

## NAPRĘŻENIA W OTOCZENIU OBWIEDNI CHARAKTERYSTYK W STANIE GRANICZNYM OŚRODKA SYPKIEGO

JANINA OSTROWSKA i JAN RYCHLEWSKI (WARSZAWA)

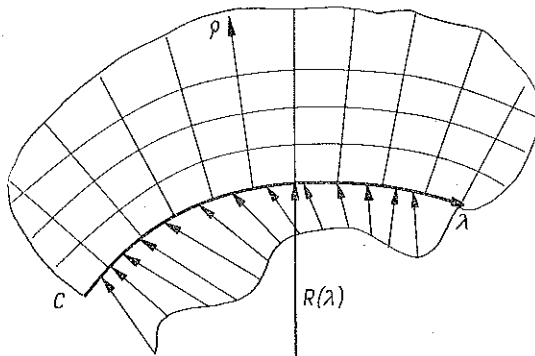
1. Możliwość występowania obwiedni charakterystyk w rozwiązaniach quasi-liniowego układu równań płaskiego płynięcia ciał idealnie plastycznych znana jest od czasu, gdy L. PRANDTL podał swe rozwiązanie dla warstwy [1]. W ostatnim okresie pojawiły się rozwiązania innych zadań, zawierające obwiednie, np. [2 i 3]. Stan naprężenia w otoczeniu obwiedni posiada osobliwości i był przedmiotem rozważań w pracach [4 i 5]. W pracy [4] wykryto główne wyrazy określające stan naprężenia, a w [5] podano metodykę poszukiwania dalszych wyrazów rozwinięć w szeregi.

W niniejszej pracy pokażemy, że metodę szeregów potęgowych użytą w artykule [6] można łatwo przystosować do opisu rozwiązania w otoczeniu obwiedni. Pozwoli ona na podanie prostych rekurencyjnych wzorów opisujących stan naprężenia w otoczeniu obwiedni charakterystyk danej przez swe równanie naturalne.

2. Niech  $C$  będzie krzywą określoną przez równanie naturalne

$$(2.1) \quad R = R(\lambda), \quad \lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_1, \quad R(\lambda) \neq 0,$$

gdzie  $R$  jest promieniem krzywizny,  $\lambda$  parametrem długości wzdłuż krzywej  $C$ . Przyjmujemy układ współrzędnych krzywoliniowych  $\lambda, \rho$  przedstawiony na rys. 1. Jest to tzw. «układ współrzędnych warstwy przyściennej»;  $\rho$  oznacza odległość punktu od krzywej  $C$ .



Rys 1.

Równania opisujące stan graniczny w ośrodku idealnie plastycznym izotropowym i jednorodnym dla procesów quasi-statycznych napiszemy w postaci równań równowagi:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \sigma_{\lambda\lambda, \lambda} + \left(1 + \frac{\rho}{R}\right) \sigma_{\lambda\rho, \rho} + \frac{2}{R} \sigma_{\lambda\rho} + F_{\lambda} \left(1 + \frac{\rho}{R}\right) &= 0, \\ \left(1 + \frac{\rho}{R}\right) \sigma_{\rho\rho, \rho} + \sigma_{\lambda\rho, \lambda} + \frac{1}{R} (\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\lambda\lambda}) + F_{\rho} \left(1 + \frac{\rho}{R}\right) &= 0 \end{aligned}$$

i warunku równowagi granicznej Coulomba-Mohra

$$(2.3) \quad (\sigma_{\lambda\lambda} - \sigma_{\rho\rho})^2 + 4\sigma_{\lambda\rho}^2 = [(\sigma_{\rho\rho} + \sigma_{\lambda\lambda}) \sin \varphi + 2k \cos \varphi]^2,$$

gdzie  $\sigma_{\lambda\lambda}$ ,  $\sigma_{\rho\rho}$  i  $\sigma_{\lambda\rho}$  są składowymi fizycznymi tensora naprężenia w układzie  $\lambda, \rho$ ;  $\varphi$  jest kątem tarcia wewnętrznego,  $k$  kohezją,  $F_{\lambda}$ ,  $F_{\rho}$  składowymi sił masowych.

Niech na  $C$  określone będą

$$(2.4) \quad \sigma_{\rho\rho}(\lambda, 0) = N_0(\lambda), \quad \sigma_{\lambda\rho}(\lambda, 0) = T_0(\lambda);$$

stąd

$$\sigma_{\lambda\lambda}(\lambda, 0) = N_0(1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi) + 2k \operatorname{tg} \varphi + 2\varepsilon \sqrt{(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) [(N_0 \operatorname{tg} \varphi + k)^2 - T_0^2]}, \quad \varepsilon \equiv \pm 1.$$

Wzór na  $\sigma_{\lambda\lambda}(\lambda, 0)$  możemy również napisać w postaci

$$(2.5) \quad \sigma_{\lambda\lambda}(\lambda, 0) = N_0(1 + 2\Phi^2) + 2k\Phi + 2\varepsilon \sqrt{(1 + \Phi^2) [(N_0\Phi + k)^2 - T_0^2]} \equiv S_0(\lambda, 0),$$

gdzie przyjęto oznaczenie

$$\Phi \equiv \operatorname{tg} \varphi, \quad \Phi = 0 \quad \text{dla} \quad \varphi = 0.$$

Korzystając z układu (2.2) i (2.3) otrzymujemy następujące wyrażenia na pierwsze pochodne na  $C$ :

$$(2.6) \quad \begin{aligned} [\sigma_{\lambda\rho, \rho}]_{\rho=0} &= - \left( S'_0 + 2 \frac{T_0}{R} + [F_{\lambda}]_{\rho=0} \right), \\ [\sigma_{\rho\rho, \rho}]_{\rho=0} &= - \left( T'_0 + \frac{1}{R} (N_0 - S_0) + [F_{\rho}]_{\rho=0} \right), \\ [\sigma_{\lambda\lambda, \rho}]_{\rho=0} &= - \frac{4(1 + \Phi^2) T_0}{S_0 - N_0 - 2\Phi(N_0\Phi + k)} [\sigma_{\lambda\rho, \rho}]_{\rho=0} + \\ &\quad + \frac{S_0 - N_0 + 2\Phi(S_0\Phi + k)}{S_0 - N_0 - 2\Phi(N_0\Phi + k)} [\sigma_{\rho\rho, \rho}]_{\rho=0}, \end{aligned}$$

gdzie przecinek oznacza różniczkowanie funkcji jednej zmiennej  $\lambda$ .

Jeśli  $|T_0| < N_0\Phi + k$ , to dane funkcje (2.4) i (2.5) formułują poprawnie postawiony problem Cauchy'ego dla układu (2.2), (2.3); jego rozwiązanie w postaci szeregów podano w pracy [7], a dla ośrodka idealnie spójnego w pracy [6].

Jeżeli  $|T_0| = N_0\Phi + k$ , to

$$(2.7) \quad \begin{aligned} S_0 &= N_0(1 + 2\Phi^2) + 2k\Phi, \\ \frac{S_0 - N_0 + 2\Phi(S_0\Phi + k)}{S_0 - N_0 - 2\Phi(N_0\Phi + k)} &= \frac{1}{1 - \Phi}, \\ S_0 - N_0 - 2\Phi(N_0\Phi + k) &= 0. \end{aligned}$$

Jeśli ponadto  $[\sigma_{\lambda\rho, \rho}]_{\rho=0} \equiv 0$ , to pochodna  $\sigma_{\lambda\lambda, \rho}$  na  $C$  jest nieokreślona, a sama linia  $C$  jest charakterystyką układu (2.2) i (2.3).

Przedmiotem naszego zainteresowania będzie przypadek

$$(2.8) \quad \begin{aligned} |T_0| &= N_0 \Phi + k, \\ [\sigma_{\lambda\rho, \rho}]_{\rho=0} &= -\left(S'_0 + \frac{2}{R} T_0 + [F_\lambda]_{\rho=0}\right) \neq 0. \end{aligned}$$

Przy tych założeniach  $\sigma_{\lambda\lambda, \rho} \equiv \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\sigma_{\lambda\lambda} - S_0}{\rho} = \infty$  i linia  $C$  jest obwiednią charakterystyk.

3. Ponieważ dla układu (2.2) i (2.3) szeregi potęgowe względem  $\rho$  na  $\sigma_{\lambda\lambda}$ ,  $\sigma_{\rho\rho}$  i  $\sigma_{\lambda\rho}$  w otoczeniu  $C$  nie istnieją, to zmienimy skalę «wielkości nieskończenie małych». Zakładamy, że istnieją takie liczby całkowite dodatnie  $p$ ,  $s$ ,  $n$  i  $t$ , że dla  $\eta \equiv \rho^{1/p}$  i dla każdego  $\lambda$  mamy

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\sigma_{\lambda\lambda} - S_0}{\eta^s} &= S(\lambda), \\ \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\sigma_{\rho\rho} - N_0}{\eta^n} &= N(\lambda), \\ \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\sigma_{\lambda\rho} - T_0}{\eta^t} &= T(\lambda), \end{aligned}$$

ozn. że

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \sigma_{\lambda\lambda} &= N_0 (1 + 2\Phi^2) + 2k\Phi + S(\lambda) \eta^s + o(\eta^s), \\ \sigma_{\rho\rho} &= N_0 + N(\lambda) \eta^n + o(\eta^n), \\ \sigma_{\lambda\rho} &= N_0 \Phi + k + T(\lambda) \eta^t + o(\eta^t). \end{aligned}$$

Poszukujemy zatem rozwiązania w klasie funkcji uogólnionych z osobliwościami potęgowymi [8].

Symbolem  $o(x)$  oznaczono, jak zwykle, funkcję od  $x$  mającą własność

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x} = 0.$$

Po zamianie  $\rho$  na  $\eta$  układ (2.2), (2.3) przyjmie postać

$$(3.3) \quad \begin{aligned} p\eta^{(p-1)} \sigma_{\lambda\lambda, \lambda} + \left(1 + \frac{\eta^p}{R}\right) \sigma_{\lambda\rho, \eta} + 2p\eta^{(p-1)} \frac{1}{R} \sigma_{\lambda\rho} + p\eta^{(p-1)} \left(1 + \frac{\eta^p}{R}\right) F_\lambda &= 0, \\ \left(1 + \frac{\eta^p}{R}\right) \sigma_{\rho\rho, \eta} + p\eta^{(p-1)} \frac{1}{R} (\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\lambda\lambda}) + p\eta^{(p-1)} \sigma_{\lambda\rho, \lambda} + p\eta^{(p-1)} \left(1 + \frac{\eta^p}{R}\right) F_\rho &= 0, \\ [(\sigma_{\lambda\lambda} - \sigma_{\rho\rho})^2 + 4\sigma_{\lambda\rho}^2] (1 + \Phi^2) &= [(\sigma_{\rho\rho} + \sigma_{\lambda\lambda}) \Phi + 2k]^2. \end{aligned}$$

Zakładamy, że składowe wektora sił masowych są funkcjami analitycznymi zmiennej  $\eta$ , tzn.

$$(3.4) \quad F_\lambda = \sum_{i=0}^{\infty} F_\lambda^{(i)} \eta^i, \quad F_\rho = \sum_{i=0}^{\infty} F_\rho^{(i)} \eta^i.$$

Po podstawieniu (3.2) i (3.4) do (3.3) otrzymamy

$$(3.5) \quad \begin{aligned} & p\eta^{(p-1)} \left[ (1+2\Phi^2) N'_0 + \frac{2}{R} (N_0 \Phi + k) + F'_\lambda^{(0)} \right] + T\eta^{t-1} + o(\eta^{p-1}) = 0, \\ & Nn\eta^{(n-1)} - \frac{1}{R} Sp\eta^{(s+p-1)} + pT'\eta^{(p+t-1)} + pF'_\rho^{(s)} \eta^{(p+s-1)} + o(\eta^{n-1}) = 0, \\ & [(S\eta^s - N\eta^n)^2 + 8T_0 T\eta^t] (1+\Phi^2) - (S\eta^s + N\eta^n)^2 \Phi^2 + o(\eta^t) = 0. \end{aligned}$$

Założyliśmy, że  $S, T$  i  $N$  są różne od zera. Dzieląc pierwsze równanie przez  $\eta^{(p-1)}$  i przechodząc do granicy  $\eta \rightarrow 0$  otrzymujemy  $t=p$  oraz

$$(3.6) \quad T = - \left[ (1+2\Phi^2) N'_0 + \frac{2}{R} (N_0 \Phi + k) + F'_\lambda^{(0)} \right].$$

Podobnie otrzymujemy

$$S = 1/2p, \quad n = 3/2p$$

i odpowiednio

$$(3.7) \quad \begin{aligned} S^2 &= -8 (N_0 \Phi + k) (1+\Phi^2) T, \\ N &= \frac{2}{3R} S - \frac{2}{3} F'_\rho^{(s)}. \end{aligned}$$

Ponieważ  $S^2 \geq 0$ , przeto  $T < 0$  i  $(1+2\Phi^2) N'_0 + \frac{2}{R} (N_0 \Phi + k) + F'_\lambda^{(0)} > 0$ , tzn., że krzywizny  $N_0$  i  $N'_0$  są od siebie zależne na  $C$ .

Po podstawieniu wielkości (3.6), (3.7) do (3.2) otrzymujemy

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \sigma_{\lambda\lambda} &= N_0 (1+2\Phi^2) + 2k\Phi + 2\varepsilon [2(1+\Phi^2) (N_0 \Phi + k)]^{1/2} \times \\ & \quad \times \left[ (1+2\Phi^2) N'_0 + \frac{2}{R} (N_0 \Phi + k) + F'_\lambda^{(0)} \right]^{1/2} \rho^{1/2} + o(\rho^{1/2}), \quad \varepsilon \equiv \pm 1, \\ \sigma_{\rho\rho} &= N_0 + \frac{4\varepsilon}{3R} [2(1+\Phi^2) (N_0 \Phi + k)]^{1/2} \left[ (1+2\Phi^2) N'_0 + \right. \\ & \quad \left. + \frac{2}{R} (N_0 \Phi + k) + F'_\lambda^{(0)} \right]^{1/2} \rho^{3/2} - \frac{2}{3} F'_\rho^{(s)} \rho^{3/2} + o(\rho^{3/2}), \\ \sigma_{\lambda\rho} &= N_0 \Phi + k - \left[ (1+2\Phi^2) N'_0 + \frac{2}{R} (N_0 \Phi + k) + F'_\lambda^{(0)} \right] \rho + o(\rho), \end{aligned}$$

co jest zgodne z wynikami prac [4 i 5] w przypadku  $\Phi=0$  i  $F_\lambda = F_\rho \equiv 0$ . Wyrażenia (3.8) można uważać za całki przybliżone w cienkiej warstwie otaczającej obwiednię.

4. Napiszmy rozwiązanie układu (2.2) i (2.3) w postaci

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \sigma_{\lambda\lambda} &= S_0(\lambda) + \sum_{i=1}^{\infty} S_i(\lambda) \eta^i, \\ \sigma_{\rho\rho} &= N_0(\lambda) + \sum_{i=1}^{\infty} N_i(\lambda) \eta^i, \\ \sigma_{\lambda\rho} &= T_0(\lambda) + \sum_{i=1}^{\infty} T_i(\lambda) \eta^i, \end{aligned}$$

gdzie  $\eta = \rho^{1/p}$ .

Jeśli podstawową nieskończenie małą ma być  $\eta = \rho^{1/p}$ , to wobec całkowitości  $s, n$  i  $t$  liczba  $p$  musi być parzysta,  $p = 2l, l = 1, 2, \dots$ . Stąd  $s = l, n = 3l, t = 2l$ . Na podstawie (3.8) dla każdego  $l$  mamy

$$(4.2) \quad \begin{aligned} S_v &= 0, & \text{jeśli } v < l, \\ N_v &= 0, & \text{jeśli } v < 3l, \\ T_v &= 0, & \text{jeśli } v < 2l. \end{aligned}$$

Po podstawieniu (4.1) do (2.2) i (2.3) otrzymujemy

$$(4.3) \quad \begin{aligned} & 2l \eta^{(2l-1)} \left( S'_0 + \sum_{i=1}^{\infty} S'_i \eta^i \right) + \left( 1 + \frac{\eta^{2l}}{R} \right) \sum_{i=1}^{\infty} T_i \eta^{i-1} + 2 \cdot 2l \frac{\eta^{(2l-1)}}{R} \times \\ & \quad \times \left( T_0 + \sum_{i=1}^{\infty} T_i \eta^i \right) + 2 l \eta^{(2l-1)} \left( 1 + \frac{\eta^{2l}}{R} \right) F_\lambda = 0, \\ & \left( 1 + \frac{\eta^{2l}}{R} \sum_{i=1}^{\infty} \right) N_i \eta^{i-1} + 2 l \eta^{(2l-1)} \frac{1}{R} \left[ N_0 - S_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (N_i - S_i) \eta^i \right] + \\ & \quad + 2 l \eta^{(2l-1)} \left( T'_0 + \sum_{i=1}^{\infty} T'_i \eta^i \right) + 2 l \eta^{(2l-1)} \left( 1 + \frac{\eta^{2l}}{R} \right) F_\rho = 0, \\ & \left\{ \left[ N_0 - S_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (N_i - S_i) \eta^i \right]^2 + 4 \left( T_0 + \sum_{i=1}^{\infty} T_i \eta^i \right)^2 \right\} (1 + \Phi^2) = \\ & \quad = \left\{ \left[ N_0 + S_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (N_i + S_i) \eta^i \right] \Phi + 2k \right\}^2. \end{aligned}$$

Z powyższych równań po wykorzystaniu (3.4) wynikają następujące wzory rekurencyjne:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} T_v &= -\frac{1}{v} \left( (2l S'_{v-2l} + \frac{v+2l}{R} T_{v-2l} + 2l F_\lambda^{(v-2l)}) \right), \quad 2l+1 \leq v < 4l, \\ T_v &= -\frac{1}{v} \left( (2l S'_{v-2l} + \frac{v+2l}{R} T_{v-2l} + 2l F_\lambda^{(v-2l)} + \frac{2l}{R} F_\lambda^{(v-4l)}) \right), \quad v \geq 4l, \\ N_v &= -\frac{1}{v} \left( \frac{v}{R} N_{v-2l} - \frac{2l}{R} S_{v-2l} + 2l T'_{v-2l} + 2l F_\rho^{(v-2l)} \right), \quad 3l+1 \leq v < 4l, \\ N_v &= -\frac{1}{v} \left( \frac{v}{R} N_{v-2l} - \frac{2l}{R} S_{v-2l} + 2l T'_{v-2l} + 2l F_\rho^{(v-2l)} + \frac{2l}{R} F_\rho^{(v-4l)} \right), \quad v \geq 4l, \\ S_v &= N_v (1 + 2 \Phi^2) - \frac{1}{2S_l} \left\{ \sum_{m=l+1}^{v-1} [(N_m - S_m) (N_{v+l-m} - S_{v+l-m}) (1 + \Phi^2) - \right. \\ & \quad \left. - \Phi^2 (N_m + S_m) (N_{v+l-m} + S_{v+l-m})] + 4 \sum_{m=2l}^{v-l} T_m T_{v+l-m} (1 + \Phi^2) + \right. \\ & \quad \left. + 8 (N_0 \Phi + k) T_{v+l} (1 + \Phi^2) + 2N_{v+l} [N_0 - S_0 (1 + 2\Phi^2) - 2k\Phi] \right\}, \quad v \geq l+1. \end{aligned}$$

Dla ośrodka idealnie spójnego bez sił masowych wzory rekurencyjne (4.4) mają postać

$$\begin{aligned}
 T_v &= -\frac{1}{v} \left( 2l S'_{v-2l} + \frac{v+2l}{R} T_{v-2l} \right), \quad v \geq 2l+1, \\
 N_v &= -\frac{1}{v} \left( \frac{v}{R} N_{v-2l} - \frac{2l}{R} S_{v-2l} + 2l T'_{v-2l} \right), \quad v \geq 3l+1, \\
 S_v &= N_v - \frac{1}{2S_l} \left\{ \sum_{m=l+1}^{v-1} (N_m - S_m) (N_{v+l-m} - S_{v+l-m}) + \right. \\
 &\quad \left. + 4 \sum_{m=2l}^{v-1} T_m T_{v+l-m} + 8k T_{v+l} \right\}, \quad v \geq l+1.
 \end{aligned}
 \tag{4.5}$$

Wykażemy, że różne od zera są tylko te  $S_i, N_i$  i  $T_i$ , których numer  $i$  jest wielokrotnością  $l$ . Będzie to oznaczać, że wartość  $l$  jest bez znaczenia.

Pierwsze różne od zera funkcje

$$\begin{aligned}
 T_{2l} &= - \left[ N'_0 (1+2\Phi^2) + \frac{2}{R} (N_0 \Phi + k) + F_\lambda^{(0)} \right], \\
 S_l &= [-8(N_0 \Phi + k) (1+\Phi^2) T_{2l}]^{1/2}, \\
 N_{3l} &= \frac{2}{3} \left( \frac{1}{R} S_l - F_\rho^{(0)} \right)
 \end{aligned}
 \tag{4.6}$$

są zgodne z powyższym stwierdzeniem. Wystarczy teraz wykazać, że dla każdego  $n$  nie będącego wielokrotnością  $l$  funkcje  $T_{2l+n}, S_{l+n}, N_{3l+n}$  są równe zeru, gdy są równe zeru wszystkie funkcje  $T_{2l+r}, S_{l+r}, N_{3l+r}$ , gdzie  $r$  jest mniejsze od  $n$  i nie jest wielokrotnością  $l$ .

Na podstawie (4.4) mamy

$$T_{2l+n}=0, \quad S_{l+n}=0, \quad N_{3l+n}=0,$$

co pozwala przyjąć dalej  $l=1$ .

Ostateczny wynik naszych rozważań brzmi następująco: stan naprężenia w ośrodku, będącym w stanie granicznym, w otoczeniu obwiedni  $C$  o równaniu naturalnym  $R=R(\lambda)$  można określić następującymi wyrażeniami:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\lambda\lambda} &= N_0 (1+2\Phi^2) + 2k\Phi + \sum_{i=1}^{\infty} S_i \rho^{i/2}, \\
 \sigma_{\rho\rho} &= N_0 + \sum_{i=3}^{\infty} N_i \rho^{i/2}, \quad \sigma_{\lambda\rho} = N_0 \Phi + k + \sum_{i=2}^{\infty} T_i \rho^{i/2},
 \end{aligned}
 \tag{4.7}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 T_2 &= - \left[ N'_0 (1+2\Phi^2) + \frac{2}{R} (N_0 \Phi + k) + F_\lambda^0 \right], \\
 S_1 &= [-8(N_0 \Phi + k) T_2]^{1/2}, \\
 N_3 &= \frac{2}{3} \left( \frac{1}{R} S_1 - F_\rho^1 \right)
 \end{aligned}
 \tag{4.8}$$

oraz gdzie

$$\begin{aligned}
 T_3 &= -\frac{1}{3} (2S'_1 + 2F_\lambda^{(1)}), \\
 T_i &= -\frac{1}{i} \left( 2S'_{i-2} + \frac{i+2}{R} T_{i-2} + 2F_\lambda^{(i-2)} + \frac{2}{R} F^{(i-4)} \right), \quad i \geq 4, \\
 N_i &= -\frac{1}{i} \left( \frac{i}{R} N_{i-2} - \frac{2}{R} S_{i-2} + 2T'_{i-2} + 2F_\rho^{(i-2)} + \frac{2}{R} F_\rho^{(i-4)} \right), \quad i \geq 4, \\
 S_i &= N_i (1 + 2\Phi^2) - \frac{1}{2S_1} \left\{ 8(N_0 \Phi + k) (1 + \Phi^2) (T_{i+1} - \Phi N_{i+1}) + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{m=2}^{i-1} [(N_m - S_m) (N_{i+1-m} - S_{i+1-m}) (1 + \Phi^2) - (N_m + S_m) (N_{i+1-m} + \right. \\
 &\quad \left. + S_{i+1-m}) \Phi^2 + 4T_m T_{i+1-m} (1 + \Phi^2)] \right\}, \quad i \geq 2.
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

Możliwość jednoznacznego określenia współczynników rozwinięcia stanu naprężenia w szeregi potęgowe względem  $\eta = \rho^{1/2}$  świadczy o poprawności postawionego problemu brzegowego.

Dla ośrodka idealnie spójnego bez sił masowych wzory rekurencyjne (4.8) i (4.9) znacznie się upraszczają i przyjmują postać

$$T_2 = -\left(N'_0 + \frac{2k}{R}\right), \quad S_1 = (-8kT_2)^{1/2}, \quad N_3 = \frac{2}{3R} S_1
 \tag{4.10}$$

oraz

$$\begin{aligned}
 T_i &= -\frac{1}{i} \left( 2S'_{i-2} + \frac{i+2}{R} T_{i-2} \right), \quad \text{jeśli } i \geq 3, \\
 N_i &= -\frac{1}{i} \left( \frac{i}{R} N_{i-2} - \frac{2}{R} S_{i-2} + 2T'_{i-2} \right), \quad \text{jeśli } i \geq 4, \\
 S_i &= -\frac{1}{2S_1} \left\{ \sum_{m=2}^{i-1} [(N_m - S_m) (N_{i+1-m} - S_{i+1-m}) + 4T_m T_{i+1-m}] + \right. \\
 &\quad \left. + 8kT_{i+1} \right\} + N_i, \quad \text{jeśli } i \geq 2.
 \end{aligned}
 \tag{4.11}$$

Promień zbieżności podanych szeregów, będący funkcją  $\lambda$ , wymaga oddzielnego zbadania.

5. Podamy dwa przykłady ilustrujące otrzymane wyniki.

a) Niech obwódka  $C$  jest linią prostą, tzn.  $1/R(\lambda) = 0$ , wówczas dla ośrodka idealnie spójnego bez sił masowych ze wzorów (4.10) i (4.11) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 T_i &= -\frac{2}{i} S'_{i-2}, \quad i \geq 3, \quad N_i = -\frac{4}{i(i-2)} S'_{i-4}, \quad i \geq 4, \\
 S_i &= -\frac{1}{2S_1} \left\{ \sum_{m=2}^{i-1} \left[ \left( S_m - \frac{4}{m(m-2)} S'_{m-4} \right) \left( S_{i-m+1} - \frac{4}{(i-m)^2 - 1} S'_{i-m-3} \right) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{16}{m(i-m+1)} S'_{m-2} S'_{i-m-1} \right] - \frac{16k}{i+1} S'_{i-1} \right\} + \frac{4}{i(i-2)} S'_{i-4}, \quad i \geq 2.
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

Rozpatrzmy najprostszy przypadek, gdy

$$N_0 = \frac{k}{h} \lambda + c, \quad N'_0 \neq 0, \quad h, c = \text{const.}$$

Na podstawie (4.10) mamy

$$T_2 = -\frac{k}{h}, \quad S_1 = 4k \left( \frac{1}{2h} \right)^{1/2}, \quad N_3 = 0,$$

a ze wzorów (5.1) wynika, że

$$T_m = N_m = 0, \quad \text{jeśli } m \geq 3, \quad S_{2l} = 0, \quad \text{jeśli } l = 1, 2, \dots$$

oraz

$$S_i = -\frac{1}{2S_1} \sum_{m=2}^{i-1} S_m S_{i+1-m}, \quad i = 5, 7, 9.$$

Składowe tensora naprężenia dla rozpatrywanego przypadku mają postać

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \sigma_{\rho\rho} &= \frac{k}{h} \lambda + c, & \sigma_{\lambda\rho} &= k - \frac{k}{h} \rho, \\ \sigma_{\lambda\lambda} &= \frac{k}{h} \lambda + c + 4k \left( \frac{1}{2h} \right)^{1/2} \rho^{1/2} - 3k \left( \frac{1}{2h} \right)^{3/2} \rho^{3/2} - \frac{1}{2} k \left( \frac{1}{2h} \right)^{5/2} \rho^{5/2} + \dots \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy w ten sposób rozwinięcie ścisłego rozwiązania L. PRANDTLA dla warstwy [1].

b) W przypadku, gdy obwiednia charakterystyk jest łukiem okręgu o promieniu  $a$ , tzn. gdy  $1/R(\lambda) = 1/a = \text{const}$ , z (4.10) mamy

$$T_2 = -\left( N'_0 + \frac{2k}{a} \right).$$

Jeśli ponadto przyjmiemy, że  $N_0 = A\lambda + B$ ,  $A, B = \text{const}$ , to na podstawie (4.10)

$$(5.3) \quad \begin{aligned} T_2 &= -\left( A + \frac{2k}{a} \right) = \text{const}, & S_1 &= 2 \left[ 2k \left( A + \frac{2k}{a} \right) \right]^{1/2} = \text{const}, \\ N_3 &= \frac{4}{3a} \left[ 2k \left( A + \frac{2k}{a} \right) \right]^{1/2} = \text{const}, \end{aligned}$$

a ze wzorów (4.11) wynika, że

$$T_{2v+1} = N_{2v} = S_{2v} = 0 \quad \text{dla } v = 1, 2, \dots$$

oraz

$$(5.4) \quad \begin{aligned} T_{2v} &= (-1)^{v+1} \frac{v+1}{2a^{v-1}} T_2, \\ N_{2v+1} &= 2 \sum_{l=1}^v \frac{(-1)^{v-l}}{(2l+1) a^{v-l+1}} S_{2l-1} \quad \text{dla } v = 1, 2, \dots, \\ S_{2v+1} &= -\frac{1}{2S_1} \left\{ \sum_{m=1}^{v-1} [(N_{2m+1} - S_{2m+1})(N_{2v-2m+1} - S_{2v-2m+1}) + \right. \\ &\quad \left. + 4T_{2m} T_{2v-2m+2}] + 4T_{2v} T_2 + 8kT_{2v+2} \right\} + N_{2v+1}. \end{aligned}$$



Стан напярэжэння в оточеніи обвiederнi ма постаць:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\lambda\rho} &= k - \left(N'_0 + \frac{2k}{a}\right) \frac{a}{2} \left[ 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{\rho}{a}\right)^2} \right], \\
 \sigma_{\lambda\lambda} &= A\lambda + B + 2 \left[ 2k \left(A + \frac{2k}{a}\right) \right]^{1/2} \rho^{1/2} + \\
 (5.5) \qquad & \qquad \qquad + \frac{1}{2k} \left(A + \frac{7k}{3a}\right) \left[ 2k \left(A + \frac{2k}{a}\right) \right]^{1/2} \rho^{3/2} + \dots, \\
 \sigma_{\rho\rho} &= A\lambda + B + \frac{4}{3a} \left[ 2k \left(A + \frac{2k}{a}\right) \right]^{1/2} \rho^{3/2} + \\
 & \qquad \qquad \qquad + \frac{1}{5ak} \left(A + \frac{12k}{a}\right) \left[ 2k \left(A + \frac{2k}{a}\right) \right]^{1/2} \rho^{5/2} + \dots
 \end{aligned}$$

6. Опieraјaц сe на подaных wzorach rekurencyjnych moжа wyznaczyц stan напярэжэння в dowolным punkcie znajduјaceго сe в стане рoвнoвaги граничной oсрoдка сыпкiero. Jednakże otrzymane rozwiązanie jest użyteczne гoлoвнe в przy-padku, gdy interesuje нас stosunkowo cienka warstwa в оточеніи обвiederнi.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. L. PRANDTL, *Anwendungsbeispiele zu einem Henckyschen Satz das Plastische, Gleichewicht*, ZAMM, 3, 401 – 406, 1923.
2. Г. И. Бьковцев, *О вoлoчении полосы через криволинейную матрицу в условиях плоской деформации*, Изв. АН. СССР ОТН, Механика и машиностроение, 1, 1962.
3. J. OSTROWSKA, *Solution of indentation problem with envelope of slip lines*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sériе Sci. Techn., 15, 10, 1967.
4. В. В. Соколовский, *Об уравнениях пластического течения в пограничном слое*, ПИММ, 20, 3, 1956.
5. О. А. Монастырский, *О пластическом течении в тонком слое*, Изв. АН. СССР, ОТН, 6, 1958.
6. S. KOMLJENOVIC, J. RYCHLEWSKI, *The Cauchy problem for the case of plane plastic strain solved with the use of power series*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sériе Sci. Techn., 11, 8, 1963.
7. J. OSTROWSKA, *A series-method for constructing a stress field in the limit state of granular media*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sériе Sci. Techn., 19, 7 – 8, 1971.
8. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними*, вып. 1, Москва 1958.

Резюме

НАПРЯЖЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ОГИБАЮЩЕЙ ХАРАКТЕРИСТИК  
В ПРЕДЕЛЬНОМ СОСТОЯНИИ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ

Рассмотрена сыпучая среда в состоянии предельного равновесия. Для описания напряженного состояния в окрестности огибающей характеристик, заданной натуральным уравнением, использован метод бесконечных степенных рядов относительно расстояния от края.

Изменение масштаба бесконечно малых величин позволило получить по этому методу простые рекуррентные формулы для функциональных коэффициентов разложения напряженного состояния в степенные ряды.

Для среды с идеальным сцеплением рассмотрены два частных случая краевых условий: заданные на прямолинейном краю и на секторе круга.

#### SUMMARY

### STRESSES IN THE VICINITY OF CHARACTERISTICS ENVELOPE OF GRANULAR MEDIUM IN A LIMIT STATE

The limit state of equilibrium of a granular medium is considered in the paper. In order to describe the state of stress in the neighbourhood of the characteristics envelope defined by its natural equations, the method of infinite power series with respect to the distance from the boundary is used. After changing the scale of infinitesimal magnitudes, the method makes it possible to derive simple recurrent formulae for the functional coefficients of the power series expansion of the state of stress.

Two particular cases of perfectly cohesive media are presented, concerning a rectilinear and a circular arc boundary.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI  
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

*Praca została złożona w Redakcji dnia 2 marca 1972 r.*