

## OPTIMALIZACJA OSIOWO-SYMETRYCZNEGO USTROJU WISZĄCEGO, ZAWIESZONEGO NA GÓRNYM PIERŚCIENIU

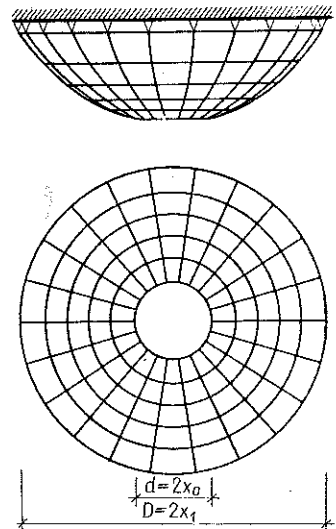
STANISŁAW K E M P N Y (GLIWICE)

### 1. WSTĘP

W niniejszej pracy poszukuje się osiowo-symetrycznego, siatkowego przekrycia wiszącego o cięgnach południkowych i równoleżnikowych, poddanego działaniu obciążenia równomiernie rozłożonego po jego powierzchni, przy którym dla określonego wyężenia spełniony jest warunek minimum materiału elementów nośnych (rys. 1). Południkowe i równoleżnikowe elementy ustroju powinny mieć tak zmieniające się przekroje, aby przy wyznaczonym kształcie panujące w nich naprężenia były równe naprężeniu dopuszczalnemu. Ciężaru własnego tych elementów nie uwzględnia się w obliczeniach. Ustrój jest podparty w sposób ciągły jedynie na zewnętrznym brzegu. Pierścień dolny niepodparty może być obciążony bądź nieobciążony.

Dla rozwiązania tego zagadnienia posłużono się tutaj szczególnym modelem ustroju siatkowego o nieskończonej ilości elementów południkowych i równoleżnikowych. Objętość cięgien nośnych w takim ustroju jest funkcją zależnym od krzywej kształtu południka, a postawione zagadnienie stanowi wówczas zadanie wariacyjne, w którym poszukuje się argumentu ekstremum tego funkcjonału. Okazuje się, że w omawianym przypadku poszukiwanie kształtu optymalnego z warunku na minimum materiału jest równoważne poszukiwaniu tegoż optymalnego kształtu z warunku na minimum energii potencjalnej odkształcenia. Na możliwość korzystania z energii potencjalnej przy poszukiwaniu układów o minimalnej ilości materiału konstrukcyjnego wskazał po raz pierwszy Z. WASIUTYŃSKI w podstawowych i monograficznych pracach [1 i 2].

Optymalizacją podobnego ustroju, lecz podpartego równocześnie na zewnętrznym i wewnętrznym pierścieniu, zajmował się S. LESSAER w pracy doktorskiej [4]. Odcinki cięgien siatki pomiędzy węzłami przyjęto tam jako proste, a przekrój ich jako



Rys. 1

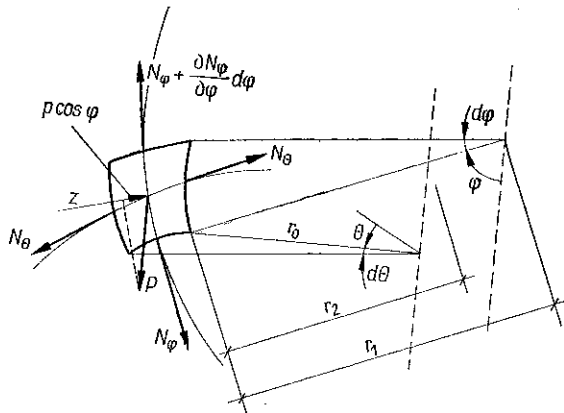
zmienny, spełniający warunek wytrzymałości. Zagadnienie optymalizacji w tym przypadku sprowadziło się do poszukiwania ekstremum funkcji wielu zmiennych.

S. JENDO w pracy [5] zajmował się również osiowo-symetrycznym ustrojem podpartym na zewnętrznym i wewnętrznym pierścieniu z tym jednak, że ustrój ten utworzony jest wyłącznie z elementów południkowych. Kształt tych cięgien południkowych wyznaczył S. LESSAER w pracy [3] w postaci szeregu, a S. JENDO w postaci zamkniętej za pomocą funkcji specjalnych (funkcji błędu). S. JENDO wyznacza kształt cięgien, odpowiadający najmniejszemu zużyciu materiału, przez wyznaczenie parametrów funkcji kształtu przy założeniu stałego przekroju cięgna. W pracy [8] podano sposób projektowania ustroju różniącego się od rozpatrywanego w [5] występowaniem elementów równoleżnikowych, napiętych takimi siłami, aby po uwzględnieniu ciężaru pokrycia siły w elementach południkowych były stałe.

## 2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA WARIACYJNEGO

Przyjęto następujące założenia:

- ustrój jest osiowo-symetryczny, podparty na zewnętrznym obwodzie (rys. 1);
- wymiary ustroju  $D=2x_1$  i  $d=2x_0$  są ustalone;
- obciążenie jest pionowo i równomiernie rozłożone na powierzchni;
- przy wyznaczaniu wielkości wewnętrznych przyjęto zasadę zeszytywnienia;
- ciągną uważa się za idealnie wiotkie;
- ustrój jest złożony ze ściśle przylegających elementów południkowych i równoleżnikowych, tworzących w ten sposób continuum materialne;
- naprężenia dopuszczalne dla materiału cięgien  $k_d$  są w pełni wykorzystane w każdym z ich przekrojów.



Rys. 2

Przyjęte założenia pozwalają na korzystanie z równań powłok w stanie błonowym:

$$(2.1) \quad 2\pi r_0 N_\varphi \sin \varphi + R = 0, \quad \frac{N_\varphi}{r_1} + \frac{N_\theta}{r_2} + Z = 0,$$

gdzie zgodnie z rys. 2  $N_\varphi$  i  $N_\theta$  są odpowiednio siłami południkowymi i równoleżnikowymi, a  $R$  wypadkową obciążenia znajdującego się poniżej rozpatrywanego poziomego przekroju. Zgodnie z tym

$$R = -2\pi p \int_{x_0}^x x \sqrt{1+y'^2} dx = -2\pi p z(x),$$

gdzie

$$z(x) = \int_{x_0}^x x \sqrt{1+y'^2} dx;$$

uwzględniając ponadto (rys. 3), że

$$\sin \varphi = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$$

otrzymuje się z (2.1)<sub>1</sub>

$$(2.2) \quad N_\varphi = p \frac{\sqrt{1+y'^2}}{xy'} z(x).$$

Promienie krzywizn głównych w rozpatrywanym przypadku wynoszą

$$r_1 = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}, \quad r_2 = \frac{x\sqrt{1+y'^2}}{y'}.$$

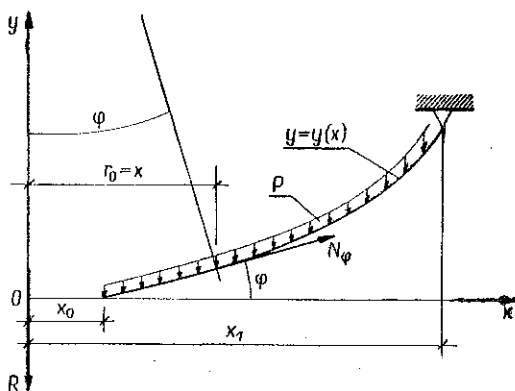
Wstawiając do równania (2.1)<sub>2</sub>  $Z = -p \cos \varphi = -p/\sqrt{1+y'^2}$  wyrażenia na  $r_1$  i  $r_2$  oraz (2.2), otrzymano

$$(2.3) \quad N_\theta = p \left[ \frac{x}{y'} - \frac{y''}{y'^2 \sqrt{1+y'^2}} z(x) \right].$$

Równanie (2.3) ma wpływ na dobór krzywych dopuszczalnych, gdyż na pewnych krzywych może być  $N_\theta > 0$ , na innych zaś w przedziale  $\langle x_0, x_* \rangle N_\theta \geq 0$ , a w pozostałym przedziale  $\langle x_*, x_1 \rangle N_\theta < 0$  itp. Stąd wniosek, że w funkcjale objętości cięgien nośnych należy rozpatrywać bezwzględną wartość sił równoleżnikowych.

Objętości elementów południkowych i równoleżnikowych odpowiednio wynoszą (oznaczenia zgodnie z rys. 2):

$$v_1 = \int_{(Q)} \int \frac{N_\varphi r_0 d\theta}{k_d} r_1 d\varphi, \quad v_2 = \int_{(Q)} \int \frac{|N_\theta| r_1 d\varphi}{k_d} r_0 d\theta,$$



Rys. 3

gdzie  $Q$  jest polem funkcji podcałkowej stanowiącym rzut poziomy rozpatrywanego ustroju,  $k_d$  zaś naprężeniem dopuszczalnym dla metariału ciągien.

Całkowita objętość elementów nośnych

$$v = v_1 + v_2 = \int_{(Q)} \int \frac{1}{k_d} (N_\varphi + |N_\theta|) r_0 d\theta r_1 d\varphi.$$

Na przykład wyrażenie na  $v_1$  można przedstawić w postaci

$$v_1 = \int_{(Q)} \int \frac{(N_\varphi r_0 d\theta)^2}{k_d^2 \frac{N_\varphi r_0 d\theta}{k_d}} r_1 d\varphi = \int_{(Q)} \int \frac{(N_\varphi r_0 d\theta)^2}{MA} r_1 d\varphi,$$

gdzie  $M$  jest stałą, a  $A$  polem powierzchni przekroju ciągien południkowych. Otrzymana postać funkcjonału  $v_1$  wskazuje na to, że w rozpatrywanym zadaniu warunek na minimum materiału elementów nośnych jest równoważny warunkowi na minimum energii potencjalnej odkształcenia.

Uwzględniając wzory (2.2) i (2.3) oraz  $r_1 d\varphi = ds = \sqrt{1+y'^2} dx$  uzyskuje się po scałkowaniu w granicach  $\theta=0$  do  $\theta=2\pi$  formułę

$$v' = \frac{2\pi p}{k_d} \int_{x_0}^{x_1} \left[ \left( y' + \frac{1}{y'} \right) z + \left| \frac{x^2}{y'} \sqrt{1+y'^2} - \frac{xy''}{y'^2} z \right| \right] dx.$$

Badanie ekstremum  $v'$  jest równoważne badaniu ekstremum funkcjonału

$$(2.4) \quad v = \int_{x_0}^{x_1} \left[ \left( y' + \frac{1}{y'} \right) z + \left| \frac{x^2}{y'} \sqrt{1+y'^2} - \frac{xy''}{y'^2} z \right| \right] dx.$$

Wprowadzając oznaczenie

$$\left( y' + \frac{1}{y'} \right) z = F^\varphi(x, z, y'), \quad \text{oraz} \quad \frac{x^2}{y'} \sqrt{1+y'^2} - \frac{xy''}{y'^2} z = F^\theta(x, z, y', y''),$$

funkcjonał (2.4) można przedstawić w postaci

$$(2.5) \quad v = \int_{x_0}^{x_1} (F^\varphi + |F^\theta|) dx.$$

Klasą krzywych dopuszczalnych dla powyższego funkcjonału jest zbiór krzywych klasy  $C^r$ , gdzie  $r \geq 1$  o jednym punkcie stałym, gdyż dla  $x=x_0$  ma być  $y(x_0)=0$ , i drugim ruchomym, przesuwanym się po prostej  $x=x_1$ .

Naturalne będzie również założenie  $y' \geq 0$  dla wszystkich  $x \in \langle x_0, x_1 \rangle$ . Ostatnie warunki można krótko zapisać w postaci:

$$(2.6) \quad \begin{array}{l} y \in C^r(P_0, P_1), \quad r \geq 1, \\ P_0(x_0, 0), \quad P_1 \in x=x_1, \quad y' \geq 0, \quad \bigwedge \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad x \in \langle x_0, x_1 \rangle. \end{array}$$

## 3. POSZUKIWANIE OPTIMALNEGO KSZTAŁTU

Badanie minimum funkcjonału (2.4) przeprowadzone zostanie dla trzech jedynie możliwych przypadków rozkładu sił równoleżnikowych.

## 3.1. Siły równoleżnikowe są rozciągające na całej powierzchni siatki

Z postaci funkcjonału (2.4) wynika, że może on osiągać ekstremum na krzywych klasy  $C^2$  bądź  $D^2$  (krzywych przedziałami ciągłych wraz z pochodnymi do drugiego rzędu włącznie). Dla klasy  $C^2$  krzywych dopuszczalnych i takich, że dla każdej z tych krzywych jest  $N_\theta > 0$  lub  $F^\theta > 0$  równanie (2.4) przyjmuje postać

$$v = \int_{x_0}^{x_1} \left[ \frac{x^2}{y'} \sqrt{1+y'^2} + \left( \frac{1}{y'} + y' - \frac{xy''}{y'^2} \right) z \right] dx.$$

Ponieważ

$$\left\{ z(x) = \int_{x_0}^x x \sqrt{1+y'^2} dx \right\} \equiv \{ z' - x \sqrt{1+y'^2} = 0 \}$$

z warunkiem  $z(x_0) = 0$  lub  $z' - x \sqrt{1+u^2} = 0$ , jeśli  $y' - u = 0$ , więc ostatnie wyrażenie na  $v$  przybierze postać

$$(3.1) \quad v = \int_{x_0}^{x_1} \left[ \frac{x^2}{u} \sqrt{1+u^2} + \left( \frac{1}{u} + u - \frac{xu'}{u^2} \right) z \right] dx,$$

z aholonomicznymi warunkami ubocznymi

$$(3.2) \quad z' - x \sqrt{1+u^2} = 0, \quad y' - u = 0.$$

Zgodnie ze znaną regułą mnożników Lagrange'a [6] należy w tym przypadku posłużyć się funkcją tworzącą

$$(3.3) \quad H = \frac{x^2}{u} \sqrt{1+u^2} + \left( \frac{1}{u} + u - \frac{xu'}{u^2} \right) z + \lambda_1(x) (z' - x \sqrt{1+u^2}) + \lambda_2(x) (y' - u),$$

gdzie funkcje  $\lambda_1(x)$  i  $\lambda_2(x)$  są mnożnikami Lagrange'a. Nietrudno zauważyć, że układ funkcji  $u, y, z, \lambda_1, \lambda_2$  nie spełnia warunku Hilberta i tym samym krzywa stacjonarna nie jest regularną. Istotnie

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u'^2} \equiv 0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial y'^2} \equiv 0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial z'^2} \equiv 0,$$

a to oznacza, że warunek Hilberta nie jest spełniony [6].

Układ równań Eulera-Lagrange'a dla funkcji  $H$  przedstawia się następująco:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} H_u - \frac{d}{dx} H_{u'} &= \frac{x^2}{\sqrt{1+u^2}} + z - \lambda_1(x) \frac{xu}{\sqrt{1+u^2}} - \lambda_2(x) = 0, \\ H_y - \frac{d}{dx} H_{y'} &= -\frac{d}{dx} [\lambda_2(x)] = 0, \\ H_z - \frac{d}{dx} H_{z'} &= \frac{1}{u} + u - \frac{xu'}{u^2} - \frac{d}{dx} [\lambda_1(x)] = 0. \end{aligned}$$

Z (3.4)<sub>2</sub> wynika, że  $\lambda_2(x) = c_2$  jest stałą. Uwzględniając zależność (3.2) otrzymano z (3.4)<sub>3</sub>

$$\lambda_1(x) = y + \frac{x}{y'} + c_1.$$

Wreszcie z (3.4)<sub>1</sub>, (3.2) oraz ostatnich dwóch zależności otrzymuje się równanie różniczkowe krzywej stacjonarnej:

$$(3.5) \quad x(y+c_1)y'' + [(y+c_1)y' - x](1+y'^2) = 0.$$

Na krzywej (3.5) pierwsza wariacja funkcjonału (3.1) z aholonomicznymi warunkami ubocznymi (3.2) przekształca się do postaci

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \delta v = & -\{[H - u' H_{u'} - y' H_{y'} - z' H_{z'}]_{x=x_0} \delta x_0 + [H_{u'}]_{x=x_0} \delta u_0 + \\ & + [H_{y'}]_{x=x_0} \delta y_0 + [H_{z'}]_{x=x_0} \delta z_0\} + [H - u' H_{u'} - y' H_{y'} - z' H_{z'}]_{x=x_1} \delta x_1 + \\ & + [H_{u'}]_{x=x_1} \delta u_1 + [H_{y'}]_{x=x_1} \delta y_1 + [H_{z'}]_{x=x_1} \delta z_1. \end{aligned}$$

Ponieważ  $y(x_0) = 0$ ,  $z(x_0) = 0$ , a drugi koniec przesuwa się po prostej  $x = x_1$ , to równanie (3.6) przybierze postać

$$(3.7) \quad \delta v = -[H_{u'}]_{x=x_0} \delta u_0 + [H_{u'}]_{x=x_1} \delta u_1 + [H_{y'}]_{x=x_1} \delta y_1 + [H_{z'}]_{x=x_1} \delta z_1.$$

Występująca w formułach (3.6) i (3.7) funkcja  $H$  ma postać (3.3).

Podstawowym warunkiem koniecznym, ażeby krzywa stacjonarna dana równaniem (3.5) była argumentem ekstremum całki (3.1) z warunkami (3.2) jest, aby pierwsza wariacja była równa zeru, tzn. aby spełnione były następujące warunki brzegowe:

$$(3.8) \quad \begin{aligned} -[H_{u'}]_{x=x_0} &= \left[ \frac{x}{u^2} z \right]_{x=x_0} = 0, \\ [H_{u'}]_{x=x_1} &= - \left[ \frac{x}{u^2} z \right]_{x=x_1} = 0, \\ [H_{y'}]_{x=x_1} &= [\lambda_2(x)]_{x=x_1} = c_2 = 0, \\ [H_{z'}]_{x=x_1} &= [\lambda_1(x)]_{x=x_1} = \left[ \left( y + \frac{x}{y'} + c_1 \right) \right]_{x=x_1} = 0. \end{aligned}$$

Warunki (3.8) są sprzeczne, gdyż z (3.8)<sub>4</sub> wynika

$$c_1 = - \left[ y(x_1) + \frac{x_1}{y'(x_1)} \right],$$

a z (3.4)<sub>1</sub>, uwzględniając ostatnie wyrażenie oraz (3.2), że

$$c_2 = \left[ \left( z + \frac{x^2}{\sqrt{1+y'^2}} \right) \right]_{x=x_1} = 0.$$

Oznacza to sprzeczność, czyli na tej klasie krzywych dopuszczalnych funkcjonal (3.1) z warunkami (3.2), a więc i funkcjonal (2.4) nie osiąga ekstremum. To znaczy, że dla każdego kształtu siatki, przy którym na całej jej powierzchni ciężna równoleżnikowe są rozciągane, minimum objętości elementów nośnych nie może być osiągnięte.

3.2. *Sily równoleżnikowe są przedziałami wzdłuż południka rozciągające i ściskające*

Ponieważ ekstremum nie jest osiągnięte, gdy  $N_\theta > 0$ , dla  $x \in \langle x_0, x_1 \rangle$ , więc naturalne w tej sytuacji jest przypuszczenie, że w pewnym przedziale (np.  $\langle x_0, x_* \rangle$ )  $N_\theta > 0$ , a dla  $x \in \langle x_*, x_1 \rangle$   $N_\theta < 0$ . Zakłada się tym samym, że ciężna równoleżnikowe mogą być tutaj ściskane i mają taką samą wytrzymałość na ściskanie jak i rozciąganie. Ogólne założenia (2.6) co do klasy krzywych dopuszczalnych nie wykluczają takiej modyfikacji rozpatrywanego modelu. Wówczas funkcjonal (2.4) przekształca się do postaci

$$(3.9) \quad v = \int_{x_0}^{x_*} \left[ \frac{x^2}{y'} \sqrt{1+y'^2} + \left( \frac{1}{y'} + y' - \frac{xy''}{y'^2} \right) z \right] dx + \\ + \int_{x_*}^{x_1} \left[ \left( \frac{1}{y'} + y' + \frac{xy''}{y'^2} \right) (z+s) - \frac{x^2}{y'} \sqrt{1+y'^2} \right] dx,$$

gdzie

$$s+z = \int_{x_0}^{x_*} x \sqrt{1+y'^2} dx + \int_{x_*}^x x \sqrt{1+y'^2} dx = s + \int_{x_*}^x x \sqrt{1+y'^2} dx.$$

Podobnie jak w p. 3.1 zagadnienie poszukiwania ekstremum funkcjonalu (3.9) sprowadza się do aholonomicznego zagadnienia Lagrange'a o końcach ruchomych:

$$(3.10) \quad v = \int_{x_0}^{x_*} \left[ \frac{x^2}{u} \sqrt{1+u^2} + \left( \frac{1}{u} + u - \frac{xu'}{u^2} \right) z \right] dx + \\ + \int_{x_*}^{x_1} \left[ \left( \frac{1}{u} + u + \frac{xu'}{u^2} \right) (s+z) - \frac{x^2}{u} \sqrt{1+u^2} \right] dx,$$

$$z' - x \sqrt{1+u^2} = 0, \quad y' - u = 0.$$

Funkcja  $H$  dla pierwszego składnika funkcjonału (3.10)<sub>1</sub> z warunkami (3.10)<sub>2</sub> jest identyczna z (3.3), tym samym układ równań Eulera-Lagrange'a pokrywa się z (3.4), a także równanie różniczkowe krzywej stacjonarnej jest identyczne z (3.5). Dla drugiego składnika (3.10)<sub>1</sub> funkcja tworząca ma postać następującą:

$$(3.11) \quad H^2 = \left( \frac{1}{u} + u + \frac{xu'}{u^2} \right) (s+z) - \frac{x^2}{u} \sqrt{1+u^2} + \tau_1(x) (z' - x\sqrt{1+u^2}) + \\ + \tau_2(x)(y' - u).$$

Podobnie jak w p. 3.1 i tutaj układ funkcji  $\{u, y, z, \tau_1, \tau_2\}$  nie spełnia warunku Hilberta.

Układ równań Eulera-Lagrange'a dla (3.11) przybiera postać

$$(3.12) \quad H_u^2 - \frac{d}{dx} H_u^2 = \left( 1 - \frac{2}{u^2} \right) (s+z) - \frac{x^2}{\sqrt{1+u^2}} - \tau_1(x) \frac{xu}{\sqrt{1+u^2}} - \tau_2(x) = 0, \\ H_y^2 - \frac{d}{dx} H_y^2 = -\frac{d}{dx} [\tau_2(x)] = 0, \\ H_z^2 - \frac{d}{dx} H_z^2 = \frac{1}{u} + u + \frac{xu'}{u^2} - \frac{d}{dx} [\tau_1(x)] = 0.$$

Z (3.12)<sub>2</sub> wynika, że  $\tau_2(x) = D_2$  jest stałą, a z (3.12)<sub>3</sub> oraz (3.10)<sub>2</sub>, że

$$\tau_1(x) = y - \frac{x}{y'} + 2 \int \frac{dx}{y'} + D_1.$$

Z (3.12)<sub>1</sub>, (3.10)<sub>2</sub> i ostatnich dwóch zależności otrzymuje się następujące równanie różniczkowe krzywej stacjonarnej:

$$(3.13) \quad \left( 1 - \frac{2}{y'^2} \right) (s+z) - \left( y + D_1 + 2 \int \frac{dx}{y'} \right) \frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}} - D_2 = 0.$$

Na krzywych stacjonarnych (3.5) i (3.13) wariacja pierwsza funkcjonału (3.10)<sub>1</sub> z więzami (3.10)<sub>2</sub> przybiera postać

$$(3.14) \quad \delta v = -\{[H^1 - u' H_u^1 - y' H_y^1 - z' H_z^1]_{x=x_0} \delta x_0 + [H_u^1]_{x=x_0} \delta u_0 + \\ + [H_y^1]_{x=x_0} \delta y_0 + [H_z^1]_{x=x_0} \delta z_0\} + [H^1 - u' H_u^1 - y' H_y^1 - z' H_z^1]_{x=x_*-0} \delta x_* + \\ + [H_u^1]_{x=x_*-0} \delta u_* + [H_y^1]_{x=x_*-0} \delta y_* + [H_z^1]_{x=x_*-0} \delta z_* - \{[H^2 - u' H_u^2 - \\ - y' H_y^2 - z' H_z^2]_{x=x_*+0} \delta x_* + [H_u^2]_{x=x_*+0} \delta u_* + [H_y^2]_{x=x_*+0} \delta y_* + [H_z^2]_{x=x_*+0} \delta z_*\} + \\ + [H^2 - u' H_u^2 - y' H_y^2 - z' H_z^2]_{x=x_1} \delta x_1 + [H_u^2]_{x=x_1} \delta u_1 + [H_y^2]_{x=x_1} \delta y_1 + [H_z^2]_{x=x_1} \delta z_1,$$

gdzie  $H^1$  jest funkcją tworzącą (3.3).



Uwzględniając, że  $y(x_0)=0$ ,  $z(x_0)=0$ , a drugi koniec krzywej przesuwa się po prostej  $x=x_1$ , wariację (3.14) przekształcamy do postaci

$$(3.15) \quad \delta v = \{ [H^1 - u' H_u^1 - y' H_y^1 - z' H_z^1]_{x=x_*-0} - [H^2 - u' H_u^2 - y' H_y^2 - z' H_z^2]_{x=x_*+0} \} \delta x_* + \{ [H_u^1]_{x=x_*-0} - [H_u^2]_{x=x_*+0} \} \delta u_* + \\ + [ [H_y^1]_{x=x_*-0} - [H_y^2]_{x=x_*+0} ] \delta y_* + [ [H_z^1]_{x=x_*-0} - [H_z^2]_{x=x_*+0} ] \delta z_* + \\ + [H_u^2]_{x=x_1} \delta u_1 + [H_y^2]_{x=x_1} \delta y_1 + [H_z^2]_{x=x_1} \delta z_1.$$

Ponieważ dla  $x_0 \leq x \leq x_*$ ,  $N_0 > 0$ , a dla  $x_* < x \leq x_1$ ,  $N_0 < 0$ , więc  $x=x_*$  musi znajdować się na krzywej danej równaniem  $N_0=0$ , tzn.

$$(3.16) \quad \frac{x}{y'} - \frac{y''}{y'^2 \sqrt{1+y'^2}} z = 0$$

lub uwzględniając (3.10)<sub>2</sub>

$$(3.17) \quad \frac{x}{u} - \frac{u'}{u^2 \sqrt{1+u^2}} z = 0.$$

Równanie (3.17) jest równaniem linii nieciągłości funkcjonału (2.4), ponieważ w przeciwnym razie z przyrównania drugiego składnika (3.15) do zera wyniknęłaby sprzeczność i tym samym również na tych krzywych dopuszczalnych ekstremum nie byłoby osiągalne. Jeżeli więc założyć nieciągłość funkcjonału (2.4) oraz uwzględnić (3.10)<sub>2</sub> otrzymuje się następujące wzory:

$$\delta u_* = u' \delta x_* = \frac{xu \sqrt{1+u^2}}{z} \delta x_*, \quad \delta z_* = z' \delta x_* = x \sqrt{1+u^2} \delta x_*.$$

W wyrażeniu  $\delta u_*$ , gdzie występuje  $u' = y''$ , tkwi zatem przyjęcie nieciągłości drugiej pochodnej poszukiwanego argumentu ekstremum w punkcie  $x=x_*$ .

Ponieważ warunkiem koniecznym istnienia ekstremum jest, aby pierwsza wawiacja była równa zeru, więc z formuły (3.15) oraz ostatnich zależności wynikają następujące warunki brzegowe:

$$(3.18) \quad \left[ \left( \frac{1}{u} + u \right) z - y' c_2 \right]_{x=x_*-0} = \left[ \left( \frac{1}{u} + u \right) (s+z) - y' D_2 \right]_{x=x_*+0}, \\ c_2 = D_2, \\ \left[ \frac{x}{u^2} (s+z) \right]_{x=x_1} = 0, \\ [\tau_2(x)]_{x=x_1} = D_2 = 0, \\ [\tau_1(x)]_{x=x_1} = \left[ y - \frac{x}{y'} + 2 \int \frac{dx}{y'} + D_1 \right]_{x=x_1} = 0.$$

Z (3.18)<sub>3</sub> wynika  $u(x_1) = \infty$ , a z (3.18)<sub>5</sub>

$$D_1 = - \left[ y - \frac{x}{y'} + 2 \int \frac{dx}{y'} \right]_{x=x_1}.$$

Nietrudno zauważyć, że wobec ostatnich zależności równanie (3.13) nie jest spełnione, gdyż w przeciwnym razie musiałyby być

$$[s+z]_{x=x_1} = 0,$$

co jest nieprawdziwe, czyli argument ekstremum, dla którego w pewnym przedziale jest  $N_\theta \geq 0$ , a w pozostałym  $N_\theta < 0$  nie istnieje.

W dalszym ciągu można by również udowodnić na zasadzie indukcji matematycznej, że argumentem ekstremum funkcjonau (2.4) nie jest żadna z krzywych, wzdłuż której ciągną równoleżnikowe są na przemian przedziałami rozciągane i ściskane.

### 3.3. Siły równoleżnikowe są równe zeru na całej powierzchni ustroju

Pozostaje więc jeszcze do zbadania, czy argumentem ekstremum całki (2.4) jest krzywa określona równaniem (3.16), czyli  $N_\theta = 0$  dla wszystkich  $x \in \langle x_0, x_1 \rangle$ .

Uwzględniając, że  $y(x_0) = 0$  oraz, że  $z(x_0) = 0$  widzimy, że rozwiązaniem równania różniczkowego nieliniowego (3.16) jest

$$(3.19) \quad y_0 = \int_{x_0}^x \operatorname{sh} \frac{x^2 - x_0^2}{2c_1} dx,$$

wtedy

$$(3.20) \quad z_0 = \int_{x_0}^x x \sqrt{1 + y'^2} dx = c_1 \operatorname{sh} \frac{x^2 - x_0^2}{2c_1}.$$

Z warunków sformułowanych na końcu p. 2 wynika, że  $c_1 > 0$ .

Krzywa (3.19) jest szczególnym przypadkiem krzywej kształtu lin nośnych osiowo-symetrycznego ustroju wiszącego, wyznaczonej w pracy [3], a w postaci zamkniętej w pracy [5].

Przy przejściu od krzywej  $y_0(x)$  na dowolną bliską  $\bar{y}(x)$  przyrost funkcjonau (2.4) lub (2.5) wynosi

$$\begin{aligned} \Delta v &= \int_{x_0}^{x_1} \{F^\theta(x, \bar{z}, \bar{y}') + |F^\theta(x, \bar{z}, \bar{y}', \bar{y}'')| - [F^\theta(x, z_0, y'_0) + |F^\theta(x, z_0, y'_0, y''_0)|]\} dx = \\ &= \int_{x_0}^{x_1} [F^\theta(x, \bar{z}, \bar{y}') - F^\theta(x, z_0, y'_0) + |F^\theta(x, \bar{z}, \bar{y}', \bar{y}'')| - |F^\theta(x, z_0, y'_0, y''_0)|] dx. \end{aligned}$$

Korzystając z twierdzenia o wartości średniej można ten przyrost przedstawić w postaci:

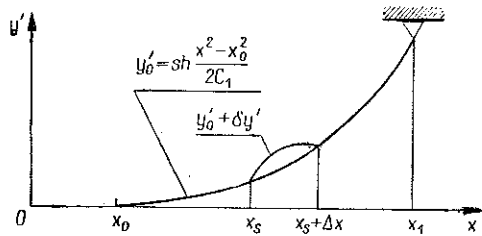
$$(3.21) \quad \Delta v = \int_{x_0}^{x_1} \left[ \left(1 - \frac{1}{y_I'^2}\right) z_I \delta y' + \left(y_I' + \frac{1}{y_I'}\right) \int_{x_0}^x \frac{xy_I'}{\sqrt{1+y_I'^2}} \delta y' dx + \right. \\ \left. + \left| -\frac{d}{dx} \left(\frac{x}{y_I'^2} z_I \delta y'\right) + \left(\frac{x^2}{\sqrt{1+y_I'^2}} + \frac{z_I}{y_I'^2}\right) \delta y' - \frac{xy_I''}{y_I'^2} \int_{x_0}^x \frac{xy_I'}{\sqrt{1+y_I'^2}} \delta y' dx \right| dx \right],$$

gdzie

$$\delta y' = \bar{y}' - y_0', \quad \delta y'' = \bar{y}'' - y_0'', \quad y_I' = y_0' + \vartheta_1 \delta y', \quad y_I'' = y_0'' + \vartheta_2 \delta y''$$

Jeżeli na przykład w przedziale  $\langle a, b \rangle \subset \langle x_0, x_1 \rangle$  nadany zostanie przyrost  $\delta y = \bar{y} - y_0$  krzywej (3.19) w pozostałych punktach  $\delta y \equiv 0$  i taki, że  $\delta y(a) = \delta y'(a) = \delta y(b) = \delta y'(b) = 0$ , to można w nim wtedy wyróżnić pewną ilość podprzedziałów, w których  $\delta y' = \bar{y}' - y_0'$  będzie ustalonego znaku.

Dla zbadania więc znaku przyrostu funkcjonału nadano w małym otoczeniu punktu  $S$ , tj. w przedziale  $\langle x_S, x_S + \Delta x \rangle \subset \langle x_0, x_1 \rangle$ , przyrost pochodnej krzywej (3.19). To znaczy, że  $\delta y'$  jest różne od zera i zachowuje



Rys. 4

znak w przedziale  $\langle x_S, x_S + \Delta x \rangle$ , a w pozostałych punktach  $\delta y' \equiv 0$  (rys. 4). Wtedy zgodnie z podanym w pracy [7] pojęciem wariacji funkcjonału  $v(y)$  w punkcie  $S$  o odciętej  $x_S$  po prostych przekształceniach wyrażenia (3.21) uzyskuje się

$$(3.22) \quad \delta v(y_0')_S \geq \left[ \left(1 - \frac{1}{y_0'^2}\right) z_0 \right]_{x=x_S} \sigma_1 + \left[ \left| \frac{x^2}{\sqrt{1+y_0'^2}} + \frac{z_0}{y_0'^2} \right| \right]_{x=x_S} |\sigma_1|.$$

Przykładowo drugi wyraz wyrażenia (3.21) w rezultacie całkowania przez części i zastosowania twierdzenia o wartości średniej przekształca się w następujący sposób:

$$\int_{x_S}^{x_S + \Delta x} \left( y_I' + \frac{1}{y_I'} \right) \left( \int_{x_S}^x \frac{xy_I'}{\sqrt{1+y_I'^2}} \delta y' dx \right) dx = \int_{x_S}^{x_S + \Delta x} \left\{ \left( y_I' + \int_{x_S}^x \frac{dx}{y_I'} \right) \right\}_{x_S + \Delta x} - \\ - \left( y_I' + \int_{x_S}^x \frac{dx}{y_I'} \right) \left\{ \frac{xy_I'}{\sqrt{1+y_I'^2}} \delta y' dx \right\} = \left\{ \left[ y_I' + \int_{x_S}^x \frac{dx}{y_I'} \right]_{x_S + \Delta x} - \right. \\ \left. - \left( y_I' + \int_{x_S}^x \frac{dx}{y_I'} \right) \right\}_{x_S} \int_{x_S}^{x_S + \Delta x} \delta y' dx,$$

gdzie

$$y_I = y_0 + \vartheta_0 \delta y, \quad y_I' = y_0' + \vartheta_1 \delta y', \quad x_S' = x_S + \vartheta_2 \Delta x.$$

Jeśli teraz odległość rzędu drugiego między krzywymi  $y_0$  i  $y_0 + \delta y$ ,  $r_2(y_0, y_0 + \delta y) \rightarrow 0$  i równocześnie  $\Delta x \rightarrow 0$ , to ostatnie wyrażenie dąży do granicy

$$\left[ \left( y_0' + \frac{1}{y_0'} \right) \frac{xy_0'}{\sqrt{1+y_0'^2}} \right]_{x=x_S} dx \sigma_1,$$

co jest wielkością małą wyższego rzędu wobec poszczególnych składników (3.22).

Jeśli w (3.22)  $\sigma_1 > 0$ , to dla  $\bigwedge_{x_S \in \langle x_0, x_1 \rangle}$

$$(3.23) \quad \delta v(y_0)_S \geq \left[ z_0 + \frac{x^2}{\sqrt{1+y_0'^2}} \right]_{x=x_S} \sigma_1 > 0.$$

Jeżeli natomiast  $\sigma_1 < 0$ , to

$$\delta v(y_0)_S \geq \left[ \left( \frac{2}{y_0'^2} - 1 \right) z_0 + \frac{x^2}{\sqrt{1+y_0'^2}} \right]_{x=x_S} > 0,$$

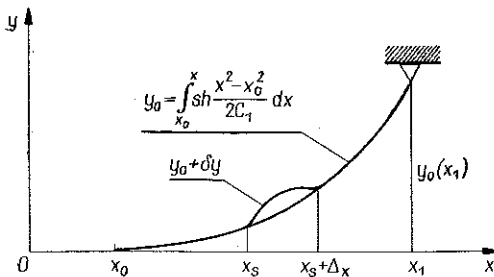
jeśli tylko po uwzględnieniu (3.19), (3.20) i (3.22) spełni się nierówność

$$(3.24) \quad \frac{x_S^2}{2c_1} \geq \left( \frac{1}{2} \operatorname{sh}^2 \xi - 1 \right) \operatorname{cth} \xi,$$

gdzie  $\xi = (x_S^2 - x_0^2)/2c_1 \geq 0$ .

Tak więc dla tych  $x_S$ , dla których nierówność (3.24) jest spełniona, krzywa (3.19) jest argumentem minimum.

Niech z kolei w przedziale  $\langle x_S, x_S + \Delta x \rangle \subset \langle x_0, x_1 \rangle$  nadany zostanie



Rys. 5

przyrost krzywej (3.19), tzn.  $\delta y \neq 0$  i niech zachowuje znak w przedziale  $\langle x_S, x_S + \Delta x \rangle$ , a w pozostałych punktach przedziału  $\langle x_0, x_1 \rangle$   $\delta y \equiv 0$  (rys. 5). Niech ponadto  $\delta y'(x_S) = \delta y$ ,  $(x_S + \Delta x) = 0$ . W wyniku analogicznych przekształceń postaci (3.21), jak w przypadku nadania przyrostu pochodnej krzywej (3.19), uzyskuje się

$$(3.25) \quad \delta v(y_0)_S \geq \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{z_0}{y_0'^2} \right) \right]_{x=x_S} \sigma_2 + \left[ \left[ -\frac{d}{dx} \left( \frac{x^2}{\sqrt{1+y_0'^2}} + \frac{z_0}{y_0'^2} \right) - \frac{x^2 y_0''}{y_0' \sqrt{1+y_0'^2}} \right] \right]_{x=x_S} |\sigma_2|,$$

gdż np. w wyniku dwukrotnego całkowania przez części drugiego składnika wyrażenia (3.21) oraz zastosowania twierdzenia o wartości średniej otrzymujemy:

$$\int_{x_S}^{x_S + \Delta x} \left( y_I' + \frac{1}{y_I'} \right) \left( \int_{x_S}^x \frac{xy_I'}{\sqrt{1+y_I'^2}} \delta y' dx \right) dx = \int_{x_S}^{x_S + \Delta x} \left\{ y_I + \int_{x_S}^x \frac{dx}{y_I'} \right\} \delta y' dx$$

$$-\left(y_I + \int_{x_S}^x \frac{dx}{y_I'}\right) \frac{xy_I'}{\sqrt{1+y_I'^2}} \delta y' dx = \left\{ - \left[ \left( y_I + \int_{x_S}^x \frac{dx}{y_I'} \right) \right]_{x_S + \Delta x} + \right. \\ \left. + y_I + \int_{x_S}^x \frac{dx}{y_I'} \right\} \frac{d}{dx} \left( \frac{xy_I'}{\sqrt{1+y_I'^2}} \right) + \left( y_I' + \frac{1}{y_I'} \right) \frac{xy_I'}{\sqrt{1+y_I'^2}} \Big|_{x=x_S'} \int_{x_S}^{x_S + \Delta x} \delta y dx,$$

gdzie

$$y_I = y_0 + \vartheta_0 \delta y, \quad y_I' = y_0' + \vartheta_1 \delta y', \quad x_S' = x_S + \vartheta_3 \Delta x.$$

Uwzględniono przy tym, że

$$\delta y(x_S) = \delta y'(x_S) = \delta y(x_S + \Delta x) = \delta y'(x_S + \Delta x) = 0.$$

Jeśli równocześnie  $r_2(y_0, y_0 + \delta y) \rightarrow 0$  i  $\Delta x \rightarrow 0$ , to ostatnie wyrażenie dąży do granicy

$$\left\{ - \left( y_0' + \frac{1}{y_0'} \right) dx \frac{d}{dx} \left( \frac{xy_0'}{\sqrt{1+y_0'^2}} \right) + x \sqrt{1+y_0'^2} \right\}_{x=x_S} \sigma_2 = [x \sqrt{1+y_0'^2}]_{x=x_S} \sigma_2.$$

Wstawiając (3.19) i (3.20) do (3.25) otrzymujemy:

$$(3.26) \quad \delta v(y_0)_S \geq - \frac{x_S \operatorname{ch} \xi}{\operatorname{sh}^2 \xi} \delta_2 + \left| \frac{x_S(1 - \operatorname{sh}^2 \xi)}{\operatorname{ch} \xi \operatorname{sh}^2 \xi} - \frac{x_S^3}{c_1 \operatorname{sh} \xi \operatorname{ch}^2 \xi} \right| |\sigma_2|.$$

Gdy  $\sigma_2 < 0$ , prawa strona nierówności (3.26) jest stałe dodatnia, ponieważ można wtedy dla każdego  $x_S$  z przedziału  $\langle x_0, x_1 \rangle$  napisać

$$(3.27) \quad \delta v(y_0)_S \geq \left[ \frac{x_S \operatorname{ch} \xi}{\operatorname{sh}^2 \xi} + \left| \frac{x_S(1 - \operatorname{sh}^2 \xi)}{\operatorname{ch} \xi \operatorname{sh}^2 \xi} - \frac{x_S^3}{c_1 \operatorname{sh} \xi \operatorname{ch}^2 \xi} \right| \right] |\sigma_2| > 0.$$

Jeżeli natomiast  $\sigma_2 > 0$ , a w (3.26) wyrażenie objęte znakiem wartości bezwzględnej jest ujemne (dla większych wartości liczbowych  $\xi$ ), to  $\delta v(y_0)_S > 0$  tylko wtedy, gdy

$$(3.28) \quad \frac{x_S^2}{2c_1} \geq \operatorname{cth} \xi.$$

Łatwo wykazać, że dla tych  $x_S$ , dla których nierówność (3.24) nie jest spełniona, zachodzi (3.28) i odwrotnie; gdy nierówność (3.28) nie jest spełniona, to jest spełniona (3.24). Innymi słowy, wykażemy, że gdy

$$(3.29) \quad \frac{x_S^2}{2c_1} \leq \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2\xi - \operatorname{cth} \xi,$$

to wówczas spełnia się nierówność (3.28), przy czym (3.29) jest przekształconą nierównością przeciwną do (3.24).

Istotnie

$$(3.30) \quad \xi \leq \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2\xi - \operatorname{cth} \xi,$$

gdy

$$\frac{1}{16} \operatorname{sh} 2\xi (\operatorname{sh} 2\xi - 8\xi) + (\xi + \operatorname{cth} \xi) (\xi - \operatorname{cth} \xi) \geq 0.$$

Aby ostatnia nierówność była spełniona musi być

$$\xi \geq \operatorname{cth} \xi,$$

bądź też

$$\operatorname{sh} 2\xi \geq 8\xi;$$

tak więc  $\xi > \operatorname{cth} \xi$ . Widać stąd oraz z nierówności:

$$(3.31) \quad \xi \leq \frac{x_s^2}{2c_1} \leq \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2\xi - \operatorname{cth} \xi, \quad \frac{x_s^2}{2c_1} \geq \xi \geq \operatorname{cth} \xi,$$

że nierówność (3.29) niekoniecznie musi być spełniona, aby zachodziła nierówność (3.28). Wystarczy, aby miała miejsce słabsza nierówność (3.30), a jeżeli zachodzi (3.29), to tym samym spełnione są warunki (3.30), (3.31)<sub>1</sub> oraz (3.31)<sub>2</sub>. Oznacza to, że dla krzywej (3.19), łączącej dwa dane punkty  $y(x_0) = 0$  i  $y(x_1) = y_1$  i w każdym jej punkcie spełniona jest przynajmniej jedna z nierówności (3.24) lub (3.28), a także (3.23) i (3.27). Tym samym zostało udowodnione, że przy przejściu z krzywej (3.19) na dowolną bliską przyrost funkcjonału (2.4) jest dodatni, czyli

$$\Delta v = v[\bar{y}(x)] - v[y_0(x)] > 0, \quad \bigwedge_{x \in \langle x_0, x_1 \rangle}.$$

Tak więc krzywa (3.19) jest argumentem minimum bezwzględne funkcjonału (2.4).

W podsumowaniu dotychczas przeprowadzonych rozważań można sformułować następujący

Wniosek. Osiowo-symetryczny ustrój siatkowy obciążony równomiernie na powierzchni jest bliski optymalnego wtedy, gdy siły w cięgnach równoleżnikowych (tym samym i ich przekroje) są bliskie zeru. Poszukiwany więc w pracy siatkowy ustrój optymalny praktycznie nie istnieje, gdyż w granicy degeneruje się on do ustroju o wyłącznie południkowym przebiegu cięgien.

Objętość elementów nośnych dla krzywej (3.19) określona jest za pomocą wzoru

$$(3.32) \quad v = \frac{k_d v'}{2\pi p} = c_1 \int_{x_0}^{x_1} \operatorname{ch}^2 \xi \, dx.$$

Funkcja (3.32) ma minimum dla wartości  $c_1$ , którą można wyznaczyć z następującego równania przestępnego:

$$\int_{x_0}^{x_1} \operatorname{ch}^2 \xi \, dx - \int_{x_0}^{x_1} \xi \operatorname{sh} 2\xi \, dx = 0.$$

#### 4. PRZYPADEK RÓWNOMIERNEGO OBCIĄŻENIA PIĘRSZIENIA DOLNEGO PRZY RÓWNOCZESNYM OBCIĄŻENIU POWIERZCHNI USTROJU

Postępując podobnie jak w p. 2 otrzymano tutaj na siły południkowe i równoleżnikowe wyrażenia

$$N_{\varphi} = p \frac{\sqrt{1+y'^2}}{xy'} (B+z),$$

$$N_{\theta} = p \left[ \frac{x}{y'} - \frac{y''}{y'^2 \sqrt{1+y'^2}} (B+z) \right],$$

gdzie

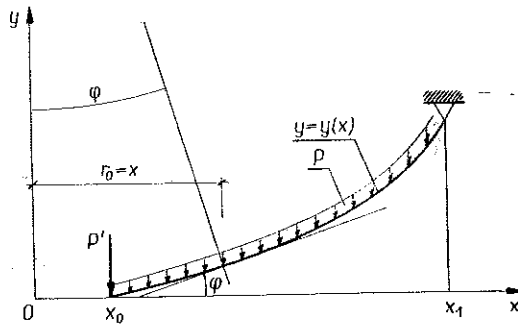
$$B = \frac{x_0 p'}{p}, \quad z = \int_{x_0}^x x \sqrt{1+y'^2} dx.$$

Odpowiednikiem wzoru (2.4) jest tu formuła

$$(4.1) \quad v = \int_{x_0}^{x_1} \left[ \left( y' + \frac{1}{y'} \right) (B+z) + \left| \frac{x^2}{y'} \sqrt{1+y'^2} - \frac{xy''}{y'^2} (B+z) \right| \right] dx.$$

Oznaczając  $B+z = \zeta$  funkcjonałowi (4.1) nadajemy postać

$$(4.2) \quad v = \int_{x_0}^{x_1} \left[ \left( y' + \frac{1}{y'} \right) \zeta + \left| \frac{x^2}{y'} \sqrt{1+y'^2} - \frac{xy''}{y'^2} \zeta \right| \right] dx,$$



Rys. 6.  $p$  [T/m<sup>2</sup>] — obciążenie równomiernie rozłożone po powierzchni ustroju,  $p'$  [T/m] — obciążenie równomiernie rozłożone po obwodzie pierścienia wewnętrznego

z warunkiem  $\zeta(x_0) = B$ . Widać stąd, że argumentem ekstremum całki (4.2), równoważnej (2.4), jest krzywa

$$(4.3) \quad \frac{x^2}{y'} \sqrt{1+y'^2} - \frac{xy''}{y'^2} \zeta = 0,$$

odpowiadająca (3.16).

Rozwiązaniem równania (4.3) jest

$$y = \int_{x_0}^x \operatorname{sh} \frac{x^2 + c_2}{2c_1} dx,$$

gdzie

$$c_2 = 2c_1 \operatorname{arsh} \frac{B}{c_1} - x_0^2.$$

Objętość elementów nośnych jest tu określona wzorem

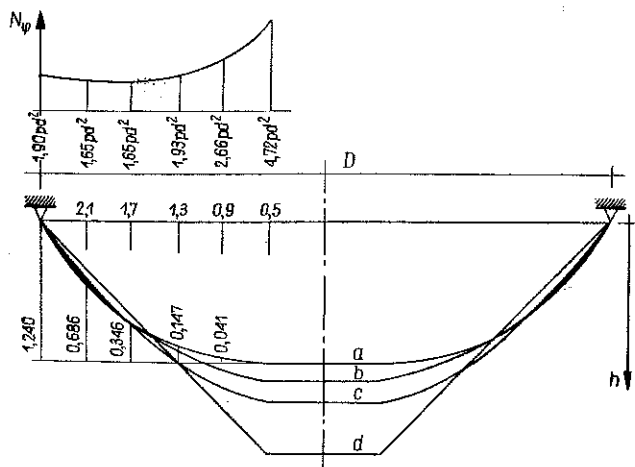
$$v = c_1 \int_{x_0}^{x_1} \operatorname{ch}^2 \frac{x^2 + c_2}{2c_1} dx,$$

a optymalną wartość  $c_1$  można wyznaczyć z równania

$$\int_{x_0}^{x_1} \operatorname{ch}^2 \frac{x^2 + c_2}{2c_1} dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{x^2 + c_2}{2c_1} \operatorname{sh} \frac{x^2 + c_2}{c_1} dx.$$

### 5. PRZYKŁAD

Na rysunku 7 przedstawiono krzywe południkowe ustrojów siatkowych dla stosunku  $D/d=5$  o kształtach następujących: czaszy kulistej  $b$ , paraboloidy obrotowej  $c$ , stożka ściętego  $d$  i podanego w niniejszej pracy ustroju optymalnego  $a$  przy ich minimalnych objętościach materiału konstrukcyjnego. Pierścień dolny przekrycia nie jest obciążony.



Rys. 7.  $a$  - ustrój optymalny,  $v = 0,248$ ,  $v = 47,7 \text{ } pd^3/k_d$ ,  $N_\theta = 0$ ;  
 $b$  - czasza kuli,  $v = 0,279$ ,  $v = 57,4 \text{ } pd^3/k_d$ ,  $N_\theta \neq 0$ ;  
 $c$  - paraboloida obrotowa,  $v = 0,320$ ,  $v = 67,7 \text{ } pd^3/k_d$ ,  $N_\theta \neq 0$ ;  
 $d$  - stożek ścięty, gdzie,  $v = h/D$ ,  $v = 0,407$ ,  $v = 87,2 \text{ } pd^3/k_d$ ,  $N_\theta \neq 0$ .

Dla przyjętych założeń okazało się, że ustrój o kształcie czaszy kulistej  $b$  jest ustrojem najbardziej zbliżonym do optymalnego  $a$ , przy czym dla jego skonstruowania trzeba o 21% więcej materiału. Najniekorzystniejszy jest kształt stożka ściętego  $d$ , wymagający więcej materiału o 83%.



Należy jeszcze zaznaczyć, że w ustrojach o kształcie różnym od optymalnego siły w elementach równoleżnikowych są oczywiście różne od zera, a dla kształtu optymalnego są one równe zeru.

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Z. WASIUTYŃSKI, *Podstawowe wiadomości o kształtowaniu wytrzymałościowym*, Arch. Inżyn. Lądowej, 1, 1956.
2. Z. WASIUTYŃSKI i A. BRANDT, *Aktualny stan wiedzy o kształtowaniu wytrzymałościowym konstrukcji*, Rozpr. Inżyn., 10, 2, 309 – 332, 1962.
3. S. LESSAER, *Wyznaczanie kształtu lin nośnych w osiowo-symetrycznych powierzchniowych ustrojach wiszących, obciążonych ciężarem własnym*, Arch. Inżyn. Lądowej, 9, 4, 447 – 459, 1963.
4. S. LESSAER, *Teoria osiowo-symetrycznych powierzchniowych ustrojów wiszących*, Gliwice 1964 (Praca doktorska).
5. S. JENDO, *Metoda kształtowania ustrojów ciągnowych osiowo-symetrycznych*, Rozpr. Inżyn., 17, 2, 249 – 267, 1969.
6. K. TATARKIEWICZ, *Rachunek wariacyjny*, cz. I, WNT, Warszawa 1969.
7. М. Лавришнев и Л. Люстерник, *Курс вариационного исчисления*, Варшава 1953.
8. S. JENDO, *Kształtowanie siatek ciągnowych obrotowo-symetrycznych z warunku wyrównania naprężeń*, Arch. Inżyn. Lądowej, 14, 1, 139 – 155, 1970.

#### Резюме

#### ОПТИМАЛИЗАЦИЯ ОСЕСИММЕТРИЧЕСКОЙ ВИСЯЩЕЙ СИСТЕМЫ, ПОДВЕШЕННОЙ НА ВЕРХНЕМ КОЛЬЦЕ

В работе, автор старается определить оптимальную осесимметрическую форму сетчатого висящего перекрытия, при которой объем несущих элементов будет наименьшим. Система опирается на верхнем кольце и подвергается действию нагрузки, равномерно расположенной по поверхности. В расчетах не учитывается изменения собственного веса, существующего вдоль меридиональных кривых.

Доказывается, что функционал объема, несущих канатов, является минимальным для такой формы меридиана, при котором силы в параллельных связях равняются нулю.

#### SUMMARY

#### OPTIMALIZATION OF AN AXIALLY SYMMETRICAL SUSPENDED SYSTEM, SUSPENDED ON THE UPPER RING

Here, an optimum shape is sought for an axially symmetrical grid suspended cover, where the volume of the carrier elements possesses a minimum. The system is supported on the upper ring and subjected to the action of a load distributed uniformly over the surface. In the calculations the changes in specific gravity occurring along the longitudinal curves are not taken into account.

It is proved that the functional of the volume of carrier ropes has a minimum for such a shape of the longitude at which the forces in the latitudinal lines are equal to zero.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA W GLIWICACH

*Praca została złożona w Redakcji dnia 30 kwietnia 1970 r.*