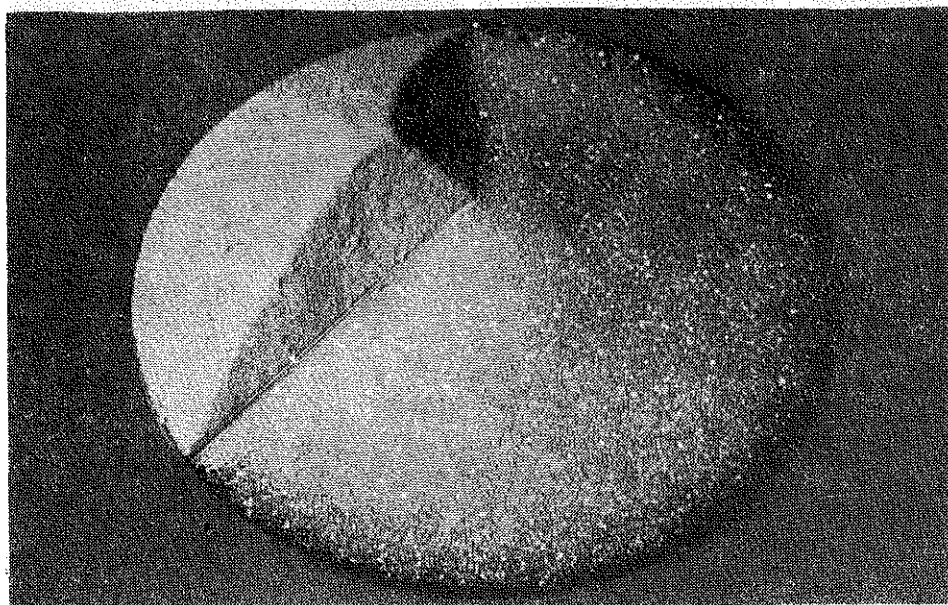
W odniesieniu do prętów o poprzecznej skokowej niejednorodności sprawa dowolności wyboru materiałów sypkich do eksperymentu ulega pewnej komplikacji. Jak wiadomo, na układ linii nieciągłości pola naprężeń w otoczeniu linii kontaktu decydujący wpływ posiada wartość $\lambda = K_-/K_+$, gdzie K_+ i K_- oznaczają granice plastyczności obu materiałów. Widać stąd, że zastosowanie określonego materiału sypkiego w jednym obszarze wymaga koniecznie użycia w drugim takiego, aby był spełniony warunek

$$\lambda = \frac{K_-}{K_+} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_-}{\operatorname{tg} \alpha_+},$$

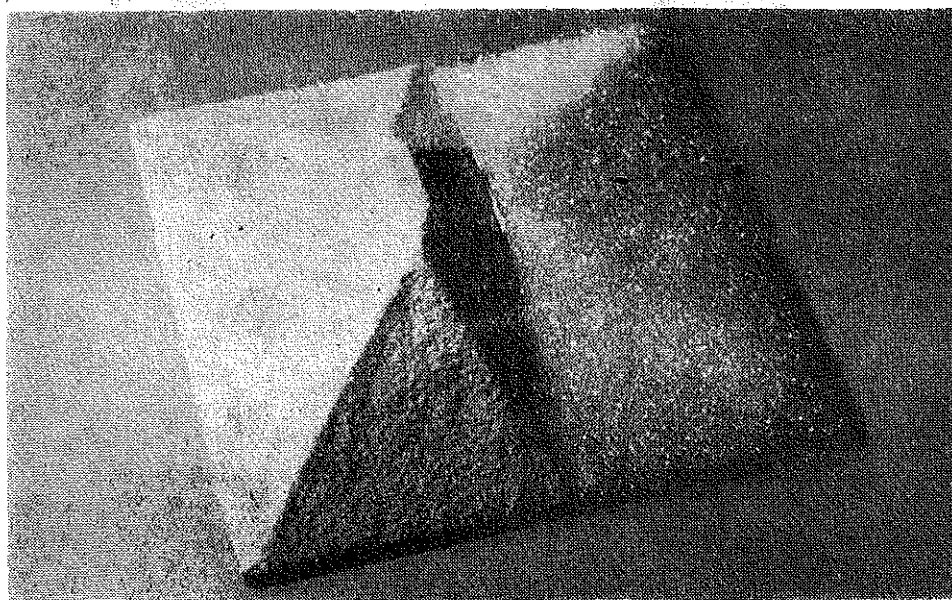
gdzie przez α_- i α_+ oznaczono kąty tarcia wewnętrznego obu materiałów sypkich. Dopiero spełnienie tego warunku zapewni poprawne określenie układu linii nie-

ciągłości pola naprężeń — przy jednoczesnym pominięciu rozbieżności pomiędzy wartościami K_- i K_+ a kątami tarcia wewnętrznego materiałów użytych do eksperymentu.

Na zakończenie tej części należy zwrócić uwagę na fakt, że istnieją również inne eksperymentalne metody dla badania prętów skręcanych. Wymienić tu trzeba

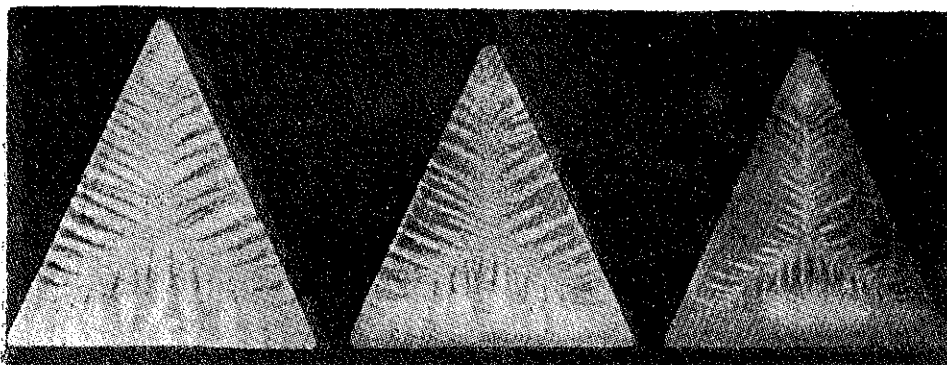


Rys. 59

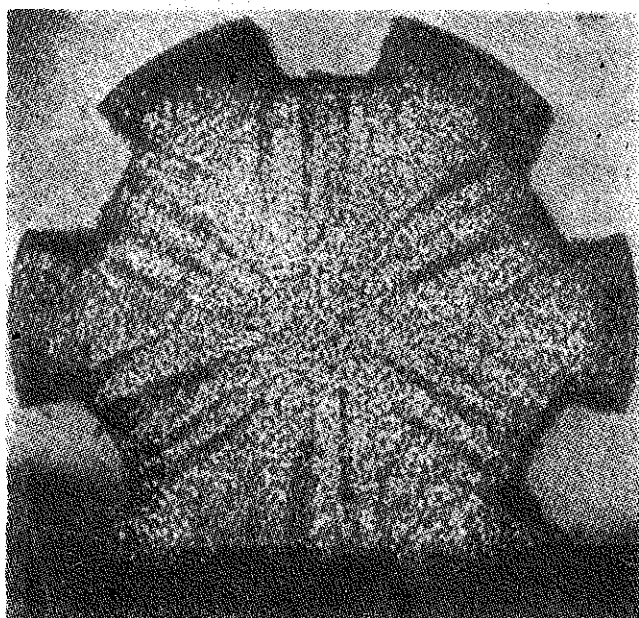


Rys. 60

przede wszystkim analogie elektryczne. W pracy [84] wykorzystano taką analogię dla rozwiązania zadania o czysto-sprężystym i czysto-plastycznym skręcaniu prętów, a w [85] rozpatrzono zadanie o sprężysto-plastycznym skręcaniu okrągłego pręta z idealnie plastycznego materiału również na podstawie modelu elektrycznego.



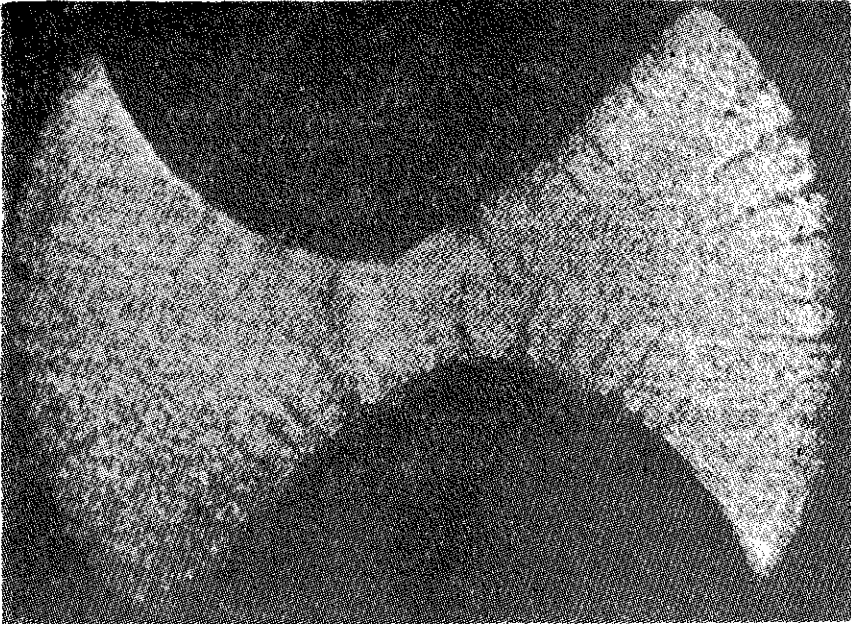
Rys. 61



Rys. 62

6.2. Omawiane dotychczas metody analityczne czy eksperymentalne pozwalają na znalezienie rozkładu naprężeń ścinających w skręcanym sprężysto-plastycznie czy też plastycznie pręcie pryzmatycznym. Naprężenia te występują w dwu płaszczyznach: płaszczyźnie przekroju poprzecznego i płaszczyźnie prostopadłej do niej (por. rys. 62); jest ona jednocześnie prostopadła do powierzchni bocznej pręta. Przeprowadzone doświadczenia na próbkach z miękkiej stali w pełni potwierdzają taki właśnie ich układ (por. np. [80 i 86]).

Na rys. 61 z [80] przedstawiony jest trawiony obraz przekroju poprzecznego próbki dla trzech kolejnych, wzrastających wartości kąta skręcania. Widać wyraźnie wzrost stref plastycznych (ciemne pasma — to warstwy materiału uplastycznionego);



Rys. 63

na ostatnim fragmencie mamy już dokładnie zarysowany układ linii nieciągłości pola naprężeń. Na rys. 62 i 63 z pracy [86] przedstawiono wyniki analogicznych badań mających na celu wykrycie obszarów początkowych płynięcia dla przekrojów poprzecznych wałka wielowypustowego i wiertła.

Na zakończenie nadmienimy, że przeprowadzono również szereg doświadczeń ze skręcaniem dla złomów kruchych [89]. Istnieją również pewne próby analitycznego opisu tego typu zjawisk (np. w pracach [87 i 88]).

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Н. Х. Арутюнян, Б. Л. Абрамян, *Кручение упругих тел*, Гос. Изд. Мат. Лит., Москва 1965.
2. S. P. TIMOSHENKO, I. N. GOODIER, *Theory of elasticity*, New-York, Toronto, London, Mc Graw-Hill Book Company, Inc. 1951.
3. L. PRANDTL, *Zur Torsion von prismatischen Stäben*, Phys. Z., 4, 758–759, 1903.
4. T. J. HIGGINS, *Analogic experimental methods in stress analysis as exemplified by Saint-Venant's torsion problem*, Proc. Soc. Exper. Stress. Anal., 2, 17–27, 1945.
5. А. И. Кийко, *Кручение стержня из неоднородного идеально-пластического материала*, МТТ, 2, 1967.
6. M. GALOS, *Niektóre przypadki plastycznego skręcania prętów*, Rozprawa doktorska, Kraków 1968.

7. А. И. Кузнецов, *Кручение неоднородных пластических стержней*, Изд. АН СССР ОТУ, 11, 1958.
8. M. GALOS, *On analytical calculation of the limit carrying capacity of anisotropic and nonhomogeneous bars under torsion*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. tech., 12, 5, 1964.
9. М. ЖИЧКОВСКИЙ, *Применение метода малого параметра в модификации Лайтхилла к проблемам теории пластичности*, докл. на Всесоюз. Съезде Механики в СССР, Москва 1964.
10. J. RYCHLEWSKI, *Plastic torsion of non-homogeneous bars analyzed in curvilinear coordinates*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. tech., 12, 7, 1964.
11. J. RYCHLEWSKI, *Plastic torsion of bars with jump non-homogeneity*, Acta Mechanica, 1, 1, 1965.
12. J. RYCHLEWSKI, *Plastic torsion of a rectangular bar with jump-nonhomogeneity*, Inter. J. Solids and Structures, 1, 1965.
13. J. RYCHLEWSKI, *Plane flow of perfectly plastic bodies* (w druku).
14. W. PRAGER, P. G. HODGE, *Theory of perfectly plastic solids*, New York—London 1950.
15. А. МИДУХОВСКИ, *Die Kinematik von plastisch tordierten Stäben mit sprunghafter Inhomogenität*, Acta Mechanica, 4, 1967.
16. Г. И. Быковцев, *Кандидатская диссертация*, Воронежский Университет, 1963.
17. R. HILL, *Plastic torsion of anisotropic bars*, J. Mech. Phys. Solids, 2, 87–91, 1954.
18. В. О. Геогджаев, *Пластическое кручение анизотропных стержней*, Труды Москов. Физ. Техн. Инст., вып. 3, 171–179, 1959.
19. Г. И. Быковцев, *О кручении призматических стержней из анизотропного материала*, Изв. АН СССР ОТН Мех. и Мат., 3, 1961.
20. В. В. Соколовский, *Об одной задаче упруго-пластического кручения*, ПММ, 6, 2–3, 1942.
21. В. В. Соколовский, *Теория пластичности*, изд. Высшая Школа, Москва 1969.
22. Л. А. Галин, *Упруго-пластическое кручение призматических стержней полигонального сечения*, ПММ, 8, 4, 1944.
23. Л. А. Галин, *Упруго-пластическое кручение призматических стержней*, ПММ, 13, 3, 1949.
24. D. G. CHRISTOPHERSON, *A theoretical investigation of plastic torsion in an I-beam*, J. Sppl. Mech., 7, 1–4, 1940.
25. F. S. SHAW, *The torsion of solids and hollow prisms in the elastic and plastic range by the relaxation methods*, Australian Council for Aeron., Rep. ACA-11, 1944.
26. А. М. Горлов, *Применение вариационных методов к проблемам упруго-пластического кручения стержней*, Труды Москов. Инст. Инж. Железнодорож. Транспор., 122, 407–419, 1959.
27. Л. М. Качанов, *Пример применения вариационного метода к задаче об упруго-пластическом кручении*, Исслед. по теории упругости и пластичности, Ленингр. Инст., 157–161, 1961.
28. A. GELEP, *Deformationarbeit bei bleibender Verdrehung von Stäben mit einfachem Querschnitt*, ZAMM, 42, 6, 221–230, 1962.
29. П. И. Перлин, *Упруго-пластическое кручение стержней с овальным поперечным сечением*, Инж. Сборник, 31, 202–205, 1961.
30. N. K. TALUKDER, R. K. ШАКРАВARTI, *Torsion in bars under plastic deformation*, J. Int. Eng. (India), Mech. Eng. Div., 45, 3, 67–71, 1964.
31. Н. В. Баничук, В. Петров, Ф. Черноусько, *Численное решение вариационных и краевых задач методом локальных вариаций*, Журн. Выч. Матем. Мат. Физ., 6, 6, 1966.
32. Н. В. Баничук, *Упруго-пластическое кручение стержней*, МГТ, 1967.
33. P. G. HODGE Jr, *Elastic-plastic torsion as a problem in non-linear programming*, Inter. J. Solids Structures 3, 989–999, 1967.
34. R. B. STOUT, P. G. HODGE Jr, *Elastic-plastic torsion of hollow cylinders*, 12, 1, 1970.
35. С. Г. Михлин, *Вариационные методы в математической физике*, Гостехиздат, 1957.
36. Ф. Черноусько, *Метод локальных вариаций для численного решения вариационных задач*, Журн. Выч. Матем. Мат. Физ., 6, 4, 1965.
37. Н. А. Крылов, Ф. Черноусько, *Решение задач оптимального управления методом локальных вариаций*, Журн. Выч. Матем. Мат. Физ., 6, 2, 1966.

38. TSUAN WU TING, *Elastic-plastic torsion of a square bar*, Trans. Amer. Math. Soc., **123**, 2, 1966.
39. TSUAN WU TING, *Elastic-plastic torsion problem*, II, Arch. Rat. Mech. Anal., **25**, 5, 1967.
40. TSUAN WU TING, *Elastic-plastic torsion problem*, III, Arch. Rat. Mech. Anal., **34**, 3, 1969.
41. А. Дембская, А. Медуховский, *Упруго-пластическое кручение составных стержней*, МТТ, 6, Москва 1969.
42. A. MIODUCHOWSKI, *Pewne przypadki plastycznego i sprężysto-plastycznego skręcania prętów jako zagadnienia numeryczne (w przygotowaniu)*.
43. J. RYCHLEWSKI, *O kryteriach optymalizacji niejednorodności sprężystej i plastycznej (w druku)*.
44. J. MAJERCZYK, A. MIODUCHOWSKI, *Optymalna niejednorodność plastyczna skręcanego pręta*, Prace IPPT 7/1969.
45. H. HALKIN, L. W. NEUSTADT, *General necessary conditions for optimalization problems*, Proc. Nat. Acad. Sci., **4**, 1966.
46. L. W. NEUSTADT, *An abstract variational theory with application to a broad class of optimalization problems — general theory*, S.J.A.M., J. Control, **1**, 1967.
47. Д. Д. Ивлев, *Теория идеальной пластичности*, глава 8, Издат. Наука, Москва 1966.
48. Е. Янке, Ф. Эмде, *Таблицы функций с формулами и кривыми (перевод с немецкого)*, Физматгиз, 1959.
49. W. FREIBERGER, Commonwealth of Australia, Aeron. Res. Labs. Raport A.R.L. (SM 213) 1953.
50. A. J. WANG, W. PRAGER, *Plastic twisting of a circular ring sector*, J.M.P.S., **3**, 1955.
51. O. GOHNER, Ingenieur-Archiv, **1**, 619, 1930.
52. O. GOHNER, *Schubspannungsverteilung im Querschnitt eines gedrehten Ringstabs mit Anwendung auf Schraubfedern*, Ingenieur-Archiv, **2**, 1, 1931.
53. O. GOHNER, *Die Berechnung zylindrischer Schraubfedern*, Zeitschrift VDI, **269**, 1932.
54. W. FREIBERGER, *Elastic-plastic torsion of circular ring sectors*, Quart. Appl. Math., **14**, 259–265, 1956.
55. W. FREIBERGER, *Torsion*, Chapter 48 of «Handbook of Engineering Mechanics», Mc Graw-Hill, New York 1962.
56. W. FREIBERGER, W. PRAGER, *Plastic twisting of thick-walled circular ring sectors*, J. Appl. Mech., **23**, 461–463, 1965.
57. A. M. WAHL, *Mechanical Springs*, Mc Graw-Hill, New-York-Toronto-London 1963.
58. J. H. MICHELL, Proc. London Math. Soc., **31**, 1899.
59. A. FÖPPL, Sitz. Bayer Akad. Wiss., Monachium, **35**, 1905.
60. H. NEUBER, *Kerbspreitungslehre*.
61. В. В. Соколовский, *Дилатантное течение жидкости в цилиндрических и призматических трубах*, Инж. журнал, **5**, 1, 1965.
62. Л. М. Качанов, *Пластическое кручение круглых стержней переменного диаметра*, ПММ, **12**, 4, 375–384, 1948.
63. R. P. EDDY, F. S. SHAW, *Numerical solution of elastoplastic torsion of shaft of rotational symmetry*, J. Appl. Mech., **16**, 139–148, 1949.
64. E. VARLEY, *Flows of dilatant fluids*, Quart. Appl. Math., **19**, 4, 1962.
65. В. В. Соколовский, *Дилатантное течение жидкости в цилиндрических и призматических трубах*, Инж. журнал, **5**, 4, 1964.
66. В. В. Соколовский, *Дилатантное течение жидкости в торообразных трубах*, Инж. журнал, **5**, 1, 1965.
67. A. NÁDÁI, *Plasticity*, New-York-London 1931.
68. M. A. SADOVSKY, *A principle of maximum plastic resistance*, J. Appl. Mech., June 1943.
69. А. Р. Ржаницын, *Приближенные решения по вопросам механики и теории пластичности*, ТУС, Москва 1965.
70. M. WNUK, *Przykłady obliczania krzywych nośności granicznej*, Rozpr. Inżyn., **11**, 4, 1963.
71. M. WNUK, *Stan graniczny pręta jednocześnie skręcanego i rozciąganego przy dowolnym kształcie przekroju*, Rozpr. Inżyn., **10**, 3, 1962.

72. F. A. GAYDON, *On the combined torsion and tension of a partly plastic circular cylinder*, Quart. J. Mech. and Appl. Math., **5**, 1, 1952.
73. M. ŻYCZKOWSKI, *Przypadek jednoczesnego rozciągania i skręcania pręta o przekroju kołowym w zakresie sprężysto-plastycznym*, Rozpr. Inżyn. **3**, 2, 1955.
74. G. H. HANDELMAN, *A variational principle for a state of combined plastic stress*, Quart. Appl. Math., **1**, 351 – 353, 1944.
75. S. PIECHNIK, *The influence of bending on the limit state of a circular bar objected to torsion*, Arch. Mech. Stos., **13**, 1, 1961.
76. S. PIECHNIK, M. ŻYCZKOWSKI, *On the plastic interaction curve for bending and torsion of a circular bar*, Arch. Mech. Stos., **13**, 1961.
77. R. HILL, *A variational principle of maximum plastic work in classical plasticity*, Quart. J. Mech. Appl. Math., **1**, 18 – 28, 1948.
78. A. MIOUCHOWSKI, *Plastyczne skręcanie prętów rozciąganych o poprzecznej skokowej niejednorodności* (w opracowaniu).
79. K. A. RECKLING, *Plastizitätstheorie und ihre Anwendung auf Festigkeitsprobleme*, Berlin (Heidelberg) — New York 1967.
80. A. NÁDÁI, *Theory of flow and fracture of solids*, New-York-Toronto-London 1950.
81. F. A. MCCLINTOCK, *The growth of fatigue cracks under plastic torsion*, Proc. Int. Conf. Fatigue Metals, London, 10 – 14 September, 538 – 543, 1956.
82. M. A. SADOVSKY, *An extension of the sand heap analogy in plastic torsion applicable to cross-sections having one or more holes*, J. Appl. Mech., **2**, 8, 1941.
83. A. MIOUCHOWSKI, *Sandhügelgleichnis für plastisch tordierte Stäbe mit Sprunghaftigkeit*, Inhomogenität, Acta Mechanica, **5**, 289 – 302, 1968.
84. S. C. REDSHOW, *Use of an electrical analogue for the solution of variety of torsion problems*, Brit. J. Appl. Phys., **10**, 1960.
85. А. К. Прейсс, Т. А. Дегтева, *Решение упруго-пластического кручения стержней с помощью электрической аналогии*, Методы Иссл. Напрж., **31** – 37, Москва 1965.
86. C. W. MAC GREGOR, J. A. HORNES, *Recent investigations in plastic torsion*, Presented at the Meeting of the American Society of Mechanical Engineers, held at Cornell University, Ithaca, N.Y., June 25 – 26, 1937.
87. T. Y. THOMAS, *Plastic flow and fracture in solids*, Academic Press, New York-London, 1961.
88. T. Y. THOMAS, *Fracture of brittle solids by applied loads*, J. Math. Mech., **19**, 5, 1969.
89. S. KATARZYŃSKI, S. KOCANĀDA, M. ZAKRZEWSKI, *Badania własności mechanicznych metali*, WNT, Warszawa 1967.
90. J. MANDEL, *Sur les deformations de la torsion plastique*, C.R.Ac. Sci., **222**, 1205 – 1207, 1946.
91. P. G. HODGE Jr, *On the soap-film and sand hill analogy for elastic-plastic torsion*, Progress in Appl. Mech., **251** – 259, 1963.
92. M. GALOS, M. ŻYCZKOWSKI, *Analityczna metoda obliczania nośności granicznej prętów skręcanych*, Rozpr. Inżyn., **12**, 2, 269 – 298, 1964.

Резюме

ПЛАСТИЧЕСКОЕ КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ

В настоящей работе, имеющей характер обзора, занимающейся задачей пластического кручения стержней, особое внимание обращается на вопрос существования пластической неоднородности и на числовую задачу, связанную с этой проблемой. Работа состоит из шести следующих разделов: 1. Упругое кручение призматических стержней; 2. Несущая способность (для однородных, неоднородных и анизотропных стержней); 3. Упруго-пластическое кручение (для однородных и неоднородных стержней); 4. Некоторые вопросы опти

мализации формы и неоднородности; 5. Обобщения проблематики пластического кручения стержней (а — стержни переменного диаметра и стержни в форме тора, б — сложные нагрузки: растяжение и кручение изгибы, для однородных и неоднородных стержней); 6. Моделирование и опытные результаты (для однородных и неоднородных стержней).

SUMMARY

PLASTIC TWISTING OF RODS

In this retrospective paper devoted to the problem of plastic twisting of rods, special stress is laid on the problem connected with the appearance of plastic inhomogeneity and the associated numerical problem.

The paper consists of the following six chapters: 1 — elastic twisting of prismatic rods; 2 — carrying boundary (for homogeneous, inhomogeneous and anisotropic rods); 3 — elastic-plastic twisting (for homogeneous and inhomogeneous rods); 4 — certain problems of optimization of shape and inhomogeneity; 5 — generalizing of problems of plastic twisting of rods: a) — rods of varying diameter and rods of a torous shape, b) — compound loadings: stretching and twisting, buckling and twisting — for homogeneous and inhomogeneous rods; 6 — modelling and experimental results (for homogeneous and inhomogeneous rods).

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca została złożona w Redakcji dnia 4 kwietnia 1970 r.
