

O FORMOWANIU SIĘ I PROPAGACJI PŁASKIEJ FALI UDERZENIOWEJ W BILINIOWYM OŚRODKU SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYM

EDWARD W Ł O D A R C Z Y K (WARSZAWA)

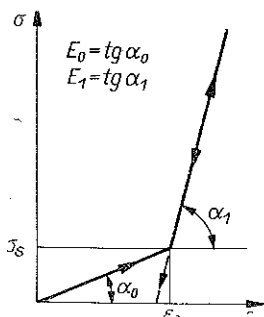
1. WSTĘP

Problem rozprzestrzeniania się niestacjonarnych fal uderzeniowych w ciałach stałych należy do klasy złożonych zagadnień mechaniki falowej i nie ma do chwili obecnej ogólnego rozwiązania. Zagadnienie to było i jest przedmiotem badań wielu autorów. Obszerny przegląd literatury z tej dziedziny podany jest m.in. w pracach [1 - 5]. Rozwiązano dotychczas *explicite* kilka szczególnych przypadków fali uderzeniowej (problemy samopodobne, gaz plastyczny i sztywne odciążenie, problemy zlinearyzowane itp.), wywołanej obciążeniem przyłożonym w sposób nagły do badanego ośrodka. Mało poznany jest problem formowania się fal uderzeniowych w ośrodkach nieliniowych. W sposób jakościowy opisano to zagadnienie w [6]. W artykule [7] rozwiązano w sposób przybliżony (przy zastosowaniu nieskończonych szeregów) problem formowania się frontu fali uderzeniowej w biliniowym ośrodku ze wzmocnieniem. W pracach [8 i 9] uzyskano zamknięte rozwiązanie problemu formowania się uderzeniowych fal odciążenia i obciążenia w biliniowym ośrodku sprężystym z «miękką» (w przypadku fali odciążenia) i «sztywną» (w przypadku fali obciążenia) charakterystyką $\sigma = \sigma(\epsilon)$. Rozwiązanie uzyskano dla obciążenia zewnętrznego narastającego od zera w sposób liniowy do maksymalnej wartości i następnie liniowo malejącego do zera.

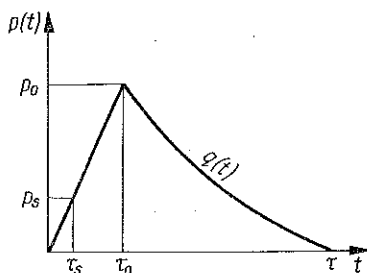
W niniejszej pracy rozpatrzmy problem formowania się frontu fali uderzeniowej w biliniowym ośrodku sprężysto-plastycznym od obciążenia narastającego liniowo od zera do maksymalnej wartości p_0 i następnie malejącego wg dowolnej funkcji $q(t)$. Okazuje się, że w takim ujęciu problem można rozwiązać w sposób zamknięty. Uzyskane zamknięte wzory umożliwiły dokładną analizę jakościową i ilościową wpływu fizycznych parametrów ośrodka i obciążenia zewnętrznego na rozkład pól naprężenia i prędkości masowych w badanym ośrodku biliniowym. Należy tutaj podkreślić, że zaproponowany w [10] biliniowy model ośrodka ze wzmocnieniem dość dobrze aproksymuje m.in. fizyko-mechaniczne własności gruntów piaszczystych przy dużych obciążeniach. Zatem rozwiązany w niniejszej pracy problem oprócz charakteru teoretyczno-poznawczego posiada istotne znaczenie praktyczne, szczególnie ze względu na zamkniętą formę wyprowadzonych wzorów.

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Zbadamy niestacjonarny ruch półprzestrzeni wypełnionej piaszczystym gruntem, którego fizyko-mechaniczne własności aproksymujemy biliniowym ośrodkiem sprężysto-plastycznym o wklęsłej charakterystyce $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ (rys. 1). Powierzchnię półprzestrzeni obciążamy równomiernie rozłożonym ciśnieniem zmieniającym się w czasie wg rys. 2. Rozważania prowadzimy we współrzędnych Lagrange'a x, t .



Rys. 1



Rys. 2

Sformułowany wyżej problem jednoznacznie opisują następujące równania: równania zachowania masy i impulsu:

a) na froncie fali uderzeniowej

$$(2.1) \quad [v] = -\varphi'(t)[\varepsilon(\sigma)], \quad [\sigma] = \rho\varphi'^2(t)[\varepsilon(\sigma)],$$

b) przed i za frontem fali uderzeniowej (rys. 1)

$$(2.2) \quad v_{,x} = \frac{1}{E_i} \sigma_{,t}, \quad \rho v_{,t} = \sigma_{,x}, \quad i=0, 1;$$

$$(2.3) \quad \sigma = \pm \rho a_i v + C^\pm, \quad \text{jeśli } x = \pm a_i t + c^\pm,$$

$$a_i = \sqrt{E_i/\rho};$$

związki fizykalne

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \sigma &= E_0 \varepsilon, & \text{jeśli } |\sigma| \leq |\sigma_s|, \\ \sigma &= \sigma_s + E_1(\varepsilon - \varepsilon_s), & \text{jeśli } |\sigma| > |\sigma_s|; \end{aligned}$$

warunek brzegowy

$$(2.5) \quad \sigma(0, t) = -p(t) = \begin{cases} -p_0 \frac{t}{\tau_0}, & \text{jeśli } 0 \leq t \leq \tau_0, \\ -q(t), & \text{jeśli } t \geq \tau_0, \end{cases}$$

$$q(t) > 0, \quad q'(t) < 0;$$

warunki początkowe

$$(2.6) \quad \sigma(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = 0.$$

Symbol $[f]$ oznacza skok wielkości f na froncie fali uderzeniowej, a $\varphi(t)$ określa postać frontu fali.

Dalsze rozważania prowadzić będziemy w następujących wielkościach bezwymiarowych:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \xi &= \frac{x}{a_0 \tau}, & \eta &= \frac{t}{\tau}, & \eta_0 &= \frac{\tau_0}{\tau}, & \eta_s &= \frac{\tau_s}{\tau}, \\ P &= \frac{\sigma}{p_0}, & P_s &= \frac{\sigma_s}{p_0}, & P_0 &= \frac{p(\eta)}{p_0}, & Q &= \frac{q(\eta)}{p_0}, \\ V &= \frac{\rho a_0 v}{p_0}, & \Phi &= \frac{\varphi}{a_0 \tau}, & \Phi' &= \frac{\varphi'}{a_0}, \\ \alpha_0 &= \frac{E_0}{p_0}, & \alpha_1 &= \frac{E_1}{p_0}, & \mu &= \frac{a_0}{a_1} = \sqrt{E_0/E_1}, \end{aligned}$$

gdzie E_0 i E_1 są odpowiednio modułami sprężystości i wzmocnienia ośrodka bi-liniowego (rys. 1) oraz p_0 , τ_s , τ_0 i τ parametrami charakteryzującymi obciążenie $p(t)$ (rys. 2).

Równania wyjściowe problemu (2.1)–(2.6) w zmiennych bezwymiarowych (2.7) przyjmują następującą postać:

$$(2.8) \quad [V] = -\alpha_0 \Phi'(\eta) [\varepsilon(P)], \quad [P] = \alpha_0 \Phi'^2(\eta) [\varepsilon(P)];$$

$$(2.9) \quad V_{,\xi} = \frac{E_0}{E_1} P_{,\eta}, \quad V_{,\eta} = P_{,\xi};$$

$$(2.10) \quad P = \pm \frac{a_1}{a_0} V + C_1^{\pm}, \quad \text{jeśli} \quad \xi = \pm \frac{a_1}{a_0} \eta + c_1^{\pm};$$

$$P = \alpha_0 \varepsilon, \quad \text{jeśli} \quad |P| \leq |P_s|,$$

$$(2.11) \quad P = P_s + \alpha_1 (\varepsilon - \varepsilon_s), \quad \text{jeśli} \quad |P| > |P_s|;$$

$$(2.12) \quad P(0, \eta) = -P_0(\eta) = \begin{cases} -\frac{\eta}{\eta_0}, & \text{jeśli} \quad 0 \leq \eta \leq \eta_0, \\ -Q(\eta), & \text{jeśli} \quad \eta \geq \eta_0; \end{cases}$$

$$(2.13) \quad P(\xi, 0) = 0, \quad V(\xi, 0) = 0.$$

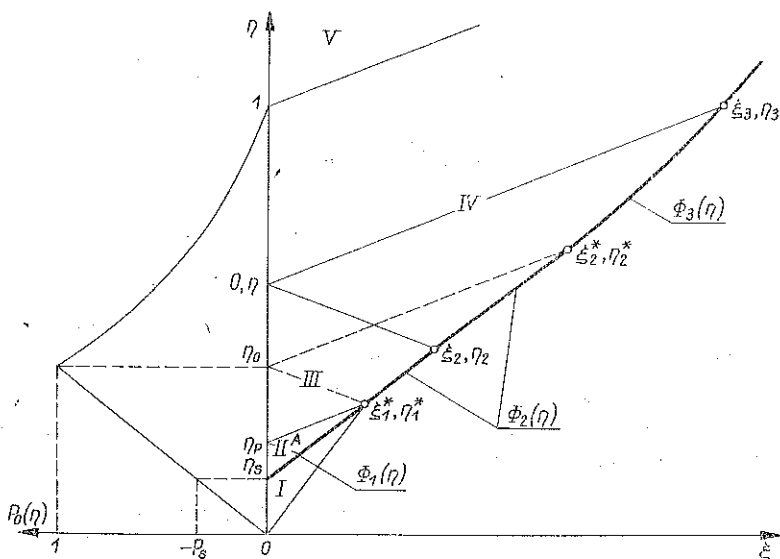
Przejdziemy z kolei do konstrukcji rozwiązania sformułowanego problemu.

3. ROZWIĄZANIE PROBLEMU

Falowy obraz rozwiązania sformułowanego wyżej problemu przyjmuje postać pokazaną na rys. 3. Dla uproszczenia zapisu wzorów zastosujemy oznaczenia indeksowe wg następującej konwencji: indeksy zależnych zmiennych odpowiadać będą numerowi odpowiedniego obszaru na płaszczyźnie x, t , a parametry na froncie

fali uderzeniowej oznaczać będziemy podwójnym indeksem składającym się ze znaku «0» i cyfry odpowiadającej numerowi danego obszaru, którego brzegiem jest front fali uderzeniowej.

Rozwiązanie zagadnień w poszczególnych obszarach płaszczyzny fizycznej $x, t(\xi, \eta)$ kształtuje się następująco.



Rys. 3

Obszar I. Propagują się tutaj fale Riemanna, zatem pola naprężenia i prędkości zgodnie z warunkiem brzegowym (2.12) przyjmują postać

$$(3.1) \quad P_1(\xi, \eta) = -V_1(\xi, \eta) = -\frac{1}{\eta_0}(\eta - \xi).$$

Obszar II. W obszarze tym ruchem ośrodka rządzą następujące równania:

$$(3.2) \quad V_{2,\xi} = \mu^2 P_{2,\eta}, \quad V_{2,\eta} = P_{2,\xi}.$$

Równania te należy uzupełnić warunkami ciągłości dynamicznej i kinematycznej na froncie fali uderzeniowej $\xi = \Phi_1(\eta)$:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} V_{02}(\eta) - V_{01}(\eta) &= -\alpha_0 \Phi_1'(\eta) [\varepsilon_{02}(\eta) - \varepsilon_{01}(\eta)], \\ P_{02}(\eta) - P_{01}(\eta) &= \alpha_0 \Phi_1'^2(\eta) [\varepsilon_{02}(\eta) - \varepsilon_{01}(\eta)] \end{aligned}$$

oraz warunkiem brzegowym

$$(3.4) \quad P_2(0, \eta) = -\frac{\eta}{\eta_0}.$$

Konstrukcję rozwiązania powyższego zmodyfikowanego zagadnienia Goursata należy zacząć od określenia prawego brzegu obszaru II, tj. początkowego odcinka

frontu fali uderzeniowej $\Phi_1(\eta)$. Będziemy go poszukiwali w postaci szeregu Taylora:

$$(3.5) \quad \Phi_1(\eta) = \Phi_1'(\eta_s)(\eta - \eta_s) + \frac{1}{2} \Phi_1''(\eta_s)(\eta - \eta_s)^2 + \dots$$

Dla określenia $\Phi_1'(\eta_s)$ zróżniczkujemy równania (3.3) wzdłuż nie znanego na razie frontu fali $\Phi_1(\eta)$:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} V'_{02}(\eta) - V'_{01}(\eta) &= -\alpha_0 \Phi_1''(\eta) [\varepsilon_{02}(\eta) - \varepsilon_{01}(\eta)] - \alpha_0 \Phi_1'(\eta) [\varepsilon'_{02}(\eta) - \varepsilon'_{01}(\eta)], \\ P'_{02}(\eta) - P'_{01}(\eta) &= 2\alpha_0 \Phi_1'(\eta) \Phi_1''(\eta) [\varepsilon_{02}(\eta) - \varepsilon_{01}(\eta)] + \alpha_0 \Phi_1'^2(\eta) [\varepsilon'_{02}(\eta) - \varepsilon'_{01}(\eta)]. \end{aligned}$$

Z drugiej strony mamy

$$(3.7) \quad \begin{aligned} V'_{02}(\eta) - V'_{01}(\eta) &= \{\Phi_1'(\eta) [V_{2,\xi} - V_{1,\xi}] + V_{2,\eta} - V_{1,\eta}\}_{\xi=\Phi_1(\eta)}, \\ P'_{02}(\eta) - P'_{01}(\eta) &= \{\Phi_1'(\eta) [P_{2,\xi} - P_{1,\xi}] + P_{2,\eta} - P_{1,\eta}\}_{\xi=\Phi_1(\eta)}, \\ \varepsilon_{02}(\eta) - \varepsilon_{01}(\eta) &= \varepsilon_s(1 - \mu^2) + \frac{1}{\alpha_1} P_{02}(\eta) - \frac{1}{\alpha_0} P_{01}(\eta), \\ \varepsilon'_{02}(\eta) - \varepsilon'_{01}(\eta) &= \frac{1}{\alpha_1} P'_{02}(\eta) - \frac{1}{\alpha_0} P'_{01}(\eta). \end{aligned}$$

Z równań (3.2), (3.6) i (3.7) po przekształceniach otrzymamy:

$$(3.8) \quad \begin{aligned} P_{2,\xi} - P_{1,\xi} &= -2\Phi_1'(\eta_s)(\mu^2 P_{2,\eta} - P_{1,\eta}) - \Phi_1'^2(\eta_s)(\mu^2 P_{2,\xi} - P_{1,\xi}), \\ P_{2,\eta} - P_{1,\eta} &= \Phi_1'^2(\eta_s)(\mu^2 P_{2,\xi} - P_{1,\xi}) + \Phi_1'(\eta_s)(\mu^2 P_{2,\eta} - P_{1,\eta}). \end{aligned}$$

Przyjmując w (3.8)

$$(3.9) \quad P_{2,\eta}(0, \eta_s) = P_{1,\eta}(0, \eta_s) = -P_{1,\xi}(0, \eta_s),$$

dostaniemy

$$(3.10) \quad \Phi_1'^2(\eta_s) + \frac{2}{\mu^2} \Phi_1'(\eta_s) - \frac{3}{\mu^2} = 0,$$

a stąd

$$(3.11) \quad \Phi_1'(\eta_s) = \frac{1}{\mu^2} (\sqrt{1 + 3\mu^2} - 1) = \bar{c}_0.$$

Wyprowadzony tutaj wzór na początkową względną prędkość propagacji formującego się frontu fali uderzeniowej — c_0 pokrywa się ze wzorem uzyskanym metodą odwrotną (przyjęto *a priori* prostoliniowy odcinek frontu fali uderzeniowej) przez W. W. BIDERMANA [11]. Z (3.11) wynika, że c_0 określone jest jednoznacznie przez wzajemne położenie prostoliniowych odcinków charakterystyki $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ (parametr μ), natomiast nie zależy od gradientu narastania ciśnienia na brzegu półprzestrzeni. Przyjmując graniczne wartości parametru μ ($\mu = 1$ i $\mu = 0$) otrzymujemy granice przedziału zmian współczynnika c_0 ($1 \leq c_0 \leq 1,5$).

Przechodzimy do określenia następnego współczynnika szeregu (3.5), tj. $\Phi_1''(\eta_s)$. W tym celu różniczkujemy powtórnie funkcje (3.6) i (3.7) wzdłuż frontu fali,

a równania ruchu (3.2) względem ξ i η . Z otrzymanego w ten sposób układu równań po eliminacji niektórych pochodnych drugiego rzędu i uwzględnieniu, że

$$P_{2, \eta\eta}(0, \eta_s) = P_{1, \eta\eta}(0, \eta_s) = 0,$$

dostaniemy

$$(3.12) \quad \begin{aligned} (3c_0^2 \mu^2 + 1) P_{2, \xi\eta} + 3 [c_0 (\mu^2 P_{2, \xi} + P_{1, \eta}) + (\mu^2 - 1) P_{1, \eta}] \Phi_1''(\eta_s) &= 0, \\ 2c_0 (1 - c_0^2 \mu^2) P_{2, \xi\eta} + [P_{2, \xi} + P_{1, \eta} - 5c_0^2 (\mu^2 P_{2, \xi} + P_{1, \eta}) - \\ - 4c_0 (\mu^2 - 1) P_{1, \eta}] \Phi_1''(\eta_s) &= 0. \end{aligned}$$

Wprowadzając (3.8) do (3.12) mamy

$$(3.13) \quad \begin{aligned} (1 + 3c_0^2 \mu^2) P_{2, \xi\eta} + \frac{1}{c_0} (P_{2, \xi} - P_{1, \xi}) \Phi_1''(\eta_s) &= 0, \\ 2c_0 (1 - c_0^2 \mu^2) P_{2, \xi\eta} - 6(P_{2, \xi} - P_{1, \xi}) \Phi_1''(\eta_s) &= 0. \end{aligned}$$

Wyznacznik charakterystyczny powyższego układu równań wynosi

$$(3.14) \quad D = 2(1 + c_0^2 \mu^2) (P_{2, \xi} - P_{1, \xi}).$$

Warunek $D=0$ implikuje następującą równość:

$$(3.15) \quad P_{2, \xi} = P_{1, \xi} = -P_{1, \eta}.$$

Podstawiając (3.15) do (3.8) otrzymamy

$$(3.16) \quad c_0 = 1 \quad \text{lub} \quad c_0 = 2.$$

Przypadek $c_0=1$ odpowiada falam w ośrodku liniowosprężystym (fala uderzeniowa nie istnieje), a $c_0=2$ wychodzi poza przedział możliwych zmian współczynnika c_0 ($1 \leq c_0 \leq 1,5$). Wynika stąd, że wyznacznik D dla badanego ośrodka biliniowego jest różny od zera i jedynym rozwiązaniem układu równań (3.13) są wielkości

$$(3.17) \quad [P_{2, \xi\eta}]_{\xi=0}^{\eta=\eta_s} = 0, \quad \Phi_1''(\eta_s) = 0.$$

W analogiczny sposób można wykazać, że następne pochodne są również równe zeru. Zatem początkowy odcinek fali uderzeniowej jest linią prostą, określoną przez następujące równanie:

$$(3.18) \quad \xi = \Phi_1(\eta_1) = c_0(\eta_1 - \eta_s), \quad \text{jeśli} \quad \eta_s \leq \eta_1 \leq \eta_1^*,$$

gdzie

$$(3.19) \quad \eta_1^* = \xi_1^* = \frac{c_0}{c_0 - 1} \eta_s.$$

Na froncie fali $\Phi_1(\eta)$ zgodnie z (3.1), (3.3), (2.11), (3.11) i (3.18) mamy od strony obszaru I

$$(3.20) \quad P_{01}(\eta_1) = -V_{01}(\eta_1) = (c_0 - 1) \frac{\eta_1}{\eta_0} - c_0 \frac{\eta_s}{\eta_0}$$

oraz od strony obszaru II

$$(3.21) \quad \begin{aligned} P_{02}(\eta_1) &= -\frac{(1-c_0^2)(1-c_0)}{1-c_0^2\mu^2} \frac{\eta_1}{\eta_0} - \frac{c_0(1-c_0^2)+c_0^2(1-\mu^2)}{1-c_0^2\mu^2} \frac{\eta_s}{\eta_0}, \\ V_{02}(\eta_1) &= \frac{(1-c_0)^2(1+c_0\mu^2)}{1-c_0^2\mu^2} \frac{\eta_1}{\eta_0} + \frac{c_0[2-c_0-\mu^2+c_0\mu^2(1-c_0)]}{1-c_0^2\mu^2} \frac{\eta_s}{\eta_0}. \end{aligned}$$

Wewnątrz obszaru II zgodnie z metodą charakterystyk rozwiązanie problemu przyjmie postać

$$(3.22) \quad \begin{aligned} P_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} \left\{ P_{02}(\bar{\eta}_1) + P_{02}(\bar{\eta}_2) + \frac{1}{\mu} [V_{02}(\bar{\eta}_1) - V_{02}(\bar{\eta}_2)] \right\}, \\ V_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} \{ V_{02}(\bar{\eta}_1) + V_{02}(\bar{\eta}_2) + \mu [P_{02}(\bar{\eta}_1) - P_{02}(\bar{\eta}_2)] \}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.23) \quad \begin{aligned} \bar{\eta}_1 &= \frac{1}{1+c_0\mu} (\eta + \mu\xi) + \frac{c_0\mu}{1+c_0\mu} \eta_s, \\ \bar{\eta}_2 &= \frac{1}{1-c_0\mu} (\eta - \mu\xi) - \frac{c_0\mu}{1-c_0\mu} \eta_s. \end{aligned}$$

Wprowadzając (3.23) i (3.21) do (3.22) otrzymujemy wyraźną postać wzorów na względne pola naprężeń i prędkości:

$$(3.24) \quad \begin{aligned} P_2(\xi, \eta) &= -\frac{(1-c_0)^2}{2\mu} \left[\frac{\mu-1}{(1+c_0\mu)^2} \frac{\eta + \mu\xi}{\eta_0} + \frac{\mu+1}{(1-c_0\mu)^2} \frac{\eta - \mu\xi}{\eta_0} \right], \\ V_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} \left[\frac{(1-c_0)^2(1-\mu)}{(1+c_0\mu)^2} \frac{\eta + \mu\xi}{\eta_0} + \frac{(1-c_0)^2(1+\mu)}{(1-c_0\mu)^2} \frac{\eta - \mu\xi}{\eta_0} \right] + \\ &\quad + \frac{c_0(1-\mu^2)[2-c_0(1+c_0^2\mu^2)]}{(1-c_0^2\mu^2)^2} \frac{\eta_s}{\eta_0}. \end{aligned}$$

Tym samym uzyskaliśmy zamknięte rozwiązanie problemu w obszarze II.

Obszar III. Wzdłuż dodatnich charakterystyk położonych w obszarze III mamy

$$(3.25) \quad P_3 = \frac{1}{\mu} V_3 - 2Q(\eta - \mu\xi) - P_{02}(\bar{\eta}) - \frac{1}{\mu} V_{02}(\bar{\eta}),$$

gdzie

$$(3.26) \quad \bar{\eta} = \frac{1}{1+c_0\mu} (\eta - \mu\xi) + \frac{c_0\mu}{1+c_0\mu} \eta_s.$$

Z (3.25) wynika, że $P_{03}(\eta_2)$ na froncie fali uderzeniowej wynosi

$$(3.27) \quad P_{03}(\eta_2) = \frac{1}{\mu} V_{03}(\eta_2) - 2Q[\eta_2 - \mu\Phi_2(\eta_2)] - P_{02}(\eta^*) - \frac{1}{\mu} V_{02}(\eta^*),$$

gdzie

$$(3.28) \quad \eta^* = \frac{1}{1+c_0\mu} [\eta_2 - \mu\Phi_2(\eta_2)] + \frac{c_0\mu}{1+c_0\mu} \eta_s.$$

Poza tym z praw zachowania na froncie fali wynika, że

$$(3.29) \quad \begin{aligned} V_{03}(\eta_2) &= -\Phi_2'(\eta_2) \left[\mu^2 P_{03}(\eta_2) - (1-\mu^2) \frac{\eta_s}{\eta_0} \right], \\ P_{03}(\eta_2) &= \Phi_2'^2(\eta_2) \left[\mu^2 P_{03}(\eta_2) - (1-\mu^2) \frac{\eta_s}{\eta_0} \right]. \end{aligned}$$

Eliminując z (3.27) P_{03} i V_{03} za pomocą (3.29) otrzymamy następujące równanie:

$$\begin{aligned} -\frac{1-\mu^2}{1-\mu^2\Phi_2'^2(\eta_2)} \Phi_2'^2(\eta_2) &= \Phi_2'(\eta_2) \left[\frac{\mu(1-\mu^2)}{1-\mu^2\Phi_2'^2(\eta_2)} \Phi_2'^2(\eta_2) + \frac{1-\mu^2}{\mu} \right] - \\ &\quad - \left[2Q(\eta_2 - \mu\Phi_2(\eta_2)) + P_{02}(\eta^*) + \frac{1}{\mu} V_{02}(\eta^*) \right] \frac{\eta_0}{\eta_s}, \end{aligned}$$

kóre po wykorzystaniu warunku brzegowego (2.12) redukuje się do równania Abela drugiego rodzaju [12] o następującej postaci:

$$(3.30) \quad [\Phi_2(\eta_2) + g(\eta_2)] \Phi_2'(\eta_2) = f_1(\eta_2) \Phi_2(\eta_2) + f_0(\eta_2),$$

gdzie

$$(3.31) \quad \begin{aligned} g(\eta_2) &= -\frac{1}{\mu} \eta_2 - d_0, \quad f_0(\eta_2) = -\frac{1}{\mu^2} \eta_2 - d_1, \quad f_1(\eta_2) = \frac{1}{\mu}, \\ d_0 &= -\frac{1-\mu^2}{A\mu^3} \frac{\eta_s}{\eta_0} + \frac{B}{A\mu}, \quad d_1 = \frac{B}{A\mu^2}, \\ A &= \frac{2\mu(1+c_0\mu)^2 + (1-\mu)(1-c_0)^2}{\eta_0\mu(1+c_0\mu)^2}, \\ B &= \frac{c_0(1-\mu^2)[2+c_0(\mu-1)]\eta_s}{\mu(1+c_0\mu)^2\eta_0}. \end{aligned}$$

Wprowadzając do (3.30) zamiast $\Phi_2(\eta_2)$ nową funkcję $v(\eta_2)$ wg wzoru

$$(3.32) \quad v(\eta_2) = \Phi_2(\eta_2) + g(\eta_2),$$

otrzymamy

$$\frac{d}{d\eta_2} \left(\frac{v^2}{2} \right) = \frac{d_0}{\mu} - d_1,$$

a stąd

$$(3.33) \quad v(\eta_2) = \pm \sqrt{2 \left(\frac{d_0}{\mu} - d_1 \right) \eta_2 + C}.$$

lub

$$(3.34) \quad \Phi_2(\eta_2) = \pm \sqrt{2 \left(\frac{d_0}{\mu} - d_1 \right) \eta_2 + C} + \frac{1}{\mu} \eta_2 + d_0.$$

Stałą całkowania C określamy z warunku ciągłości fali uderzeniowej, który ma postać

$$\Phi_1(\eta_1^*) = \Phi_2(\eta_1^*), \quad \eta_1^* = \frac{c_0}{c_0 - 1} \eta_s.$$

Podstawiając (3.34) do (3.35) mamy

$$(3.35) \quad C = \left[\left(1 - \frac{1}{\mu} \right) \eta_1^* - d_0 \right]^2 - 2 \left(\frac{d_0}{\mu} - d_1 \right) \eta_1^*.$$

Z interpretacji fizycznej problemu wynika, że w wyrażeniu (3.34) należy wziąć znak minus. Ostatecznie analityczna postać drugiego odcinka frontu fali uderzeniowej jest następująca:

$$(3.36) \quad \Phi_2(\eta_2) = \frac{1}{\mu} \eta_2 + d_0 - \sqrt{2 \left(\frac{d_0}{\mu} - d_1 \right) (\eta_2 - \eta_1^*) + \left(\frac{\mu - 1}{\mu} \eta_1^* - d_0 \right)^2}.$$

Parametry na froncie fali zgodnie z (3.29) wynoszą

$$(3.37) \quad P_{03}(\eta_2) = - \frac{(1 - \mu^2) \Phi_2'^2(\eta_2)}{1 - \mu^2 \Phi_2'^2(\eta_2)} \frac{\eta_s}{\eta_0},$$

$$V_{03}(\eta_2) = \frac{(1 - \mu^2) \Phi_2'(\eta_2)}{1 - \mu^2 \Phi_2'^2(\eta_2)} \frac{\eta_s}{\eta_0}.$$

Natomiast wewnątrz obszaru III wielkości P_3 i V_3 określamy za pomocą metody charakterystyk podobnie jak w obszarze II.

Obszar IV. Wewnątrz obszaru IV ze związków na charakterystykach otrzymujemy

$$(3.38) \quad P_4(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \left\{ P_{03}(\eta_2) + P_{04}(\eta_3) + \frac{1}{\mu} [V_{03}(\eta_2) - V_{04}(\eta_3)] \right\},$$

$$V_4(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \left\{ V_{03}(\eta_2) + V_{04}(\eta_3) + \mu [P_{03}(\eta_2) - P_{04}(\eta_3)] \right\}.$$

Podstawiając (3.37) i analogiczne wyrażenia na P_{04} i V_{04} do (3.38) i przyjmując $\xi = 0$ po przekształceniach mamy

$$(3.39) \quad \frac{2\mu}{1 - \mu^2} \frac{\eta_0}{\eta_s} Q(\eta) = \frac{\Phi_3'(\eta_3)}{1 - \mu \Phi_3'(\eta_3)} - \frac{\Phi_2'(\eta_2)}{1 + \mu \Phi_2'(\eta_2)},$$

gdzie

$$(3.40) \quad \eta_2 = \eta - \mu \Phi_2(\eta_2), \quad \eta_3 = \eta + \mu \Phi_3(\eta_3).$$

Różniczkując (3.40) względem η dostaniemy

$$(3.41) \quad \frac{d\eta_2}{d\eta} = \frac{1}{1 + \mu\Phi'_2(\eta_2)}, \quad \frac{d\eta_3}{d\eta} = \frac{1}{1 - \mu\Phi'_3(\eta_3)}.$$

Z drugiej strony

$$(3.42) \quad \begin{aligned} \frac{d\Phi_2(\eta_2)}{d\eta} &= \Phi'_2(\eta_2) \frac{d\eta_2}{d\eta} = \frac{\Phi'_2(\eta_2)}{1 + \mu\Phi'_2(\eta_2)}, \\ \frac{d\Phi_3(\eta_3)}{d\eta} &= \Phi'_3(\eta_3) \frac{d\eta_3}{d\eta} = \frac{\Phi'_3(\eta_3)}{1 - \mu\Phi'_3(\eta_3)}. \end{aligned}$$

Kojarząc wzory (3.39) i (3.42) otrzymamy

$$(3.43) \quad \frac{2\mu}{1 - \mu^2} \frac{\eta_0}{\eta_s} Q(\eta) = \frac{d\Phi_3(\eta_3)}{d\eta} - \frac{d\Phi_2(\eta_2)}{d\eta},$$

a po scałkowaniu

$$(3.44) \quad \frac{2\mu}{1 - \mu^2} \frac{\eta_0}{\eta_s} \int_{\eta_0}^{\eta} Q(\zeta) d\zeta = \Phi_3(\eta_3) - \Phi_2(\eta_2) - [\Phi_2(\eta_2^*) - \eta_1^*].$$

W ten sposób z równania (3.44) możemy określić położenie frontu fali uderzeniowej $\Phi_3(\eta_3)$ w chwili η_3 , jeśli znane jest położenie w chwili η_2 , tj. $\Phi_2(\eta_2)$. Ponieważ $\Phi_2(\eta_2)$ zostało określone [por. wzór (3.36)], przeto w sposób rekurencyjny (wychodząc z punktu ξ_1^* , η_1^* (rys. 3)) możemy punkt po punkcie określić następne segmenty fali uderzeniowej. Dalej z (3.43) i (3.42)₂ znajdujemy $\Phi'_3(\eta_3)$. Wprowadzając $\Phi'_3(\eta_3)$ do wzorów typu (3.37) otrzymujemy $P_{04}(\eta_3)$ i $V_{04}(\eta_3)$. Podstawiając z kolei $P_{03}(\eta_2)$ i $V_{03}(\eta_2)$ oraz $P_{04}(\eta_3)$ i $V_{04}(\eta_3)$ do (3.38) otrzymujemy wartości $P_4(\xi, \eta)$ i $V_4(\xi, \eta)$, przy czym

$$(3.45) \quad \begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2} [\Phi_2(\eta_2) + \Phi_3(\eta_3)] - \frac{\eta_3 - \eta_2}{2\mu}, \\ \eta &= \frac{\mu}{2} [\Phi_2(\eta_2) - \Phi_3(\eta_3)] + \frac{\eta_2 + \eta_3}{2}. \end{aligned}$$

Obszar V. Rozwiązanie konstruuje się tutaj podobnie jak w obszarze IV z tym zastrzeżeniem, że równania (3.43) i (3.44) przyjmują w tym przypadku postać

$$(3.46) \quad \begin{aligned} \frac{d\Phi_4(\eta_4)}{d\eta} &= \frac{d\Phi_3(\eta_3)}{d\eta}, \\ \frac{2\mu}{1 - \mu^2} \frac{\eta_0}{\eta_s} \int_{\eta_0}^{\eta} Q(\zeta) d\zeta &= \Phi_4(\eta_4) - \Phi_3(\eta_3) - [\Phi_2(\eta_2^*) - \eta_1^*]. \end{aligned}$$

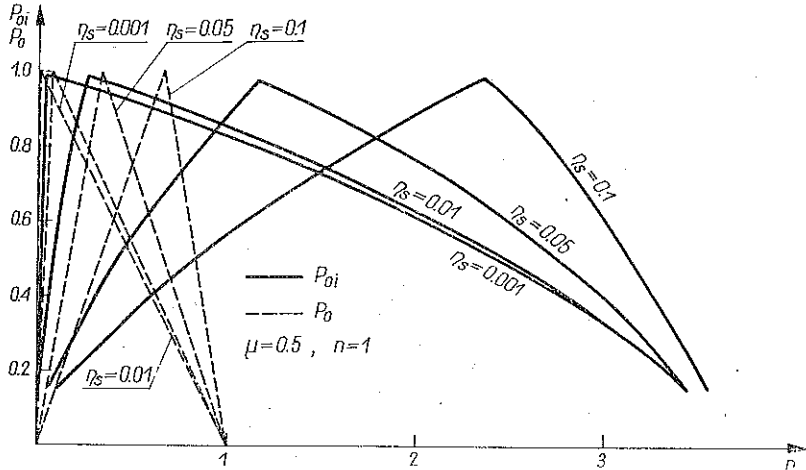
Algorytm obliczeń jest taki sam jak w obszarze IV.

4. PRZYKŁAD

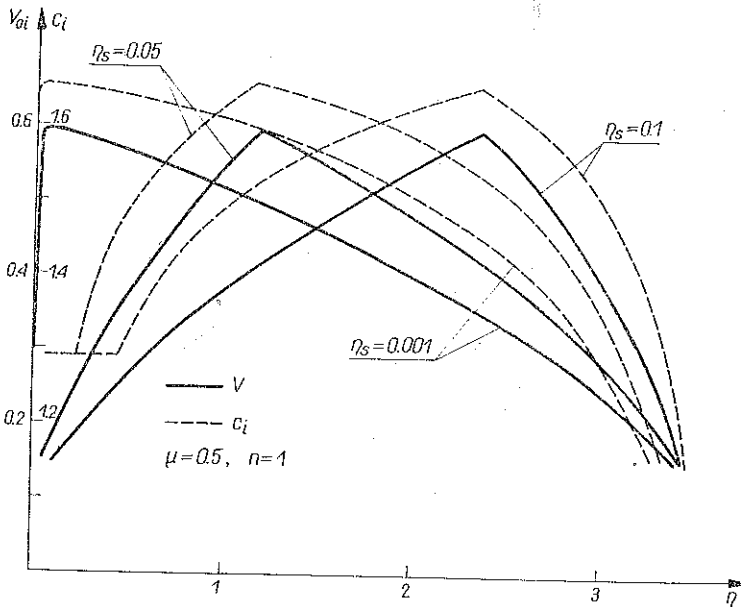
Wprowadzone w poprzednim punkcie wzory zaprogramowano na EMC i wykonano obliczenia liczbowe dla ciśnienia $Q(\eta)$ zmieniającego się następująco:

$$(4.1) \quad Q(\eta) = \left(1 - \frac{\eta - \eta_0}{1 - \eta_0}\right)^n, \quad \eta_0 \leq \eta \leq 1.$$

Wyniki obliczeń w formie wykresów zamieszczamy na rys. 4 i 5, na których pokazujemy zmianę parametrów na froncie fali dla różnych wartości współczynnika

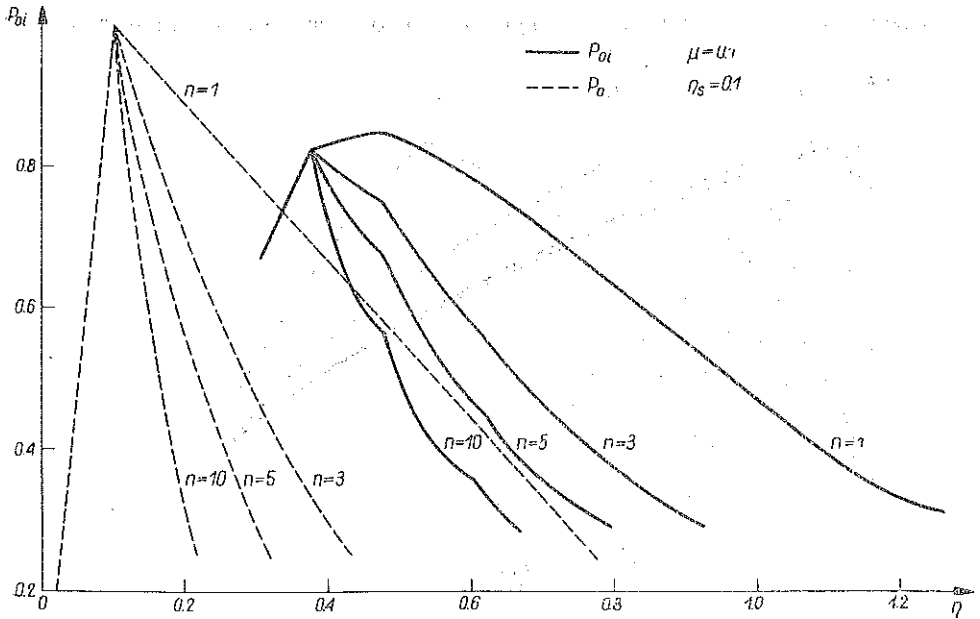


Rys. 4

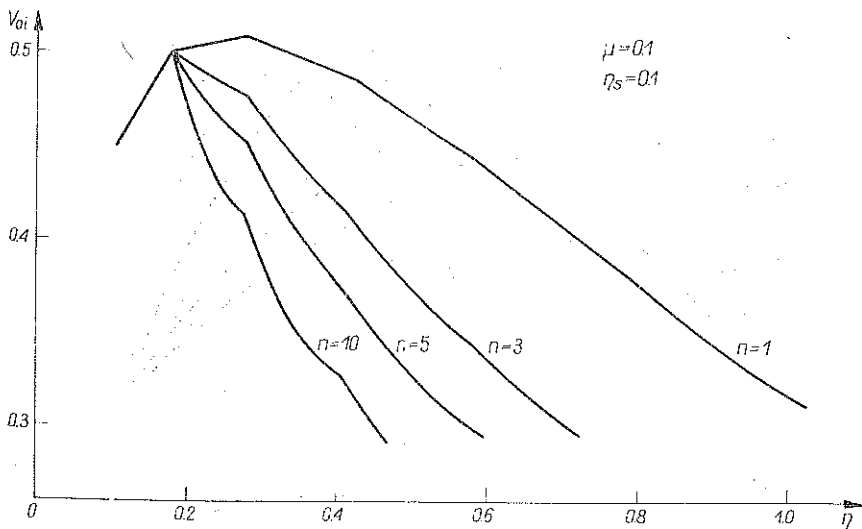


Rys. 5

η_s przy tej samej wartości impulsu ciśnienia działającego na powierzchnię pół-przestrzeni. W granicznym przypadku zmierzając z η_s do zera otrzymujemy rozwiązanie od obciążenia przyłożonego w sposób nagły. Z przytoczonych wyników widać, że głębokość przenikania maksymalnej wartości ciśnienia w ośrodek w sposób istotny zależy od intensywności narastania obciążenia. Im obciążenie wolniej narasta, tym głębiej przenika w ośrodek maksymalna wartość ciśnienia. Podobnie zachowują się pozostałe parametry problemu.

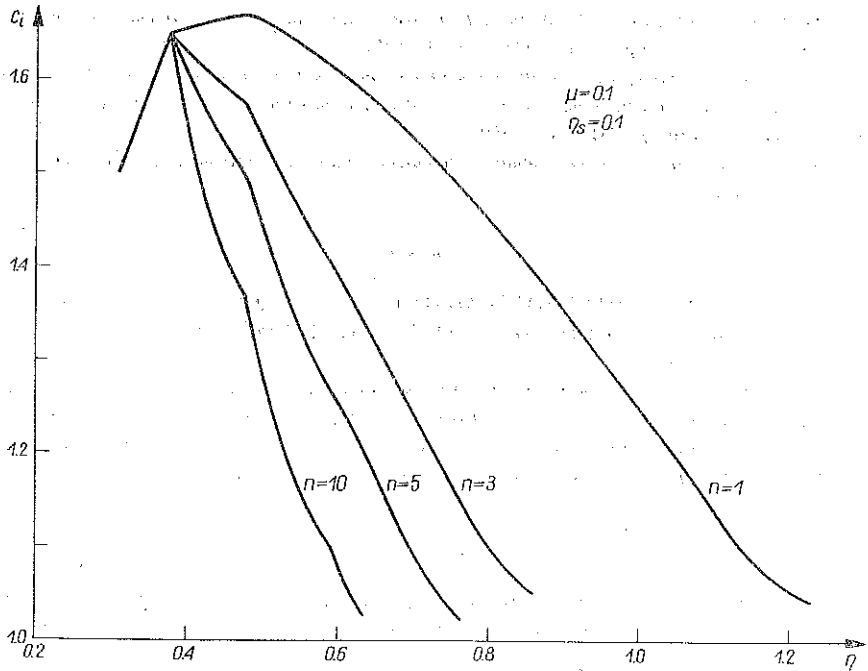


Rys. 6



Rys. 7

Na rysunkach 6–8 pokazano wpływ wykładnika n występującego we wzorze (4.1) na rozkład parametrów na froncie fali uderzeniowej. Ze wzrostem n następuje obniżenie maksymalnych wartości parametrów na froncie fali oraz zmniejszenie głębokości obciążenia w ośrodek.



Rys. 8

Reasumując należy stwierdzić, że zamknięte rozwiązanie problemu stopniowego formowania się frontu fali uderzeniowej w ośrodku biliniowym pozwoliło zbadać istotne różnice w polach naprężenia i prędkości przemieszczania w stosunku do pól generowanych przez obciążenia nagle przyłożone.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Я. Б. Зельдович и Ю. П. Райзер, *Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений*, Москва 1966.
2. Л. В. Альтшулер, *Применение ударных волн в физике высоких давлений*, Успехи физических наук, **85**, вып. 2, 1965.
3. В. П. Коробейников, Н. С. Мельникова, Е. В. Рязанов, *Теория точечного взрыва*, Москва 1961.
4. E. WŁODARCZYK, *Rozprzestrzenianie się i odbicie jednowymiarowej fali uderzeniowej w ośrodku stałym i fali przestrzennej w cieczy barotropowej*, Rozprawa doktorska, Warszawa 1965.
5. F. Szwalczyk, E. WŁODARCZYK, *A method of solving the problem of propagation of a non-stationary plane shock wave in an anelastic medium*, Proc. Vibr. Probl., **12**, 3, 1971.
6. X. A. Рахматулин, *О распространении плоских волн в упругой среде при нелинейной зависимости напряжения от деформации*, Ученые записки МГУ, вып. 152, 1961.

7. S. SUTCLIFFE, *Strong shock formation in bilinear hardening media*, J. Eng. Mech. Div. Am. Soc. Civil Engrs, **89**, EM2, part 1, 1963.
8. E. WŁODARCZYK, *A closed-form solution of the propagation problem of a unloading shock wave in bilinear elastic media*, Proc. Vibr. Probl., **13**, 3, 1973.
9. E. WŁODARCZYK, *The propagation of the plane shock wave of the loading in bilinear elastic rod*, Proc. Vibr. Probl., **13**, 4, 1974.
10. R. SKALAK, P. WEIDLINDER, *Attenuation of stress waves in bilinear materials*, J. Eng. Mech. Div., Am. Soc. Civil Engrs, **78**, EM3, part 1, 1961.
11. В. Л. Бидерман, *О распространении волн продольной деформации при нелинейной «жесткой», зависимости между напряжениями и деформациями*, В книге «Расчеты на прочность», вып. 6, Машгиз, Москва 1960.
12. Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Гос. Изд. Физ.-Мат. Лит., Москва 1961.

Резюме

О ФОРМИРОВАНИИ И РАСПРОСТРАНЕНИИ ПЛОСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В БИЛИНЕЙНОЙ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

В работе получено замкнутое решение задачи о формировании и распространении ударной волны напряжения в билинейной упруго-пластической среде. Выведены замкнутые формулы, описывающие форму фронта ударной волны. Показано, что поля напряжений и скоростей движения существенно зависят от способа нарастания внешней нагрузки.

SUMMARY

ON THE FORMATION AND PROPAGATION OF A PLANE SHOCK WAVE IN A BILINEAR ELASTIC-PLASTIC MEDIUM

In the paper is derived a closed form solution of the problem of formation and propagation of a stress shock wave in a bilinear elastic-plastic medium. Closed form formulae are given describing the form of the shock wave front. It is shown that the fields of stresses and displacement velocities substantially depend upon the manner in which the external load increases.

Praca została złożona w Redakcji dnia 23 marca 1972 r.