

STATECZNOŚĆ OTWARTEJ TRÓJWARSTWOWEJ POWŁOKI WALCOWEJ DYNAMICZNIE ŚCISKANEJ

WACŁAW SZYC (POZNAŃ)

WSTĘP

Problemy stateczności sprężystej trójwarstwowych powłok walcowych poruszane były przez licznych autorów w szeregu prac publikowanych przede wszystkim w literaturze radzieckiej i amerykańskiej. Wszechstronne omówienie zagadnień stateczności dla takich powłok zawarte jest w pracy E. I. GRIGOLUKA i P. P. CZULKOWA [1] na podstawie teorii liniowej. Wśród geometrycznie nieliniowych problemów stateczności, rozwiązywanych głównie w celu zbadania zjawiska utraty stateczności i stanów zakrytycznych, można wymienić na przykład pracę R. J. SYLVESTERA [2]. Rozwiązania te przyjmowały jednak statyczne działanie obciążenia.

Praca niniejsza ma na celu rozwiązanie zagadnienia wyboczenia ściskanej otwartej trójwarstwowej powłoki walcowej przy założeniu, że obciążenie wzrasta szybko w czasie. Prędkość deformacji powłoki jest przy tym na tyle duża, iż energia kinetyczna układu zaczyna odgrywać rolę w ogólnym bilansie energetycznym. Zagadnienia tego rodzaju były rozwiązywane dla powłok jednowarstwowych np. przez W. W. BOLOTINA i G. A. BOJCZENKĘ [3], brak natomiast podobnych rozwiązań w dziedzinie powłok wielowarstwowych.

Głównym celem niniejszej pracy jest przede wszystkim próba uchwycenia wpływu szeregu parametrów fizycznych i geometrycznych powłoki na przebieg dynamicznego wyboczenia

1. ZAŁOŻENIA I PODSTAWOWE ZWIĄZKI

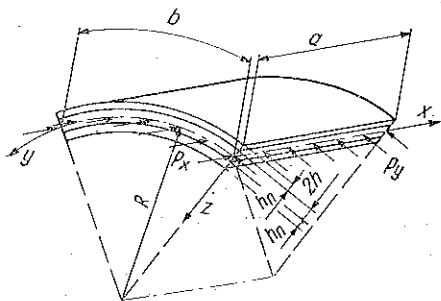
Rozpatrywana otwarta powłoka walcowa (rys. 1) składa się z dwu cienkich warstw nośnych (dolnej i górnej) o jednakowej grubości h_n i jednakowych izotropowych własnościach sprężystych. Między nimi znajduje się warstwa środkowa (wypełniająca) o grubości $2h$ i mniejszym module sprężystości.

Dla warstw nośnych przyjmuje się hipotezę Kirchhoffa-Love'a (prostej normalnej). Dla warstwy wypełniającej przyjmuje się hipotezę o nieściśliwości w kierunku poprzecznym oraz zakłada się, że odkształcenia poprzecznego ścinania rozkładają się liniowo na grubości wypełniacza. Jest to równoznaczne [1] z przyjęciem hipotezy linii łamanej. Przyjmiemy ponadto następujące założenia:

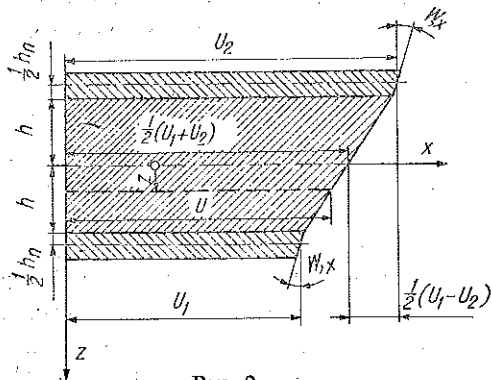
1) powłoka jest mało wyniosła, a promienie krzywizn poszczególnych warstw można uznać za jednakowe i równe promieniowi krzywizny powierzchni środkowej powłoki R ;

2) brzegi powłoki są swobodnie podparte;

3) powłoka obciążona jest na brzegach zmiennymi w czasie i równomiernie rozłożonymi siłami ściskającymi p_x i p_y , skierowanymi prostopadle do brzegów, przy czym siła ciąga p_x działa na brzegi krzywoliniowe powłoki w kierunku tworzącej, a siła p_y działa na brzegi prostoliniowe w kierunku obwodowym.



Rys. 1



Rys. 2

Zgodnie z hipotezą linii łamanej przemieszczenia u, v, w w kierunkach osi x, y, z określić można dla poszczególnych warstw za pomocą przemieszczeń punktów powierzchni środkowych warstw nośnych u_i, v_i, w_i (przy czym $i=1$ dla warstwy dolnej, $i=2$ dla warstwy górnej (rys. 2)) w następujący sposób:

dla warstw nośnych (dolnej i górnej)

$$(1.1) \quad \begin{aligned} u &= u_i - \left(z \mp h \mp \frac{1}{2} h_n \right) w_{i,x}, \\ v &= v_i - \left(z \mp h \mp \frac{1}{2} h_n \right) w_{i,y}, \\ w &= w_i, \end{aligned} \quad i=1, 2,$$

dla warstwy środkowej

$$(1.2) \quad \begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \left[u_1 + u_2 + \frac{z}{h} (u_1 - u_2 + h_n w_{1,x}) \right], \\ v &= \frac{1}{2} \left[v_1 + v_2 + \frac{z}{h} (v_1 - v_2 + h_n w_{1,y}) \right], \\ w &= w_1 = w_2. \end{aligned}$$

Do określenia odkształceń powłoki przy dużych ugięciach posłużą znane następujące związki geometryczne:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \varepsilon_x &= u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2, & \varepsilon_y &= v_{,y} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} w_{,y}^2, \\ \gamma_{xy} &= v_{,x} + u_{,y} - w_{,x} w_{,y}, & \gamma_{yz} &= v_{,z} + w_{,y}, \\ \gamma_{xz} &= u_{,z} + w_{,x}, \end{aligned}$$

gdzie ε i γ są wydłużeniem względnym i kątem odkształcenia postaciowego w odpowiednim kierunku lub płaszczyźnie.

2. ZASADA HAMILTONA. RÓWNANIA RUCHU

Do wyprowadzenia równań różniczkowych ruchu elementu walcowej powłoki trójwarstwowej zastosujemy zasadę wariacyjną Hamiltona. Zasadę tę w zastosowaniu do układów zachowawczych wyraża równanie

$$(2.1) \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} (K - \pi) dt = 0,$$

gdzie K oznacza energię kinetyczną, a π potencjalną układu, t_0, t_1 stanowią granice dowolnego przedziału czasowego. Energię potencjalną można przedstawić za pomocą różnicy

$$(2.2) \quad \pi = U - A,$$

gdzie U jest energią potencjalną wewnętrznych sił sprężystości, A oznacza pracę sił zewnętrznych (obciążenia powierzchniowego). Równanie (2.1) można więc napisać w postaci

$$(2.3) \quad \int_{t_0}^{t_1} \delta(K - U) dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta A dt = 0.$$

Energię potencjalną wewnętrznych sił sprężystości traktuje się jako sumę energii poszczególnych warstw powłoki trójwarstwowej:

$$(2.4) \quad U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_{V_i} [\sigma_{xi} \epsilon_{xi} + \sigma_{yi} \epsilon_{yi} + \tau_{xyi} \gamma_{xyi} + (\tau_{xzi} \gamma_{xzi} + \tau_{yzi} \gamma_{yzi})] dV_i,$$

przy czym dla warstw nośnych dolnej $i=1$, górnej $i=2$, a dla warstwy środkowej $i=3$.

Dwa ostatnie wyrazy wzoru (2.4) ujęte w nawias pomija się w odniesieniu do warstw nośnych wobec założonej małej ich grubości.

Niech E_n i ν oznaczają moduł sprężystości i liczbę Poissona materiału warstw nośnych, a E_s i G moduły Younga i Kirchhoffa materiału warstwy wypełniającej. Wprowadzając następujące oznaczenia:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} u_\alpha &= \frac{1}{2} (u_1 + u_2), & u_\beta &= \frac{1}{2} (u_1 - u_2), \\ v_\alpha &= \frac{1}{2} (v_1 + v_2), & v_\beta &= \frac{1}{2} (v_1 - v_2), \end{aligned}$$

oraz na podstawie formuł (1.1) – (1.3) i (2.4) całkując w odpowiednich granicach względem zmiennej z , otrzymamy

$$(2.6) \quad U = (B + B_s) \int_0^a \int_0^b \left[\left(u_{\alpha,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 \right)^2 + \left(v_{\alpha,y} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} w_{,y}^2 \right)^2 + \right. \\ \left. + 2\nu \left(u_{\alpha,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 \right) \left(v_{\alpha,y} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} w_{,y}^2 \right) + \frac{1}{2} (1 - \nu) (v_{\alpha,x} + u_{\alpha,y} + w_{,x} w_{,y})^2 \right] dx dy +$$

$$\begin{aligned}
 (2.6) \quad & +B \int_0^a \int_0^b \left[u_{\beta,x}^2 + v_{\beta,y}^2 + 2\nu u_{\beta,x} v_{\beta,y} + \frac{1}{2} (1-\nu) (u_{\beta,y} + v_{\beta,x})^2 \right] dx dy + \\
 & +D \int_0^a \int_0^b [w_{,yy}^2 + w_{,xx}^2 + 2\nu w_{,xx} w_{,yy} + 2(1-\nu) w_{,xy}^2] dx dy + \\
 & + \frac{D_s}{h^2} \int_0^a \int_0^b \left[\left(u_{\beta,x} + \frac{1}{2} h_n w_{,xx} \right)^2 + \left(v_{\beta,y} + \frac{1}{2} h_n w_{,yy} \right)^2 + \right. \\
 & \left. + 2\nu \left(u_{\beta,x} + \frac{1}{2} h_n w_{,xx} \right) \left(v_{\beta,y} + \frac{1}{2} h_n w_{,yy} \right) + \frac{1}{2} (1-\nu) (u_{\beta,y} + v_{\beta,x} + h_n w_{,xy})^2 \right] dx dy + \\
 & + \frac{G}{h} \int_0^a \int_0^b \left\{ \left[u_{\beta} + \left(h + \frac{1}{2} h_n \right) w_{,x} \right]^2 + \left[v_{\beta} + \left(h + \frac{1}{2} h_n \right) w_{,y} \right]^2 \right\} dx dy,
 \end{aligned}$$

gdzie symbole

$$B = \frac{E_n h_n}{1-\nu^2}, \quad B_s = \frac{E_s h}{1-\nu^2}$$

oznaczają odpowiednio sztywności rozciągania warstw nośnych i wypełniającej, a

$$D = \frac{E_n h_n^3}{12(1-\nu^2)}, \quad D_s = \frac{E_s h^3}{3(1-\nu^2)}$$

sztywności zginania warstw nośnych i wypełniającej.

Energia kinetyczna powłoki trójwarstwowej wynosi

$$(2.7) \quad K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \rho_i \int_{V_i} (\dot{w}^2 + \dot{u}^2 + \dot{v}^2) dV_i,$$

gdzie ρ_i jest gęstością materiału poszczególnych warstw (oznaczymy $\rho_1 = \rho_2 = \rho_n$, $\rho_3 = \rho_s$). Kropka oznacza różniczkowanie względem czasu. Opierając się na związkach (2.6) i (2.7) oraz wykonując całkowanie względem zmiennej z otrzymuje się

$$\begin{aligned}
 (2.8) \quad K = & \int_0^a \int_0^b \left[(\rho_n h_n + \rho_s h) (\dot{w}^2 + \dot{u}_x^2 + \dot{v}_x^2) + \left(\rho_n h_n + \frac{1}{3} \rho_s h \right) (\dot{u}_\beta^2 + \dot{v}_\beta^2) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{12} h_n^2 (\rho_n h_n + \rho_s h) (\dot{w}_{,x}^2 + \dot{w}_{,y}^2) + \frac{1}{3} \rho_s h h_n (\dot{u}_\beta \dot{w}_{,x} + \dot{v}_\beta \dot{w}_{,y}) \right] dx dy.
 \end{aligned}$$

Wprowadzając (2.6) i (2.8) do równania (2.3) oraz przedstawiając pracę sił zewnętrznych w postaci

$$A = \int_0^a \int_0^b q w dx dy,$$

gdzie $q(x, y)$ jest obciążeniem powierzchniowym i wykonując określone wariacje, otrzymamy równanie wariacyjne zagadnienia. Wobec dowolności wariacji poszczególnych argumentów dostaniemy układ równań ruchu elementu powłoki oraz zespół warunków brzegowych zagadnienia.

Układ otrzymanych w ten sposób równań różniczkowych ruchu przedstawia się następująco:

$$\begin{aligned}
 & u_{\alpha,xx} + \frac{1}{2}(1-\nu)u_{\alpha,yy} + \frac{1}{2}(1+\nu)v_{\alpha,xy} - \frac{\nu}{R}w_{,x} + w_{,x}w_{,xx} + \\
 & \quad + \frac{1}{2}(1-\nu)w_{,x}w_{,yy} + \frac{1}{2}(1+\nu)w_{,xy}w_{,y} = \frac{\rho_n h_n + \rho_s h}{B+B_s} \ddot{u}_{\alpha}, \\
 & \frac{1}{2}(1+\nu)u_{\alpha,xy} + \frac{1}{2}(1-\nu)v_{\alpha,xx} + v_{\alpha,yy} - \frac{1}{R}w_{,y} + \frac{1}{2}(1-\nu)w_{,xx}w_{,y} + \\
 & \quad + \frac{1}{2}(1+\nu)w_{,xy}w_{,x} + w_{,y}w_{,yy} = \frac{\rho_n h_n + \rho_s h}{B+B_s} \ddot{v}_{\alpha}, \\
 & \frac{h}{G} \left(B + \frac{D_s}{h^2} \right) \left(u_{\beta,xx} + \frac{1-\nu}{2} u_{\beta,yy} + \frac{1+\nu}{2} v_{\beta,xy} \right) + \frac{D_s h_n}{2Gh} (w_{,xx} + w_{,yy})_{,x} - u_{\beta} - \\
 & \quad - \left(h + \frac{1}{2} h_n \right) w_{,x} = \frac{h}{2G} \left[\frac{1}{3} \rho_s h h_n \ddot{w}_{,x} + 2 \left(\rho_n h_n + \frac{1}{3} \rho_s h \right) \ddot{u}_{\beta} \right], \\
 & \frac{h}{G} \left(B + \frac{D_s}{h^2} \right) \left(\frac{1+\nu}{2} u_{\beta,xy} + \frac{1-\nu}{2} v_{\beta,xx} + v_{\beta,yy} \right) + \frac{D_s h_n}{2Gh} (w_{,xx} + w_{,yy})_{,y} - v_{\beta} - \\
 & \quad - \left(h + \frac{1}{2} h_n \right) w_{,y} = \frac{h}{2G} \left[\frac{1}{3} \rho_s h h_n \ddot{w}_{,y} + 2 \left(\rho_n h_n + \frac{1}{3} \rho_s h \right) \ddot{v}_{\beta} \right], \\
 (2.9) \quad & 2(B+B_s) \left[\frac{1}{R} \left(v_{\alpha,y} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} w_{,y}^2 + \nu u_{\alpha,x} + \frac{\nu}{2} w_{,x}^2 \right) + w_{,x} \left(u_{\alpha,xx} + \frac{1-\nu}{2} u_{\alpha,yy} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{1+\nu}{2} v_{\alpha,xy} - \frac{\nu}{R} w_{,x} + w_{,x}w_{,xx} + \frac{1-\nu}{2} w_{,x}w_{,yy} + \frac{1+\nu}{2} w_{,xy}w_{,y} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + w_{,y} \left(\frac{1+\nu}{2} u_{\alpha,xy} + \frac{1-\nu}{2} v_{\alpha,xx} + v_{\alpha,yy} - \frac{1}{R} w_{,y} + \frac{1-\nu}{2} w_{,xx}w_{,y} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{1+\nu}{2} w_{,xy}w_{,x} + w_{,y}w_{,yy} \right) + w_{,xx} \left(u_{\alpha,x} + \nu v_{\alpha,y} - \nu \frac{w}{R} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{\nu}{2} w_{,y}^2 \right) + w_{,yy} \left(v_{\alpha,y} - \frac{w}{R} + \nu u_{\alpha,x} + \frac{1}{2} w_{,y}^2 + \frac{\nu}{2} w_{,x}^2 \right) + (1-\nu)w_{,xy} \left(v_{\alpha,x} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + u_{\alpha,y} + w_{,x}w_{,y} \right) \right] - \left(2D + \frac{D_s h_n^2}{2h^2} \right) \Delta \Delta w - \frac{D_s h_n}{h^2} \Delta (u_{\beta,x} + v_{\beta,y}) + \\
 & \quad + 2 \frac{G}{h} \left(h + \frac{1}{2} h_n \right) \left\{ \left[u_{\beta} + \left(h + \frac{1}{2} h_n \right) w_{,x} \right]_{,x} + \right. \\
 & \quad \left. + \left[v_{\beta} + \left(h + \frac{1}{2} h_n \right) w_{,y} \right]_{,y} \right\} - q = 2(\rho_n h_n + \rho_s h) \ddot{w}, \\
 & 2\rho_s h \ddot{u}_{\beta} + h_n (\rho_n h_n + \rho_s h) \ddot{w}_{,x} = 0, \\
 & 2\rho_s h \ddot{v}_{\beta} + h_n (\rho_n h_n + \rho_s h) \ddot{w}_{,y} = 0,
 \end{aligned}$$

gdzie Δ jest operatorem Laplace'a.

Jeśli w równaniach ruchu (2.9) pominiemy wyrazy zawierające pochodne względem czasu, to otrzymamy układ równań równowagi statycznej [4].

3. RÓWNANIA PODSTAWOWE

Zajmiemy się z kolei przekształceniem układu równań ruchu (2.9) do trzech równań różniczkowych, które nazywać będziemy równaniami podstawowymi. Siły normalne N_x, N_y i styczne S_{xy} , działające w przekrojach $x=\text{const}$, $y=\text{const}$ powłoki, wyrażamy za pomocą funkcji naprężeń $F(x, y, t)$ w następującej [4] postaci:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} F_{,yy} &= N_x = 2(B+B_s) \left(u_{\alpha,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 + v v_{\alpha,y} - v \frac{w}{R} + \frac{1}{2} v w_{,y}^2 \right), \\ F_{,xx} &= N_y = 2(B+B_s) \left(v_{\alpha,y} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} w_{,y}^2 + v u_{\alpha,x} + \frac{1}{2} v w_{,x}^2 \right), \\ -F_{,xy} &= S_{xy} = (1-v)(B+B_s)(v_{\alpha,x} + u_{\alpha,y} + w_{,x} w_{,y}). \end{aligned}$$

Ponadto wprowadzamy funkcję przemieszczeń $\psi(x, y, t)$ określoną w sposób następujący:

$$(3.2) \quad \psi = u_{\beta,x} + v_{\beta,y}.$$

Po odpowiednich przekształceniach z wykorzystaniem wzorów (3.1) i (3.2) otrzymamy z równań ruchu (2.9) układ różniczkowych równań podstawowych:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \left(2D - \frac{D_s h_n}{h} \right) \Delta \Delta w - \frac{1}{R} F_{,xx} - L(w, F) - 2 \left[B \left(h + \frac{1}{2} h_n \right) + \frac{1}{3} B_s h \right] \Delta \psi + \\ + 2 \left(h + \frac{1}{2} h_n \right) \rho_n h_n \left(1 + \frac{\rho_s h}{3(\rho_n h_n + \rho_s h)} \right) \ddot{\psi} + 2(\rho_n h_n + \\ + \rho_s h) (\ddot{w} - w_{,x} \ddot{u}_{\alpha} - w_{,y} \ddot{v}_{\alpha}) + q = 0, \\ \Delta \psi - \frac{G}{h \left(B + \frac{1}{3} B_s \right)} \psi = \frac{G \left(h + \frac{1}{2} h_n \right)}{h \left(B + \frac{1}{3} B_s \right)} \Delta w - \frac{D_s h_n}{2h^2 \left(B + \frac{1}{3} B_s \right)} \Delta \Delta w - \\ - \frac{\rho_n h_n}{B + \frac{1}{3} B_s} \left(1 + \frac{\rho_s h}{3(\rho_n h_n + \rho_s h)} \right) \ddot{\psi}, \\ \Delta \Delta F + 2(B+B_s)(1-v^2) \left[\frac{1}{R} w_{,xx} + \frac{1}{2} L(w, w) - \right. \\ \left. - \frac{v}{1-v^2} \frac{\rho_n h_n + \rho_s h}{B+B_s} (\ddot{u}_{\alpha,x} + \ddot{v}_{\alpha,y}) \right] = 0. \end{aligned}$$

Dla skrócenia zapisu wprowadzono tutaj nieliniowy operator różniczkowy w postaci

$$L(f_1, f_2) = f_{1,xx} f_{2,yy} + f_{1,yy} f_{2,xx} - 2f_{1,xy} f_{2,xy}.$$

W równaniach (3.3) oprócz poszukiwanych funkcji w, F, ψ występują również funkcje v_{α} i u_{α} , których nie udało się całkowicie wyeliminować. Dalsze rozwiązanie zagadnie-

nia przebiegać będzie z pewnym uproszczeniem. Pominiemy mianowicie pochodne względem czasu przemieszczeń stycznych u i v zakładając, że są one małe w porównaniu z ugięciem w . Tak więc układ równań podstawowych przyjmie postać

$$(3.4) \quad \left(2D - \frac{D_s h_n}{h}\right) \Delta \Delta w - \frac{1}{R} F_{,xx} - L(w, F) - 2 \left[B \left(h + \frac{1}{2} h_n \right) + \frac{1}{3} B_s h \right] \Delta \psi + \\ + 2(\rho_n h_n + \rho_s h) \ddot{w} + q = 0, \\ h \left(B + \frac{1}{3} B_s \right) \Delta \psi - G \psi = G \left(h + \frac{1}{2} h_n \right) \Delta w - \frac{D_s h_n}{2h} \Delta \Delta w, \\ \Delta \Delta F + 2(B + B_s)(1 - \nu^2) \left[\frac{1}{R} w_{,xx} + \frac{1}{2} L(w, w) \right] = 0.$$

4. WARUNKI BRZEGOWE

Z równania wariacyjnego (2.3) otrzymamy także układ warunków brzegowych zagadnienia. Zgodnie z założeniami poczynionymi w części pierwszej niniejszej pracy warunki brzegowe można napisać w postaci:

dla brzegów krzywoliniowych ($x=0$, $x=a$)

$$(4.1) \quad F_{,yy} = -p_x, \quad F_{,xy} = 0, \\ \left(B + \frac{D_s}{h^2} \right) (u_{\beta,x} + \nu v_{\beta,y}) + \frac{D_s h_n}{2h^2} (w_{,xx} + \nu w_{,yy}) = 0, \\ v_{\beta} = 0, \quad w = 0, \\ \left(2D + \frac{D_s h_n^2}{2h^2} \right) (w_{,xx} + \nu w_{,yy}) + \frac{D_s h_n}{h^2} (u_{\beta,x} + \nu v_{\beta,y}) = 0;$$

dla brzegów prostoliniowych ($y=0$, $y=b$)

$$(4.2) \quad F_{,xy} = 0, \quad F_{,xx} = -p_y, \quad u_{\beta} = 0, \\ \left(B + \frac{D_s}{h^2} \right) (v_{\beta,y} + \nu u_{\beta,x}) + \frac{D_s h_n}{2h^2} (w_{,yy} + \nu w_{,xx}) = 0, \\ w = 0, \\ \left(2D + \frac{D_s h_n^2}{2h^2} \right) (w_{,yy} + \nu w_{,xx}) + \frac{D_s h_n}{h^2} (v_{\beta,y} + \nu u_{\beta,x}) = 0.$$

Przy formułowaniu powyższych warunków uwzględniono również związki (3.1).

5. FUNKCJA UGIĘCIA. OKREŚLENIE FUNKCJI F I ψ

W dalszych rozważaniach uwzględnimy początkowe odchylenia od geometrycznie idealnego kształtu powłoki (wstępne ugięcie), które mają, jak wiadomo, duży wpływ na przebieg utraty stateczności powłoki. Do równań podstawowych (3.4) wprowadzimy na miejsce ugięcia w wyrażenie $(w+w_0)$, gdzie $w_0(x, y)$ oznaczać będzie wstępne przemieszczenie punktów powłoki w kierunku normalnym do jej powierzchni. Ugięcie wstępne wprowadzimy do wyrazów nieliniowych równań (3.4) i założymy jednocześnie, że jest ono małe w porównaniu z ugięciem w , co pozwala na przyjęcie $L(w+w_0, w+w_0) \approx L(w+2w_0, w)$. Otrzymamy następujący układ równań różniczkowych:

$$(5.1) \quad \left(2D - \frac{D_s h_n}{h}\right) \Delta \Delta w - \frac{1}{R} F_{,xx} - L(w+w_0, F) - 2 \left[B \left(h + \frac{1}{2} h_n \right) + \frac{1}{3} B_s h \right] \Delta \psi + 2(\rho_n h_n + \rho_s h) \ddot{w} + q = 0,$$

$$h \left(B + \frac{1}{3} B_s \right) \Delta \psi - G \psi = G \left(h + \frac{1}{2} h_n \right) \Delta w - \frac{D_s h_n}{2h} \Delta \Delta w,$$

$$\Delta \Delta F + 2(B+B_s)(1-\nu^2) \left[\frac{1}{R} w_{,xx} + \frac{1}{2} L(w+2w_0, w) \right] = 0.$$

Funkcję aproksymującą ugięcie przyjmujemy w postaci

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin m\alpha x \sin n\beta y,$$

przy czym zakładamy, że przy deformacji powłoki zachodzi zjawisko tworzenia się jednej półfali ugięcia w kierunku podłużnym i obwodowym. W pierwszym przybliżeniu weźmiemy

$$(5.2) \quad w(x, y, t) = W \sin \alpha x \sin \beta y.$$

Podobnie funkcję wstępnego ugięcia przyjmiemy w formie

$$(5.3) \quad w_0(x, y) = W_0 \sin \alpha x \sin \beta y.$$

Wprowadzono tu oznaczenia: $\alpha = \pi/a$, $\beta = \pi/b$; symbolami $W(t)$ i W_0 oznaczyliśmy ugięcie środka powłoki (punktu o współrzędnych $x=a/2$, $y=b/2$). Tak dobrana funkcja ugięcia spełnia oczywiście warunki brzegowe (4.1)₅ i (4.2)₅. Wprowadzenie jej do równań (5.1)₂ i (5.1)₃ pozwala na ich rozwiązanie, tj. określenie funkcji naprężeń i przemieszczeń. Otrzymamy mianowicie

$$(5.4) \quad F = (B+B_s)(1-\nu^2) \left[\frac{1}{16} W(W+2W_0) \left(\frac{\beta^2}{\alpha^2} \cos 2\alpha x + \frac{\alpha^2}{\beta^2} \cos 2\beta y \right) + \frac{2\alpha^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2} \frac{1}{R} W \sin \alpha x \sin \beta y \right] - \frac{1}{2} p_x y^2 - \frac{1}{2} p_y x^2,$$

$$(5.5) \quad \psi = \frac{\left[G \left(h + \frac{1}{2} h_n \right) + \frac{D_s h_n}{2h} (\alpha^2 + \beta^2) \right]}{G + h \left(B + \frac{1}{3} B_s \right) (\alpha^2 + \beta^2)} (\alpha^2 + \beta^2) W \sin \alpha x \sin \beta y .$$

Spełnione są także warunki brzegowe (4.1)_{1,2} i (4.2)_{1,2}, a dwa ostatnie wyrazy związku (5.4) uwzględniają siły stanu błonowego pochodzące od obciążeń przyłożonych do brzegów powłoki.

6. ZASTOSOWANIE METODY BUBNOWA-GALERKINA

Rozwiązanie ostatniego z równań podstawowych (5.1)₁, które pozwoli na znalezienie zależności pomiędzy parametrami ugięcia, obciążenia i czasu w trakcie utraty stateczności przeprowadzimy metodą Bubnowa-Galerkina. Równanie wariacyjne ma postać:

$$(6.1) \quad \int_0^a \int_0^b X \delta w(x, y, t) dx dy = 0 ,$$

gdzie δw jest wariacją ugięcia spełniającą warunki brzegowe, a wyrażenie

$$(6.2) \quad X = D_0 \Delta \Delta w - \frac{1}{R} F_{,xx} - L(w + w_0, F) - 2B_0 \Delta \psi + q + m^* \ddot{w}$$

jest lewą stroną równania (5.1)₁, przy czym

$$D_0 = 2D - \frac{D_s h_n}{h}, \quad B_0 = B \left(h + \frac{1}{2} h_n \right) + \frac{1}{3} B_s h ,$$

$$m^* = 2(\rho_n h_n + \rho_s h) .$$

Przyjmując zgodnie ze związkiem (5.2)

$$(6.3) \quad \delta w = \delta W \sin \alpha x \sin \beta y$$

i podstawiając do równania (6.1) związki (6.3), (6.2), (5.4), (5.5), (5.2) i (5.3) otrzymujemy po wykonaniu całkowania następujące równanie różniczkowe zwyczajne;

$$(6.4) \quad W(W + W_0) h_n \left(1 + \frac{B_s}{B} \right) (1 - \nu^2) \left[\frac{1}{32} \pi^2 (\alpha^4 + \beta^4) (W + 2W_0) - \right. \\ \left. - \frac{16}{3R} \frac{\alpha^4 \beta^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} \right] - \frac{h_n}{R} \left(1 + \frac{B_s}{B} \right) (1 - \nu^2) W \left[\frac{1}{3} \beta^2 (W + 2W_0) - \right. \\ \left. - \frac{\pi^2 \alpha^4}{2R(\alpha^2 + \beta^2)^2} \right] + 4 \frac{p_y h_n}{BR} + \frac{\pi^2 h_n D_0}{4B} (\alpha^2 + \beta^2)^2 W - \frac{\pi^2 h_n}{4B} (W + W_0) (\alpha^2 p_x + \\ + \beta^2 p_y) + \frac{1}{2} \pi^2 h_n \frac{B_0}{B} (\alpha^2 + \beta^2)^2 \left[G \left(h + \frac{1}{2} h_n \right) + \frac{D_s h_n}{2h} (\alpha^2 + \beta^2) \right] \left[(\alpha^2 + \right. \\ \left. + \beta^2) \left(B + \frac{1}{3} B_s \right) h + G \right]^{-1} + \frac{\pi^2 h_n}{4B} m^* \frac{d^2 W}{dt^2} = 0 .$$

Pominięto przy tym obciążenie powierzchniowe q , którego działania się nie rozważa.

Wprowadzimy następujące bezwymiarowe parametry:

$$\zeta = Wh^{-1}, \quad \zeta_0 = W_0 h^{-1}, \quad \lambda = h_n h^{-1}, \quad \kappa = ah^{-1}, \quad \gamma = ab^{-1}, \\ \eta = Rh^{-1}, \quad \theta = GB^{-1}h, \quad \rho = E_s E_n^{-1}, \quad \hat{p}_x = p_x B^{-1}, \quad \hat{p}_y = p_y B^{-1}.$$

Założymy, że obciążenia p_x i p_y w chwili $t=0$ wynoszą zero i wzrastają proporcjonalnie do czasu z prędkościami c_x i c_y :

$$p_x = c_x t, \quad p_y = c_y t.$$

W każdej chwili działania, obciążenia stały jest wobec tego następujący stosunek:

$$\xi = \frac{p_y}{p_x} = \frac{\hat{p}_y}{\hat{p}_x} = \frac{c_y}{c_x}.$$

Wprowadźmy także bezwymiarowy parametr czasu (obciążenia):

$$\hat{t} = \frac{p_x}{p_{kr}} = \frac{\hat{p}_x}{\hat{p}_{kr}} = \frac{c_x t}{B\hat{p}_{kr}},$$

gdzie p_{kr} oznacza górną krytyczną wartość obciążenia statycznego [4] powłoki obciążonej jedynie siłami p_x .

Po odpowiednich przekształceniach z równania (6.4) otrzymamy

$$(6.5) \quad \hat{p}_x = \frac{1}{K_4 + K_5(\zeta + \zeta_0)} \left[K_1(\zeta + \zeta_0)(\zeta + 2\zeta_0)\zeta + K_2(\zeta + \zeta_0)\zeta + K_3\zeta + K_6 \frac{d^2 \zeta}{dt^2} \right].$$

Współczynniki K_i ($i=1, 2, \dots, 6$) określone przez bezwymiarowe parametry wynoszą:

$$K_1 = \frac{1}{32} \pi^6 \kappa^{-4} (\lambda + \rho) (1 + \gamma^4) (1 - \nu^2),$$

$$K_2 = -\frac{16}{3} \pi^2 \eta^{-1} \kappa^{-2} \gamma^2 (1 + \gamma^2)^{-2} (\lambda + \rho) (1 - \nu^2),$$

$$K_3 = \pi^2 \eta^{-1} (\lambda + \rho) (1 - \nu^2) \left[\frac{1}{2} \eta^{-1} (1 + \gamma^2)^{-2} - \frac{1}{3} \gamma^2 \kappa^{-2} \right] + \\ + \frac{1}{2} \pi^6 \kappa^{-2} (1 + \gamma^2)^2 \left\{ \frac{1}{6} \lambda \kappa^{-2} \left(\frac{1}{2} \lambda^2 - \rho \right) + \left[\lambda \left(1 + \frac{1}{2} \lambda \right) + \frac{1}{3} \rho \right] \times \right. \\ \left. \times \left[\theta \left(1 + \frac{1}{2} \lambda \right) + \frac{1}{6} \pi^2 \rho \kappa^{-2} (1 + \gamma^2) \right] \left[\pi^2 (1 + \gamma^2) \left(1 + \frac{1}{3} \rho \lambda^{-1} \right) + \theta \kappa^2 \right]^{-1} \right\},$$

$$K_4 = -4\xi \lambda \eta^{-1}, \quad K_5 = \frac{1}{4} \pi^4 \lambda \kappa^{-2} (1 + \gamma^2 \xi),$$

$$K_6 = \frac{1}{4} \pi^2 c_x^2 h_n h B^{-3} \hat{p}_{kr}^{-2} m^*.$$

W dalszym ciągu przyjmujemy, że powłoka obciążona jest tylko na brzegach krzywoliniowych, a zatem $c_y = 0$ i $\xi = 0$.

Biorąc z zagadnienia statycznego [4] wielkość

$$\hat{p}_{kr} = \frac{K_3}{K_5},$$

możemy równanie (6.5) przekształcić do następującej postaci:

$$(6.6) \quad \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = a_1 \zeta \hat{t} + a_2 \zeta^3 + a_3 \zeta^2 + a_4 \zeta + a_5 \hat{t},$$

gdzie współczynniki a_i ($i=1, 2, \dots, 5$) wynoszą odpowiednio

$$a_1 = K_3 K_6^{-1}, \quad a_2 = -K_1 K_6^{-1}, \quad a_3 = -(3K_1 \zeta_0 + K_2) K_6^{-1}, \\ a_4 = -[(2K_1 \zeta_0 + K_2) \zeta_0 + K_3] K_6^{-1}, \quad a_5 = K_3 K_6^{-1} \zeta_0.$$

Nieliniowe równanie różniczkowe zwyczajne rzędu drugiego (6.6) przedstawia zależność pomiędzy parametrem ugięcia ζ i parametrem czasu (obciążenia) \hat{t} , jaka zachodzi podczas utraty stateczności powłoki pod wpływem obciążenia dynamicznego. Rozwiązaniem tego równania będzie, przy uwzględnieniu warunków początkowych

$$[\zeta]_{\hat{t}=0} = \zeta_0 \quad \text{i} \quad \left[\frac{d\zeta}{dt} \right]_{\hat{t}=0} = 0,$$

funkcja $\zeta = \zeta(\hat{t})$, określająca deformację powłoki w czasie procesu utraty stateczności na skutek wybożenia w kierunku normalnym do powierzchni środkowej powłoki. Równanie (6.6) rozwiązuje się metodą numeryczną.

7. OBLICZENIA NUMERYCZNE

Przykładowe obliczenia przeprowadzono dla powłoki o wymiarach: $a=60$ cm, $b=40$ cm, $R=100$ cm. Przyjęto, że warstwy nośne wykonane są z duraluminu ($E_n=7,19 \cdot 10^5$ kG cm $^{-2}$, $\nu=0,3$, $\rho_n=2,85 \cdot 10^{-2}$ kGs 2 cm $^{-4}$), a warstwę środkową stanowi lekkie spienione tworzywo sztuczne typu «Moltopren» [5], dla którego własności fizyczne zmieniają się w przedziałach

$$E_s = 100 \text{ do } 1100 \text{ kGcm}^{-2}, \quad G = 50 \text{ do } 550 \text{ kGcm}^{-2}, \\ \rho_s = 0,051 \cdot 10^{-2} \text{ do } 0,255 \cdot 10^{-2} \text{ kGs}^2\text{cm}^{-4}.$$

Grubości rozważanych powłok wynoszą $h_n=0,05$ do $0,5$ cm i $h=0$ do $2,0$ cm.

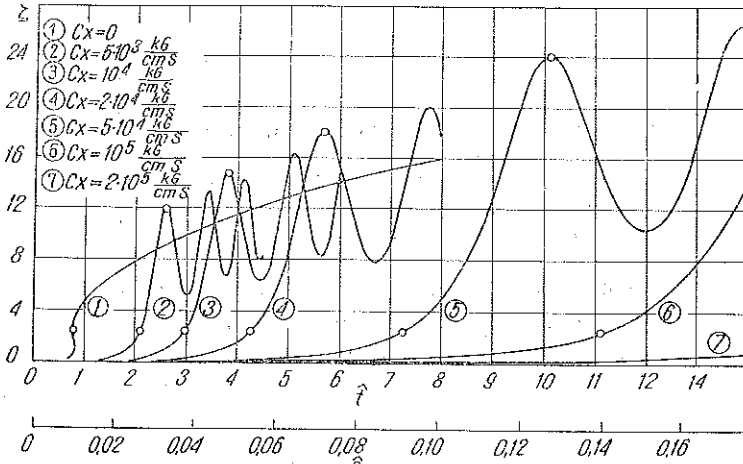
Rozwiązania numerycznego dokonano dla prędkości obciążenia c_x od $5 \cdot 10^3$ do $2 \cdot 10^5$ kGcm $^{-1}$ s $^{-1}$. Parametr początkowego ugięcia zmienia się w przedziale $\zeta_0=0,01$ do $0,2$.

Jako wartości podstawowe parametrów przyjęto następujące:

$$E_s = 540 \text{ kGcm}^{-2}, \quad G = 270 \text{ kGcm}^{-2}, \quad \rho_s = 0,183 \cdot 10^{-2} \text{ kGs}^2 \text{ cm}^{-4},$$

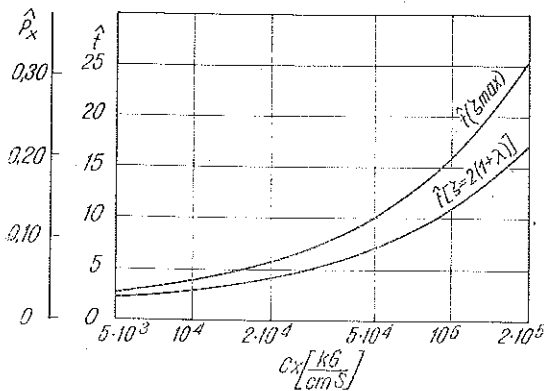
$$h_n = 0,1 \text{ cm}, \quad h = 0,5 \text{ cm}, \quad c_x = 2 \cdot 10^4 \text{ kGcm}^{-1} \text{ s}^{-1} \text{ oraz } W_0 = 0,025 \text{ cm}.$$

Obliczenia przeprowadzone zostały przy pomocy elektronicznej maszyny cyfrowej, przy czym w rozwiązaniu numerycznym równania (6.6) zastosowano metodę Adamsa-Störmera. Przykładową rodzinę krzywych $\zeta(\bar{t})$, będących rozwiązaniem tego równania, przedstawiono na wykresie (rys. 3). Są to rozwiązania uzyskane



Rys. 3

dla różnych prędkości obciążenia c_x . Krzywa 1 odpowiada rozwiązaniu zagadnienia statycznego, krzywe 2–7 ilustrują utratę stateczności przy coraz to większych prędkościach c_x . Na każdej z tych krzywych wyróżniamy odcinek początkowy, na którym następuje stosunkowo wolny przyrost ugięcia w czasie. Zjawisko to



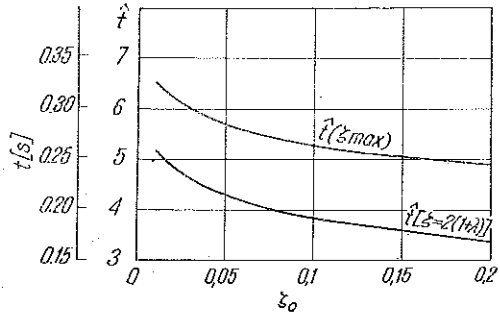
Rys. 4

przebiega jednak coraz szybciej i na odcinku drugim nabiera gwałtownego charakteru. W tym zakresie następuje bardzo szybki wzrost ugięcia przy nieznacznym wzroście obciążenia, co można uznać za utratę stateczności powłoki. W dalszej części krzywej po osiągnięciu maksimum ugięcia powłoka wchodzi w stan nieliniowych drgań, którymi w pracy bliżej się nie zajmowano; można jedynie odnotować, że drgania te zachodzą wokół położenia równowagi, wyznaczonego krzywą statyczną. Odcinek, na którym następuje wyboczenie powłoki, ograniczono dwoma punktami. Pierwszy z nich (dolny) odpowiada osiągnięciu przez parametr ugięcia wartości odpowiadającej grubości powłoki $\zeta = 2(1 + \lambda)$, drugi — wartości maksymalnej ζ_{\max} .

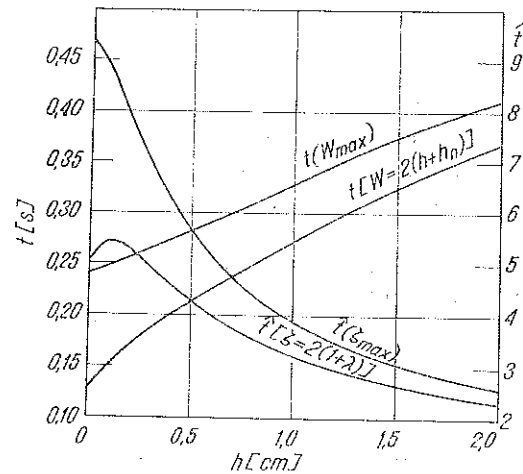
Istotne jest poznanie wartości obciążeń «krytycznych» odpowiadających tym punktom. Obciążenia te w skali bezwzględnej mogą być wyrażone za pomocą czasu t wobec założonej stałej prędkości obciążenia dla każdej z powłok. Mogą być też

wyznaczone względne wartości obciążeń wyrażone za pomocą parametru \hat{t} , który jest stosunkiem obciążenia bieżącego do wartości górnej krytycznej dla przypadku statycznego. W wyniku analizy numerycznej uzyskano krzywe (rys. 4) obrazujące zależności obciążeń «krytycznych» od prędkości obciążenia. Ze wzrostem prędkości c_x obciążenia te szybko rosną. W podobny sposób przebadano również

wpływ innych parametrów geometrycznych i fizycznych powłoki: wstępного ugięcia ζ_0 , grubości warstwy wypełniającej h , grubości warstw nośnych h_n , sztywności wypełniacza (E_s, G, ρ_s). Otrzymane wyniki przedstawiono na wykresach (rys. 5, 6, 7, 8).



Rys. 5



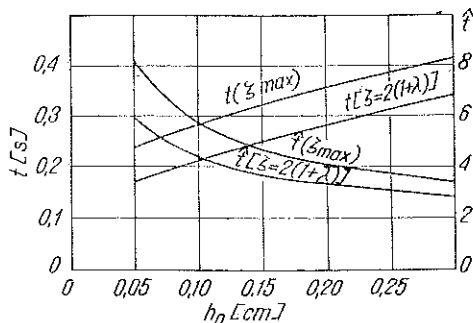
Rys. 6

Wzrost początkowych odchyień geometrycznych powłoki (wstępne ugięcie) powoduje zmniejszanie się wartości obciążeń towarzyszących wyboczeniu powłoki (rys. 5). Charakter zależności jest tu podobny do występującego w powłokach jednowarstwowych [3]. Wzrost grubości h warstwy wypełniającej powoduje zwiększenie obciążeń w skali bezwzględnej, jednak wartości względne wyraźnie maleją (rys. 6). Przy czym dla małych wartości h (przejście do powłoki jednowarstwowej) obserwuje się pewne zakłócenia w monotonicznym przebiegu krzywych. Ze wzrostem grubości warstw nośnych

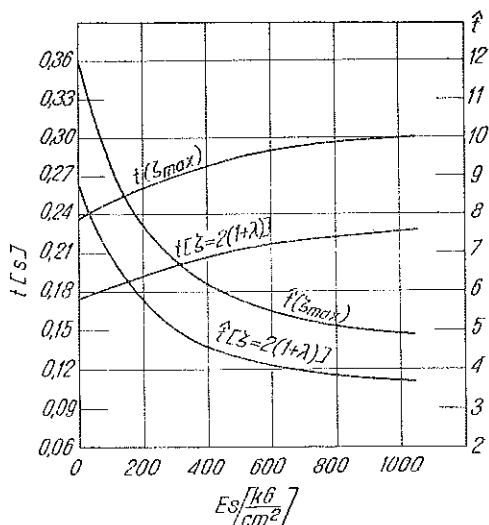
h_n obserwujemy prawie liniowy przyrost wartości bezwzględnych obciążeń, wartości względne jednak również i w tym przypadku maleją (rys. 7). Wzrost sztywności wypełniacza pociąga za sobą nieznaczne zwiększenie obciążeń bezwzględnych, a ich wartości względne także i w tym przypadku szybko maleją (rys. 8).

Ogólniejszym wnioskiem wynikającym z przeprowadzonej analizy może być stwierdzenie, że przyrost grubości poszczególnych warstw lub sztywności wypełniacza spowoduje oczywiście podwyższenie odporności na wyboczenie, lecz efekt ten będzie wyraźnie większy w odniesieniu do przypadku statycznego niż dynamicznego, świadczy o tym każdorazowy spadek względnych wartości obciążeń krytycznych.

Rozwiązanie zagadnienia utraty stateczności otwartej trójwarstwowej powłoki walcowej ściskanej dynamicznie, przedstawione w niniejszej pracy, należy uznać za przybliżone. Jest ono prawdopodobnie obarczone pewnymi błędami wynikłymi



Rys. 7



Rys. 8

z wprowadzenia upraszczających założeń, a przede wszystkim z przyjęcia stosunkowo prostej postaci funkcji ugięcia. Wydaje się jednak, że analiza jakościowa wpływu poszczególnych parametrów na przebieg dynamicznego wybożenia powłoki trójwarstwowej powinna dość dobrze przedstawiać samo zjawisko.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Э. И. Григолюк, П. П. Чулков, *Критические нагрузки трехслойных цилиндрических и конических оболочек*, Западно-Сиб. кн. изд-во, Новосибирск 1966.
2. R. J. SYLVESTER, *Buckling of sandwich cylinders under axial load*, J. Aeronaut. Sci., 29, 1962.
3. В. В. Болотин, Г. А. Бойченко, *Исследование прощелкивания тонких упругих оболочек под действием динамических нагрузок*, В сб. «Расчеты на прочность», Вып. 5, Машгиз, Москва 1960.
4. W. SZYC, *Nieliniowe zagadnienie stateczności sprężystej trójwarstwowej otwartej powłoki walcowej*, Rozpr. Inżyn., 19, 4, 1971.
5. H. HERTEL, *Leichtbau*, Spinger-Verlag, Berlin 1960.

Резюме

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЗАМКНУТОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ПОДВЕРЖЕННОЙ ДИНАМИЧЕСКОМУ СЖАТИЮ

В работе решается задача об устойчивости упругой незамкнутой трехслойной цилиндрической оболочки, подверженной действию равномерно распределенных по краям и изменяющихся во времени сжимающих усилий. Уравнения движения элемента оболочки выводятся

на основе принципа Гамильтона. Введение функций напряжений и перемещений приводит уравнения к системе трех исходных уравнений, решаемых приближенным методом Бубнова-Галеркина. В предположении линейного во времени приращения нагрузок выведено нелинейное дифференциальное уравнение, связывающее величину параметра прогиба со временем.

Выполнены примеры численных расчетов, результаты которых позволили качественно исследовать влияние отдельных физических и геометрических параметров оболочки на процесс потери устойчивости.

SUMMARY

STABILITY OF AN OPEN SANDWICH CYLINDRICAL SHELL UNDER DYNAMIC COMPRESSION

In the paper is solved the problem of stability of an elastic, open, sandwich cylindrical shell subject to the action of compressive forces uniformly distributed along the edges and variable in time. Basing on the broken line hypothesis and the Hamilton principle, the equations of motion of the shell element are derived. Introduction of the stress and displacement functions yields the system of three equations which is then approximately solved by the Bubnov-Galerkin method. Under the assumption of linearly increasing load in time, a nonlinear differential equation is derived combining the deflection parameters and time. Numerical examples are also presented, their results serving for the qualitative analysis of the influence of individual physical and geometric parameters of the shell on the buckling process.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 29 grudnia 1971 r.
