

## O PEWNYM STOCHASTYCZNYM MODELU DLA PROBLEMU UDERZENIA<sup>(1)</sup>

S. KUMARASWAMY, R. SUBRAMANIAN (MADRAS, INDIA)

### 1. WSTĘP

Od wielu lat teoria prawdopodobieństwa była stosowana w różnych dziedzinach mechaniki; na przykład w teorii kinetycznej [1], w mechanice statystycznej [2], w teorii ruchu brownowskiego [3 i 4] oraz w teorii turbulencji [5]. W ostatnich latach obserwujemy zastosowanie teorii prawdopodobieństwa w dynamice konstrukcji (por. np. [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]). Ponieważ żaden materiał nie jest jednorodny, żaden pręt nie jest dokładnie równy, żadna płyta nie ma tej samej grubości itd., to probabilistyczny punkt widzenia jest bardziej realistyczny, chociaż w pewnych przypadkach, gdy zdarzenia losowe dają niewielki rozrzut, deterministyczne podejście może być wystarczające.

W ostatnich latach wzrasta zainteresowanie problemami związanymi z uderzeniem ciał stałych. W szczególności w badaniach balistycznych ważne jest zagadnienie przebijania tarcz stałych przez pociski. Ostatnio PYTEL i DAVIDS [13] zaproponowali model ciała lepkiego i badali zachowanie się płyty pod wpływem uderzenia wybuchowego przy warunkach powodujących wadę pewnego szczególnego typu (ang. «plug type failure»). Uderzenie było opisywane przez prędkość początkową równomiernie rozłożoną na kołowym obszarze powierzchni płyty (problem osiowo-symetryczny). Następujące przyczyny sprawiają jednak, że bardziej adekwatne jest założenie, że początkowy rozkład prędkości jest funkcją losową:

- 1) grubość płyty może zmieniać się w sposób losowy,
- 2) kształt pocisku może nie być zawsze jednakowy,
- 3) moduł Younga i współczynnik Poissona mogą zmieniać się w sposób losowy ze względu na niejednorodność materiału (powodującą losowe zmiany sztywności płyty).

Naturalnym sposobem podejścia do tego problemu jest sformułowanie go w postaci trójwymiarowej. Lecz wtedy zagadnienie komplikuje się pod względem rachunkowym; będziemy więc zakładali, że problem jest osiowo-symetryczny. W tej pracy rozważany jest problem analogiczny do problemu badanego w pracy [13], lecz tutaj zakłada się, że warunki początkowe są losowe. Przyjęto, że materiał płyty zachowuje się zgodnie z modelem Voighta i założono, że naprężeniami różnymi od zera są tylko naprężenia ścinające w kierunku prostopadłym do powierzchni płyty, przy czym zależą one tylko od współrzędnej radialnej.

<sup>(1)</sup> Z angielskiego przetłumaczył J. BEJDA.

## 2. SFORMUŁOWANIE I ROZWIĄZANIE PROBLEMU

Rozważmy nieskończoną płytę o grubości  $h$ ; w cylindrycznym układzie współrzędnych współrzędna  $z$  zmienia się w przedziale  $0 \leq z \leq h$ . Załóżmy, że materiał płyty zachowuje się według modelu Voighta. Będziemy zakładali, że ruch płyty jest spowodowany przez losową prędkość początkową  $f(r)$ , rozłożoną na powierzchni płyty, wywołaną uderzeniem. Założymy, że wszystkie wielkości są niezależne od  $z$ , wobec czego warunki początkowe mogą być napisane w postaci

$$(2.1) \quad w(r, 0) = 0, \quad v(r, 0) = f(r),$$

gdzie  $w$  oznacza przemieszczenie w kierunku  $z$ , a  $v = \partial w / \partial t$  oznacza prędkość przemieszczenia w tym samym kierunku.

Problem jest osiowo-symetryczny, a równanie ruchu ma postać

$$(2.2) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma = \rho \frac{\partial v}{\partial t},$$

gdzie  $\rho$  oznacza gęstość materiału płyty,  $\sigma$  jest naprężeniem ścinającym w kierunku prostopadłym do powierzchni płyty. Ponieważ założyliśmy, że materiał płyty zachowuje się według modelu Voighta, więc

$$(2.3) \quad \sigma = a \frac{\partial v}{\partial r} + b \frac{\partial w}{\partial r}.$$

Uwzględniając (2.3) równanie (2.2) doprowadzimy do postaci

$$(2.4) \quad a \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right) + b \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) = \rho \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Stosując transformację Hankela ze względu na  $r$  (por. np. [14]) do obu stron równania (2.4), znajdziemy

$$(2.5) \quad -\xi^2 [a\bar{v}(\xi, t) + b\bar{w}(\xi, t)] = \rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t},$$

gdzie  $\bar{v}$  i  $\bar{w}$  są odpowiednio równe

$$(2.6) \quad \bar{v} = \int_0^\infty r J_0(\xi r) v(r, t) dr,$$

$$\bar{w} = \int_0^\infty r J_0(\xi r) w(r, t) dr.$$

Ponieważ  $\bar{v} = d\bar{w}/dt$ , przeto równanie (2.5) można przedstawić w postaci

$$(2.7) \quad \rho \frac{d^2 \bar{w}}{dt^2} + a\xi^2 \frac{d\bar{w}}{dt} + b\xi^2 \bar{w} = 0.$$

Rozwiązaniem równania (2.7) jest funkcja

$$(2.8) \quad \bar{w} = A(\xi) e^{m_1(\xi)t} + B(\xi) e^{m_2(\xi)t},$$

gdzie

$$(2.9) \quad m_{1,2} = \frac{-a\xi^2 \pm [a^2\xi^4 - 4b\rho\xi^2]^{1/2}}{2\rho};$$

$A(\xi)$  i  $B(\xi)$  są dowolnymi funkcjami parametru  $\xi$ . A zatem

$$(2.10) \quad \bar{v} = \frac{d\bar{w}}{dt} = m_1 A e^{m_1 t} + m_2 B e^{m_2 t}.$$

Warunki początkowe po transformacji przyjmują postać

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \bar{w}(\xi, 0) &= 0, \\ \bar{v}(\xi, 0) &= f = \int_0^{\infty} r J_0(r\xi) f(r) dr. \end{aligned}$$

Na podstawie (2.8), (2.10) i (2.11) funkcje dowolne  $A$  i  $B$  wyrażają się wzorem

$$(2.12) \quad A = \frac{f}{-(m_2 - m_1)} = -B.$$

Dokonując odwrotnej transformacji Hankela otrzymujemy

$$(2.13) \quad \begin{aligned} w(r, t) &= \int_0^{\infty} \bar{w}(\xi) J_0(\xi r) d\xi = \int_0^{\infty} \xi J_0(\xi r) \frac{e^{m_1 t} - e^{m_2 t}}{m_1 - m_2} f d\xi, \\ v(r, t) &= \int_0^{\infty} \xi J_0(\xi r) \frac{m_1 e^{m_1 t} - m_2 e^{m_2 t}}{m_1 - m_2} f d\xi. \end{aligned}$$

Naprężenie scinające  $\sigma$  jest określone za pomocą wzoru

$$(2.14) \quad \sigma = a \frac{\partial v}{\partial r} + b \frac{\partial w}{\partial r} = - \int_0^{\infty} \frac{\xi^2 J_1(\xi r) f}{m_1 - m_2} [(am_1 + b) e^{m_1 t} - (am_2 + b) e^{m_2 t}] d\xi.$$

### 3. WARTOŚCI PRZECIĘTNE I MOMENTY KORELACYJNE

Wartości przeciętne przemieszczenia, prędkości i naprężenia scinającego są dane wzorami

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \varepsilon \{w(r, t)\} &= \int_0^{\infty} \xi J_0(\xi r) \frac{e^{m_1 t} - e^{m_2 t}}{m_1 - m_2} \varepsilon \{f\} d\xi, \\ \varepsilon \{v(r, t)\} &= \int_0^{\infty} \xi J_0(\xi r) \frac{m_1 e^{m_1 t} - m_2 e^{m_2 t}}{m_1 - m_2} \varepsilon \{f\} d\xi, \\ \varepsilon \{\sigma(r, t)\} &= - \int_0^{\infty} \xi^2 J_1(\xi r) \frac{[e^{m_1 t} (am_1 + b) - e^{m_2 t} (am_2 + b)]}{m_1 - m_2} \varepsilon \{f\} d\xi. \end{aligned}$$

Znajomość powyższych wzorów daje pewną informację o rzędzie wielkości  $w$ ,  $v$  i  $\sigma$  w chwili  $t$  i w dowolnym punkcie  $r$ , lecz dla lepszej znajomości tych wielkości wskazane jest wyznaczyć momenty korelacyjne rzędu drugiego. Charakteryzują one dyspersję badanych wielkości wokół ich wartości przeciętnych. Moment rzędu drugiego przemieszczenia  $w(r, t)$  wynosi

$$(3.2) \quad \varepsilon \{w(r_1, t) w(r_2, t)\} = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\xi \eta J_0(r_1 \xi) J_0(r_2 \eta) \varepsilon \{f(\xi) f(\eta)\}}{[m_1(\xi) - m_2(\xi)][m_1(\eta) - m_2(\eta)]} \times \\ \times \{e^{[m_1(\xi) + m_1(\eta)]t} + e^{[m_1(\xi) + m_2(\eta)]t} - e^{[m_1(\xi) + m_2(\eta)]t} - e^{[m_1(\eta) + m_2(\xi)]t}\} d\xi d\eta.$$

Średni kwadrat przemieszczenia  $w(r, t)$  otrzymamy z wyrażenia (3.2), przyjmując  $r_1 = r_2 = r$ . Wariancja przemieszczenia

$$(3.3) \quad \text{Var} [w(r, t)] = \varepsilon \{w^2\} - [\varepsilon \{w\}]^2.$$

W podobny sposób można łatwo otrzymać odpowiednie formuły na  $v(r, t)$ .

#### 4. DYSKUSJA

W tym punkcie wyznaczmy wartości przeciętne i momenty rzędu drugiego wielkości  $w$ ,  $v$  i  $\sigma$  w przypadku, gdy materiał płyty jest idealnie lepki. Jest to przypadek szczególny modelu Voighta, gdy  $a = v$  i  $b = 0$ . W tym przypadku mamy

$$(4.1) \quad m_1 = 0, \quad m_2 = \frac{-v\xi^2}{\rho}, \\ \varepsilon \{w(r, t)\} = \frac{\rho}{v} \int_0^\infty \frac{J_0(\xi r)}{\xi} \left[1 - e^{-\frac{v\xi^2}{\rho}t}\right] \varepsilon \{f\} d\xi, \\ \varepsilon \{v(r, t)\} = \int_0^\infty \xi J_0(\xi r) e^{-\frac{v\xi^2}{\rho}t} \varepsilon \{f\} d\xi, \\ \varepsilon \{\sigma(r, t)\} = -v \int_0^\infty \xi^2 J_1(r\xi) e^{-\frac{v\xi^2}{\rho}t} \varepsilon \{f\} d\xi, \\ \varepsilon \{w(r_1, t) w(r_2, t)\} = \frac{\rho^2}{v^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{J_0(\xi r_1) J_0(\eta r_2)}{\xi \eta} \varepsilon \{f(\xi) f(\eta)\} \times \\ \times \left[1 - e^{-\frac{v\xi^2}{\rho}t}\right] \left[1 - e^{-\frac{v\eta^2}{\rho}t}\right] d\xi d\eta, \\ \varepsilon \{v(r_1, t) v(r_2, t)\} = \int_0^\infty \int_0^\infty \xi \eta J_0(\xi r_1) J_0(\eta r_2) \varepsilon \{f(\xi) f(\eta)\} e^{-\frac{v\xi^2}{\rho}t} e^{-\frac{v\eta^2}{\rho}t} d\xi d\eta, \\ \varepsilon \{\sigma(r_1, t) \sigma(r_2, t)\} = v^2 \int_0^\infty \int_0^\infty J_1(r_1 \xi) J_1(r_2 \eta) \xi^2 \eta^2 \times \\ \times \varepsilon \{f(\xi) f(\eta)\} e^{-\frac{v\xi^2}{\rho}t} e^{-\frac{v\eta^2}{\rho}t} d\xi d\eta.$$

Dalej będziemy przyjmowali, że

$$(4.2) \quad \varepsilon \{f(r)\} = V(r), \quad \varepsilon \{f(r_1)f(r_2)\} = \Phi(r_1, r_2).$$

Wtedy

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \varepsilon \{f(\xi)\} &= \int_0^{\infty} V(r) r J_0(\xi r) dr, \\ \varepsilon \{f(\xi)f(\eta)\} &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \Phi(r_1, r_2) r_1 r_2 J_0(\xi r_1) J_0(\eta r_2) dr_1 dr_2. \end{aligned}$$

Podstawiając powyższe wartości do wzorów (4.1) otrzymujemy charakterystyki statystyczne wielkości  $w$ ,  $v$  i  $\sigma$ . Dla dowolnych konkretnych wartości  $r_1$  i  $r_2$  oraz  $t$  otrzymane całki mogą być obliczone numerycznie na podstawie znajomości funkcji  $V(r)$  i  $\Phi(r_1, r_2)$ .

Rezultaty otrzymane przez PYTELA i DAVIDSA [13] można łatwo otrzymać ze wzorów (4.1)<sub>2</sub> – (4.1)<sub>3</sub>.

## 5. WYNIKI NUMERYCZNE

W tym punkcie przyjmiemy specjalną postać funkcji  $V(r)$  i  $\Phi(r_1, r_2)$  i obliczymy całki występujące w formułach (4.1). Przyjmiemy dwie różne postacie funkcji  $V(r)$ , odpowiadające dwóm modelom uderzenia.

Model I:

$$(5.1) \quad V(r) = v_0 \exp\left(-\frac{kr}{R}\right).$$

W tym modelu funkcja  $V(r)$  przyjmuje swą maksymalną wartość w punkcie  $r=0$  i maleje, gdy  $r$  rośnie. Model ten wydaje się racjonalny, gdyż prędkość powinna być największa w punkcie uderzenia i powinna maleć w miarę oddalania się od tego punktu.

Model II:

$$(5.2) \quad V(r) = \frac{v_0 k R}{2(1 - e^{-k})} \exp\left(-\frac{kr}{R}\right).$$

W tym modelu  $V(r)$  przyjmuje w punkcie  $r=0$  wartość nieskończenie wielką, maleje do zera, gdy  $r$  wzrasta. Model II powinien być lepszy wtedy, gdy mamy podstawy, aby uważać, że prędkość w punkcie uderzenia jest bardzo duża, natomiast na odległościach dużych przyjmuje wartości, które można pominąć. Stały czynnik jest wybrany w ten sposób, aby prędkość średnia była równa  $v_0$  na kole o promieniu  $R$ .

Dla  $\Phi(r_1, r_2)$  przyjmiemy postać następującą:

$$(5.3) \quad \Phi(r_1, r_2) = \frac{v_0^2 k^3 R}{4 [2 - e^{-k}(k^2 + 2k + 2)]} e^{-\frac{kr_1}{R}} \delta(r_1 - r_2).$$

Przyczyną postulowania powyższej postaci funkcji  $\Phi(r_1, r_2)$  jest racjonalne założenie, że prędkość w dwóch różnych punktach  $r_1$  i  $r_2$ , między którymi jest duża odległość, nie powinny być skorelowane oraz że korelacja prędkości w dwóch punktach  $r_1$  i  $r_2$  będzie monotonicznie malejącą funkcją  $r_1$ . Inne czynniki są dobrane tak, aby była spełniona równość

$$(5.4) \quad 4\pi^2 \int_0^R \int_0^R \Phi(r_1, r_2) r_1 r_2 dr_1 dr_2 = \pi^2 R^4 V_0^2.$$

Całka po lewej stronie jest miarą wartości średniej kwadratu momentu po kole o promieniu  $R$ .

W celu porównania z rezultatami otrzymanymi w pracy [13] wprowadzamy następujące zmienne bezwymiarowe:

$$(5.5) \quad x = \frac{r}{R}, \quad \tau = \frac{vt}{\rho R^2}, \quad \Sigma = \frac{R\sigma}{v v_0},$$

$$V_1 = \frac{2v}{v_0}, \quad W = \frac{vW}{v_0 R^2 \rho}, \quad \alpha = \zeta R, \quad \beta = \eta R.$$

Wartości średnie dla modelu I są następujące:

$$(5.6) \quad \varepsilon \{W(x, \tau)\} = k \int_0^\infty \frac{J_0(\alpha x) [1 - e^{-\alpha^2 \tau}]}{\alpha (\alpha^2 + k^2)^{3/2}} d\alpha,$$

$$\varepsilon \{V_1(x, \tau)\} = 2k \int_0^\infty \frac{\alpha J_0(\alpha x) e^{-\alpha^2 \tau}}{(\alpha^2 + k^2)^{3/2}} d\alpha,$$

$$\varepsilon \{\Sigma(x, \tau)\} = -k \int_0^\infty \frac{\alpha^2 J_1(\alpha x) e^{-\alpha^2 \tau}}{(\alpha^2 + k^2)^{3/2}} d\alpha,$$

a dla modelu II

$$(5.7) \quad \varepsilon \{W(x, \tau)\} = \frac{k}{2(1 - e^{-k})} \int_0^\infty \frac{J_0(\alpha x) (1 - e^{-\alpha^2 \tau})}{\alpha \sqrt{\alpha^2 + k^2}} d\alpha,$$

$$\varepsilon \{V(x, \tau)\} = \frac{k}{(1 - e^{-k})} \int_0^\infty \frac{\alpha J_0(\alpha x) e^{-\alpha^2 \tau}}{\sqrt{\alpha^2 + k^2}} d\alpha,$$

$$\varepsilon \{\Sigma(x, \tau)\} = -\frac{k}{2(1 - e^{-k})} \int_0^\infty \frac{\alpha^2 J_1(\alpha x)}{\sqrt{\alpha^2 + k^2}} e^{-\alpha^2 \tau} d\alpha.$$

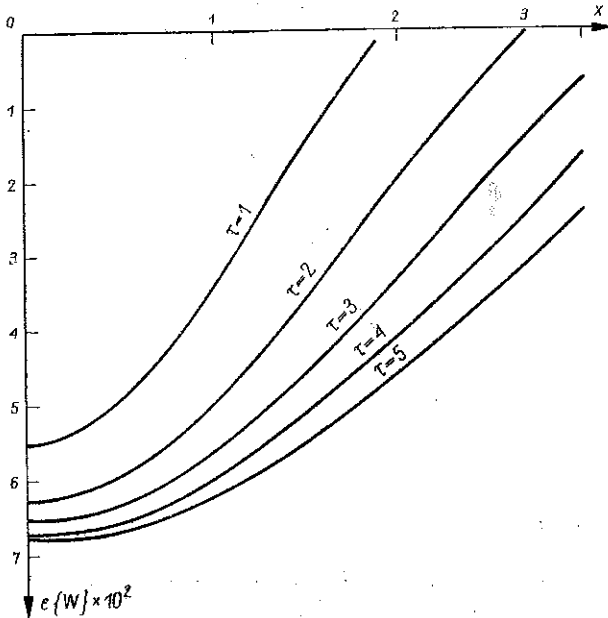
Momenty rzędu drugiego wynoszą

$$\begin{aligned} \varepsilon \{W(x, \tau) W(y, \tau)\} &= \frac{1}{4} F(k) \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{J_0(\alpha x) J_0(\beta y) (1 - e^{-\alpha^2 \tau})}{\alpha \beta} \times \\ &\quad \times (1 - e^{-\beta^2 \tau}) \Phi(\alpha, \beta) d\alpha d\beta, \\ (5.8) \quad \varepsilon \{V(x, \tau) V(y, \tau)\} &= F(k) \int_0^\infty \int_0^\infty J_0(\alpha x) J_0(\beta y) \alpha \beta \Phi(\alpha, \beta) e^{-\alpha^2 \tau - \beta^2 \tau} d\alpha d\beta, \\ \varepsilon \{\Sigma(x, \tau) \Sigma(y, \tau)\} &= \frac{1}{4} F(k) \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha^2 \beta^2 \Phi(\alpha, \beta) J_1(\alpha x) J_1(\beta y) \times \\ &\quad \times e^{-\alpha^2 \tau - \beta^2 \tau} d\alpha d\beta, \end{aligned}$$

gdzie

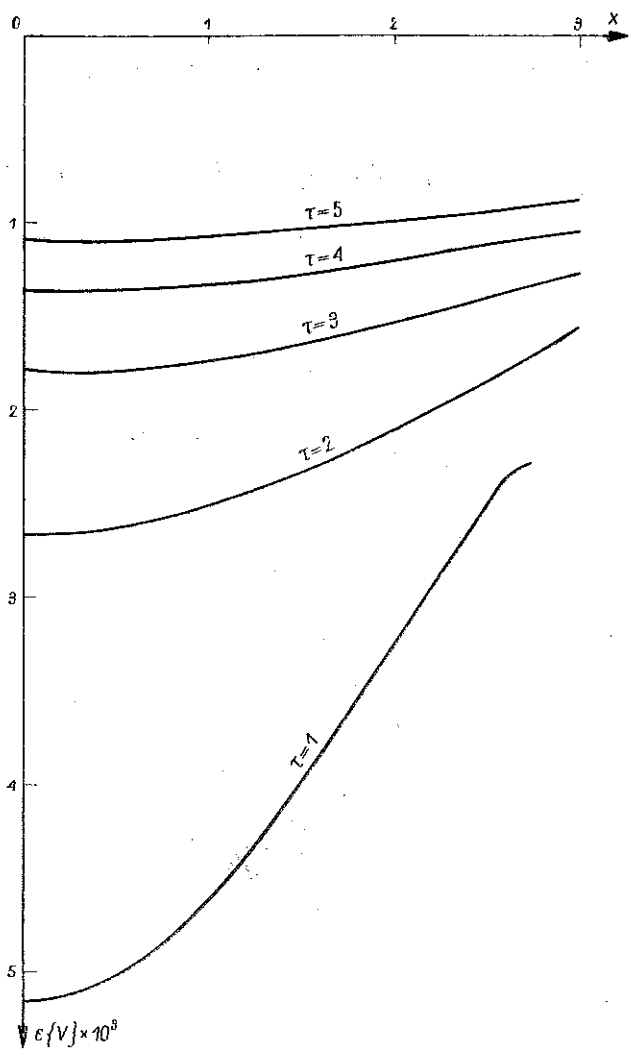
$$(5.9) \quad F(k) = \frac{k^3}{2 - e^{-k}(k^2 + 2k + 2)},$$

$$\Phi(\alpha, \beta) = \int_0^\infty u^2 J_0(u\alpha) J_0(u\beta) e^{-ku} du.$$



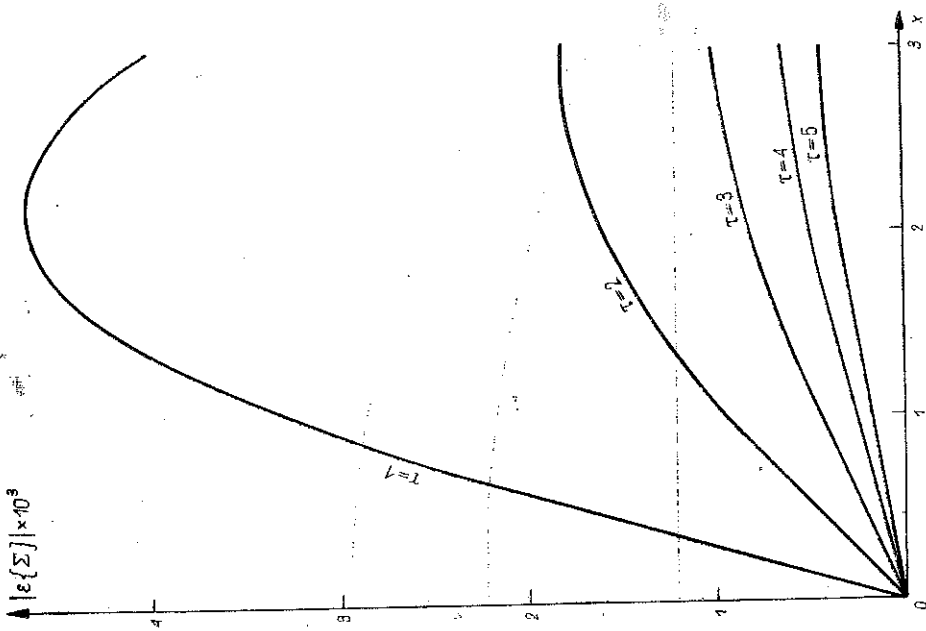
Rys. 1. Wartość przeciętna bezwymiarowego przemieszczenia jako funkcja bezwymiarowej odległości (model I,  $k = 3$ )

Całki (5.6) – (5.7) zostały obliczone numerycznie dla różnych wartości  $k$  i konkretnych wartości  $\tau$ . Wykresy od 1 – 6 dają wartości przeciętne przemieszczenia, prędkości i naprężenia odpowiadające różnym wartościom  $k$  i  $\tau$ . Wykres dla wartości

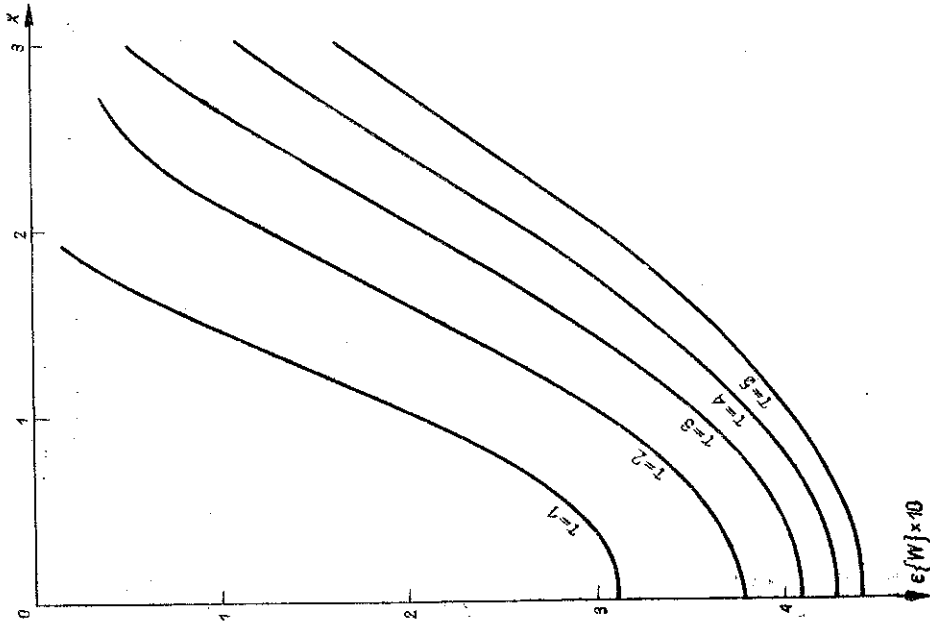


Rys. 2. Wartość przeciętna bezwymiarowej prędkości jako funkcja bezwymiarowej odległości (model I,  $k = 3$ )

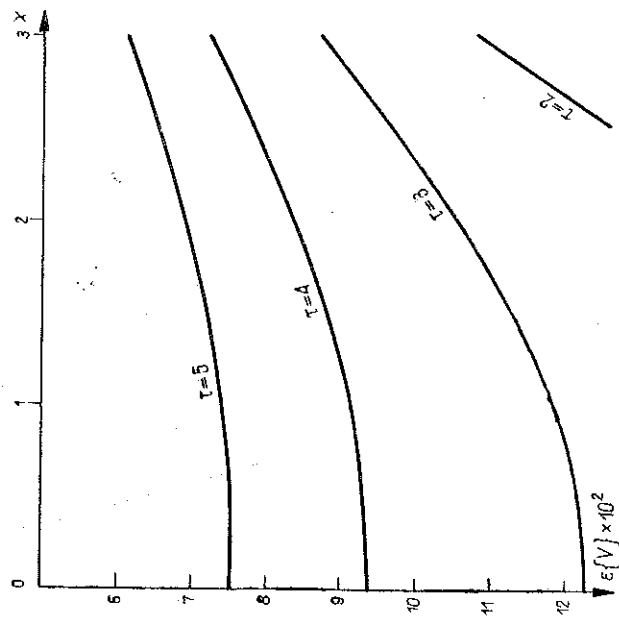




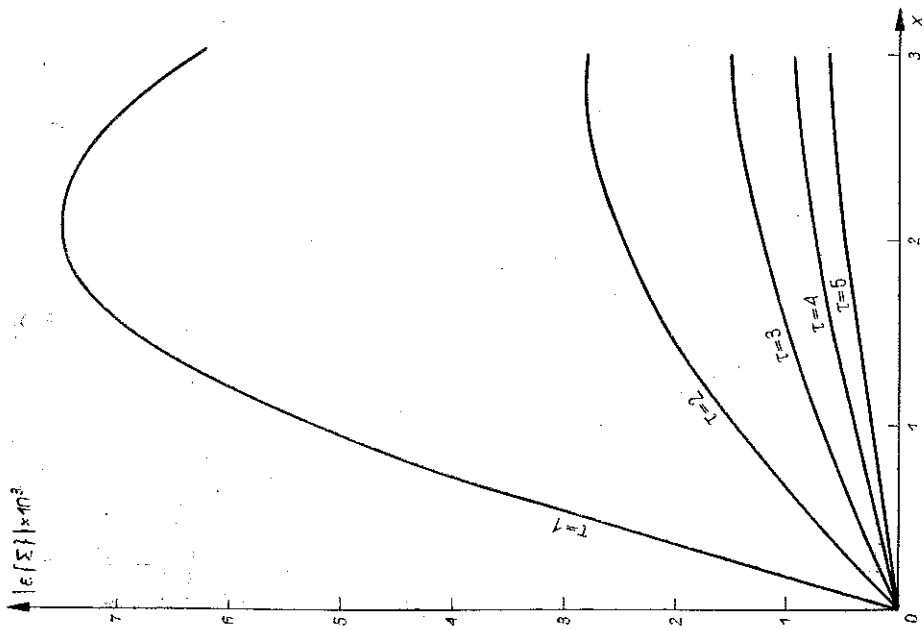
Rys. 3. Wartość przeciętna bezwymiarowego naprężenia jako funkcja bezwymiarowej odległości (model I,  $k = 3$ )



Rys. 4. Wartość przeciętna bezwymiarowego przemieszczenia jako funkcja bezwymiarowej odległości (model II,  $k = 1$ )



Rys. 5. Wartość przeciętna bezwymiarowej prędkości jako funkcja bezwymiarowej odległości (model II,  $k = 1$ )



Rys. 6. Wartość przeciętna bezwymiarowego naprężenia jako funkcja bezwymiarowej odległości (model II,  $k = 1$ )

przeciętnej przemieszczeń odpowiadający wartości  $k=3$  w modelu I wykazuje dobrą zgodność z eksperymentalną krzywą podaną w [13].

Autorzy pragną w tym miejscu podziękować Profesorowi S. K. SRINIVASANOWI, który przeprowadził z nimi wiele owocnych i zachęcających dyskusji.

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. E. H. KENNARD, *Kinetic theory of gases*, Mcgraw Hill Book Co, 1938.
2. R. C. TOLMAN, *The principles of statistical mechanics*, Oxford University Press, 1938.
3. J. PERRIUR, *Brownian movement and molecular reality*, Taylor and Francis, 1910.
4. G. A. VANLEAR Jr. and G. E. UHLENBECK, *Brownian motion of strings and elastic rods*, Phys. Rev., 38, 1931.
5. H. L. DRYDEN, *A guide to recent papers on the turbulent motion of fluids*, AMR, 4, 1951.
6. S. H. CRANDALL, *Random vibration*, AMR, 12, 1959.
7. S. H. CRANDALL (Ed), *Random vibration*, 1, Technology Press/Wiley, 1958.
8. J. D. ROBSON, *Introduction to random vibration*, Edinburgh University Press, 1963.
9. S. H. CRANDALL and W. D. MARK, *Random vibration in mechanical systems*, Academic Press, 1963.
10. Y. K. LIN, *Probabilistic theory of structural dynamics*, Mcgraw Hill Book Co, 1967.
11. E. PARZEN, *On models for the probability of fatigue failure of a structure in time series analysis papers*, Holden-Day, 1967.
12. S. KUMARASWAMY, *Stochastic processes and continuum mechanics*, Ph.D. Thesis, Indian Institute of Technology, Madras (1968).
13. A. PYTEL and N. DAVIDS, *A viscous model for plug formation in plates*, J. Franklin Institute, 276, 1963.
14. I. N. SNEDDON, *Fourier Transforms*, Mcgraw Hill Book Co, 1951.

#### Резюме

#### О НЕКОТОРОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ЗАДАЧИ УДАРА

Работа касается поведения пластин под влиянием взрывных ударов. Удар характеризуется случайной начальной скоростью. Принимается, что материал деформируется согласно модели Фойгта. Определяются посредственные значения момента второго ряда перемещения и напряжения.

#### SUMMARY

#### A STOCHASTIC MODEL FOR AN IMPACT PROBLEM

This paper is a study of the response of plates subjected to projectile impacts. The impact is represented by a velocity assumed to be random. The material response is taken to be of Voight type. Expressions for the estimates (in the form of expectations) of displacement and stress are derived.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS INDIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY  
MADRAS — 36, INDIA

Praca została złożona w Redakcji dnia 2 stycznia 1970 r.