

BADANIA RÓWNAŃ NAVIERA-STOKESA W CENTRUM OBLICZENIOWYM AKADEMII NAUK ZSRR(*)

A. A. DORODNICYN, V. A. LULKA, N. A. MELLER (MOSKWA)

Prace dotyczące numerycznych metod rozwiązywania równań Naviera-Stokesa rozpoczęte zostały około pięciu lat temu. Od tego czasu święciliśmy pewne sukcesy oraz spotykały nas niepowodzenia, które okazały się nie mniej interesujące, gdyż prowadziły czasami do powstania nowych problemów o dużym znaczeniu teoretycznym.

W niniejszej pracy przedstawimy kilka wyników obliczeń, które z naszego punktu widzenia są interesujące. W przypadkach mniej lub bardziej skomplikowanych czasami trudno jest wyobrazić sobie nawet jakościowy obraz ruchu cieczy lepkiej. W jego konstrukcji bardzo pomocne są wyniki numeryczne. Następnie przedyskutujemy trudności związane z dużymi liczbami Reynoldsa, które rozważaliśmy w naszej pracy.

W obliczeniach stosowaliśmy następujące trzy metody:

- 1) stacjonarną metodę kolejnych przybliżeń,
- 2) «sztuczną» niestacjonarną metodę dla zagadnień stacjonarnych,
- 3) rzeczywistą niestacjonarną metodę używaną zarówno do zagadnień niestacjonarnych jak i stacjonarnych.

Wyjściowy układ równań w przypadku dwuwymiarowego przepływu cieczy nieściśliwej w układzie współrzędnych kanonicznych ma następującą postać:

dla metody stacjonarnej

$$\Delta\omega = 2 \left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta} \frac{\partial\omega}{\partial\xi} - \frac{\partial\psi}{\partial\xi} \frac{\partial\omega}{\partial\eta} \right),$$

$$\Delta\psi = [F'(\xi, \eta)]^2 \omega,$$

gdzie ω jest wirowością (bezwymiarową), ψ funkcją prądu (bezwymiarową), ξ i η oznaczają współrzędne kanoniczne, przyjmowane zwykle jako funkcja potencjalna i funkcja prądu dla przepływu cieczy idealnej. Funkcja F transformuje współrzędne geometryczne x, y do układu ξ, η .

Kolejne aproksymacje są skonstruowane w sposób następujący. Wprowadzając «zaburzenie» ψ w postaci $\psi = \eta + \varphi$ na każdym kroku aproksymacji układ równań doprowadzamy do postaci

$$\Delta\omega_{n+1} - 2 \frac{\partial\omega_{n+1}}{\partial\xi} = 2 \left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial\eta} \frac{\partial\omega_n}{\partial\xi} - \frac{\partial\varphi_n}{\partial\xi} \frac{\partial\omega_n}{\partial\eta} \right),$$

$$\Delta\varphi_{n+1} = [F'(\xi, \eta)]^2 \omega_{n+1}.$$

(*) Z angielskiego tłumaczył J. BEJDA.

Dla sztucznej niestacjonarnej metody

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \Delta \omega - 2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \Delta \psi - [F'(\xi, \eta)]^2 \omega.$$

Dla rzeczywistej metody niestacjonarnej fizyczny układ równań dla ruchu niestacjonarnego jest wykorzystany w postaci

$$[F'(\xi, \eta)]^2 \frac{\partial \omega}{\partial t} = \Delta \omega - 2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right),$$

$$\Delta \psi = [F'(\xi, \eta)]^2 \omega.$$

Dla tych wszystkich metod warunek na ścianie jest przyjęty w takiej formie, że dla każdego kroku (iteracji w metodzie stacjonarnej, kroku czasowego w metodach niestacjonarnych) otrzymuje się oddzielne równania dla ω i ψ . Mianowicie

$$\omega_{n+1} = \alpha \frac{\partial \psi_n}{\partial n} + \omega_n$$

dla metody stacjonarnej,

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \alpha \frac{\partial \psi}{\partial n}$$

dla metod niestacjonarnych. Parametr α może być funkcją brzegu i czasu (w ostatnim przypadku).

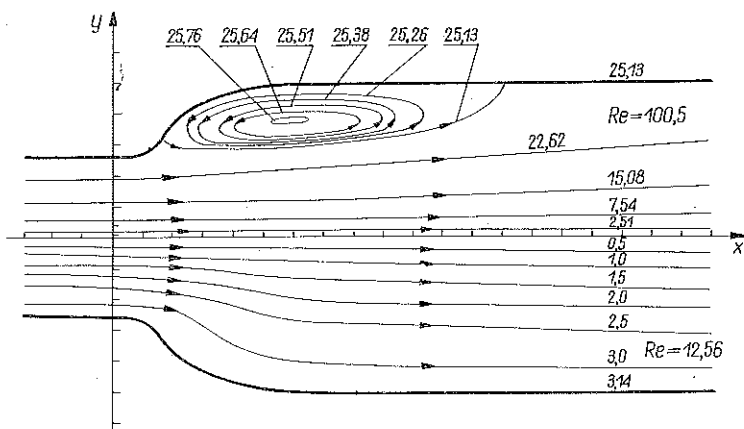
Takie rozdzielenie równań jest bardzo ważne przy obliczeniach numerycznych, gdyż dla równań drugiego rzędu pozwala sprowadzić przybliżony układ równań różnicowych do postaci trójdzielnej, a to redukuje kilkakrotnie niezbędną ilość operacji arytmetycznych.

Rozważmy teraz niektóre wyniki obliczeń. Rysunek 1 ilustruje przepływ cieczy lepkiej w płaszczyźnie dyszy o kształcie pokazanym na nim z różnymi liczbami Reynoldsa. Dolna część odnosi się do $Re=4$, górna do $Re=32$.

Wynik ten przytaczaliśmy już na ostatnim sympozjum poświęconym dynamice cieczy w Kazimierzu, tak że teraz zwrócimy jedynie uwagę na fakt, że obliczenia doprowadziliśmy aż do $Re=200$. Gdy $Re > 200$, stosowane przez nas metody przestają być zbieżne. Próbę wyjaśnienia tego zjawiska przedstawimy dalej.

Wspomniane wyżej dwie pierwsze metody były stosowane do zagadnienia przepływu wokół półnieskończonej płyty. Szczególne znaczenie ma tu rozwiązanie w otoczeniu krawędzi natarcia, która tworzy punkt osobliwy. Wiadomo, że w otoczeniu tego punktu główny wyraz funkcji asymptotycznej dla wirowości ma postać $\omega \approx 1/\sqrt{r}$ (gdzie r jest współrzędną biegunową, a $r=0$ odpowiada krawędzi natarcia). Dlatego celowe jest wprowadzenie funkcji w w postaci $w = \omega\sqrt{r}$. Dla tej funkcji

problem rozwiązano metodą kolejnych przybliżeń przyjmując siatkę nierównomierną. Kroki w kierunkach ξ i η były zwiększane trzykrotnie w miarę wzrastania odległości od krawędzi natarcia (ξ, η są współrzędnymi parabolicznymi).



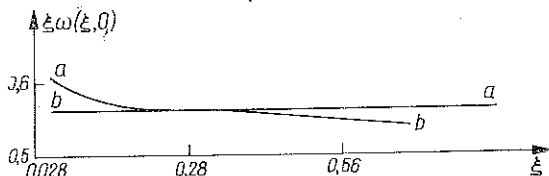
Rys. 1

Obliczenia numeryczne wykazały, że w odległości większej niż $r = \nu/v$ rozwiązanie jest «stateczne», tzn. nie zmienia się znacznie, gdy maleje wielkość kroku. Pozwala to na kontynuowanie rozwiązania «statycznego» aż do krawędzi natarcia przez połączenie go z rozwinięciem asymptotycznym. Rozwinięcie to ma postać:

$$w(r, \vartheta) = b_1 \cos \frac{\vartheta}{2} - 6b_2 r \cos \frac{\vartheta}{2} + \frac{3}{4} b_1^2 r^{3/2} \ln r \sin \vartheta + r^{3/2} \left\{ \frac{1}{2} b_1^2 \sin \vartheta - \frac{1}{4} b_1^2 (-\pi \vartheta) \cos \vartheta + \frac{1}{5} b_1^2 (\sin 2\vartheta - 5 \sin \vartheta) - 24b_3 \sin \vartheta \right\},$$

gdzie współczynniki b_1, b_2 i b_3 są nieokreślone. Obszar, w którym rozwiązanie asymptotyczne było połączone z rozwiązaniem numerycznym, można określić zmieniając położenie i liczbę punktów przyjętych do obliczenia b_1 i b_2 . Wartość b_1 była równa 0,556, wartość $b_2 \approx 0,002$. Dla $\vartheta = 0$ wartości te były wystarczające do otrzymania czterech wyrazów szeregu asymptotycznego.

Rys. 2 przedstawia zachowanie się funkcji w w otoczeniu krawędzi natarcia na powierzchni płyty.



Rys. 2

Krzywa $a-a$ odnosi się do rozwiązania numerycznego, krzywa $b-b$ do wzoru asymptotycznego. Tak więc w pobliżu krawędzi natarcia na płycie wirowość wynosi $0,556/\sqrt{x}$. Zauważmy, że $\omega \approx 0,470/\sqrt{x}$, gdy $x \rightarrow \infty$.

Przedstawimy z kolei wyniki obliczeń numerycznych dla przepływu jednorodnego w nieskończoności strumienia lepkiej nieściśliwej cieczy dookoła obracającego się walca o promieniu $R=1$. Obliczenia były przeprowadzone dla $Re=1, 5, 10$ i prędko-

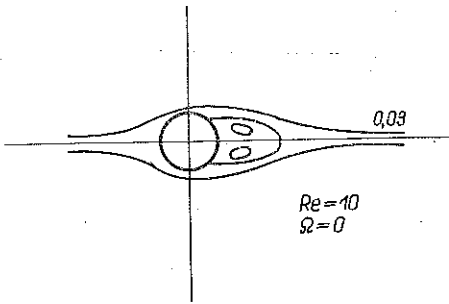
ści obrotu $\Omega=0, 1, 2, 3$ 1/sek. Ponieważ przy $\Omega \neq 0$ wartości funkcji prądu są nieznane, przeto do znalezienia ich zastosowano następującą metodę. Ciśnienie na powierzchni walca musi być funkcją periodyczną $p(0)=p(2\pi)$. Wprowadźmy funkcję $f(\psi_0)=p(0)-p(2\pi)$. Funkcja ta przyjmuje wartość równą zero dla pewnej ψ_0 , której będziemy poszukiwać, tzn. dla wartości ψ_0 na powierzchni. Dla otrzymania zerowej wartości funkcji $f(\psi_0)$ zastosowano metodę stycznych Newtona.

W celu numerycznego rozwiązania równań Naviera-Stokesa zastosowano schemat Peasemana-Rachforda.

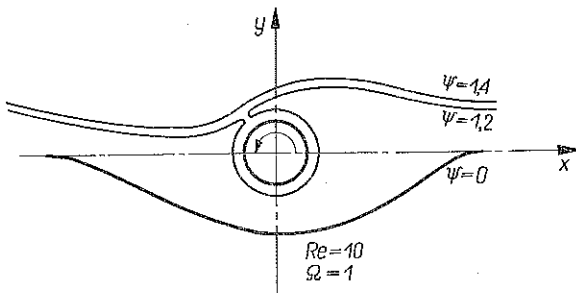
Obraz linii prądu dla $\Omega=0$ i $Re=10$ jest pokazany na rys. 3. Pola przepływu przy $Re=10$ i $\Omega=1$ i 3 są przedstawione

na rys. 4 i 5. Zauważmy, że dla takich prędkości obrotu nie ma stagnacji strefy zawirowań, którą wyraźnie daje się zaobserwować przy $\Omega=0$ i $Re=10$. Pojawia się ona również przy mniejszych wartościach niż $\Omega=0$ i $R=10$.

Do obracającego się walca przylega warstwa cieczy, która obraca się razem z nim. Grubość warstwy wzrasta, gdy wzrasta Ω przy ustalonej liczbie Re i maleje, gdy Re wzrasta przy ustalonej prędkości obrotu. Warstwa cieczy jest umieszczona między oddzielającą się linią prądu i walcem. Średnia linia prądu pokazana na rys. 4 i 5 jest bliska oddzielającej się linii.



Rys. 3

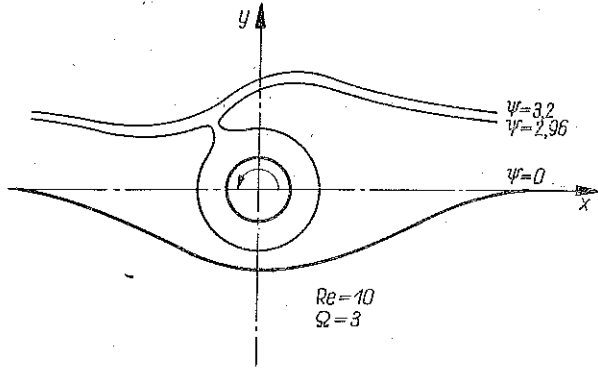


Rys. 4

Obracający się walec wytwarza oczywiście siłę nośną. Gdy Ω rośnie, wzrasta również bezwzględna wartość współczynnika siły nośnej c_y .

Główny wkład do siły nośnej pochodzi od ciśnienia działającego na walec ($\approx 90\%$ przy $Re=10$). Zależność modułu współczynnika siły nośnej od prędkości obrotu przy $Re=10$, jak również wpływ ciśnienia i składowych stycznych działających na obracający się walec jest pokazana na rys. 6. Zależność wartości bezwzględnej współczynnika aerodynamicznego $|k|=|c_y|/c_x$ od prędkości obrotu przy $Re=1, 5, 10$ jest przedstawiona na rys. 7. Należy zwrócić uwagę na nieliniowy charakter tej zależności.

Rozkład ciśnienia otrzymany z teorii idealnego przepływu o cyrkulacji $\Gamma=6\pi$ i rozkłady ciśnień na powierzchni walca są pokazane na rys. 8. Wartości ciśnień dla lepkich i idealnych przepływów różnią się znacznie. Jednakże przy $Re=5$ i 10

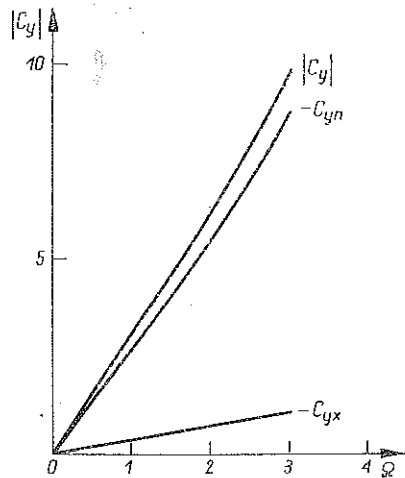


Rys. 5

charakter krzywych pokrywa się jakościowo. Punkty, w których ciśnienie osiąga wartość maksymalną i minimalną oraz wartość w tylnym krytycznym punkcie walca, są bardzo bliskie siebie.

Z kolei przedstawimy wyniki rozwiązania problemu przenoszenia sztywnych cząstek w rurze kołowej przez strumień lepkiej nieściśliwej cieczy. Problem ten jest szczególnie interesujący, gdyż daje jakościowe pojęcie o siłach działających na cząstki zawieszono w cieczy.

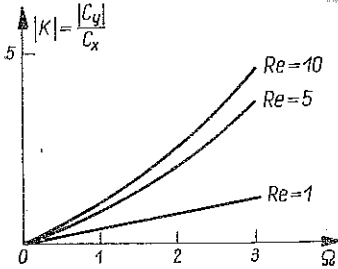
Rozważmy ruch cząstki walcowej umieszczonej w rurze, w której przepływa lepka nieściśliwa ciecz. Po pewnym okresie stabilizacji cząstka (której oś pokrywa się z osią rury) będzie poruszać się ze stałą prędkością. W układzie współrzędnych związanych z cząstką ruch cieczy będzie stacjonarny. Jeżeli transformacje Galileusza równań Naviera-Stokesa pozostają niezmiennicze, to problem ruchu cząstki sprowadza się do ustalonego przepływu wokół cząstki pewnego strumienia lepkiej nieściśliwej cieczy. Parametry strumienia są określone z warunku, że siły działające na cząstkę są równe zeru.



Rys. 6

Rozwiązanie numeryczne przedstawiono zarówno dla pojedynczej cząstki walcowej jak i dla ciała składającego się z dwóch cząstek połączonych razem wzdłuż osi rury z nieskończenie długim prętem. Załóżmy, że prędkość prądu w rurze we wspomnianym wyżej układzie współrzędnych jest skierowana z lewa na prawo.

Jeśli ciało składa się z dwóch cząstek, to lewa jest nazywana pierwszą, prawa—drugą. Założono, że na dostatecznie dużej odległości od ciała zaburzenie jest małe i rozkład prędkości dąży do rozkładu parabolicznego.



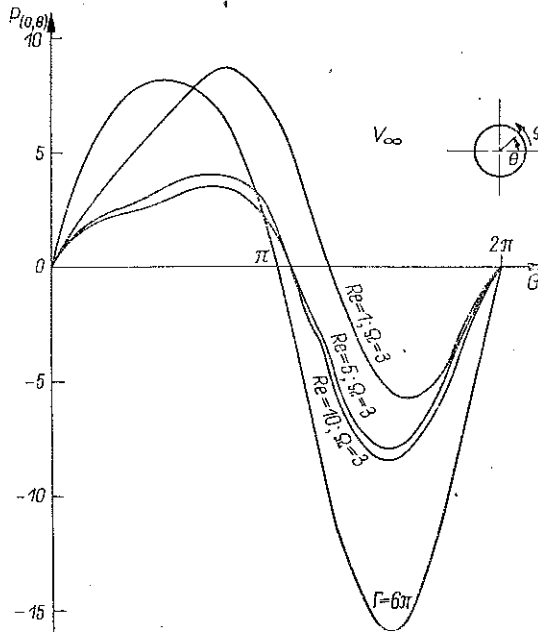
Rys. 7

Warunkami brzegowymi są zwykle przyjmowane warunki na ścianie oraz warunek symetrii względem osi rury.

Układ równań Naviera-Stokesa był aproksymowany schematem bezpośrednim z różnicami symetrycznymi i rozwiązany metodą Seidela.

Obliczenia były prowadzone dla przedziału liczb Reynoldsa od $Re=2$ do $Re=40$ dla cząstki pojedynczej i od $Re=2$ do $Re=15$ dla ruchu ciała złożonego. Pola przepływu dla przypadków ruchu swobodnego pojedynczej cząstki, dwóch połączonych

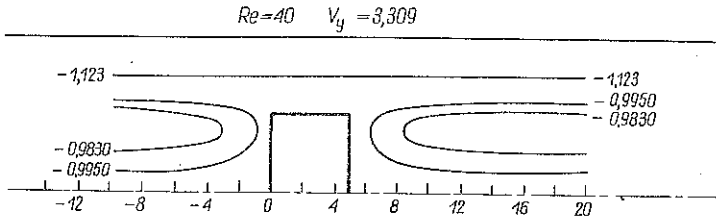
cząstek o równych promieniach i dwóch połączonych cząstek o różnych promieniach są pokazane na rys. 9, 10, 11 i 12. Na rysunkach podane są również wymiary cząstek.



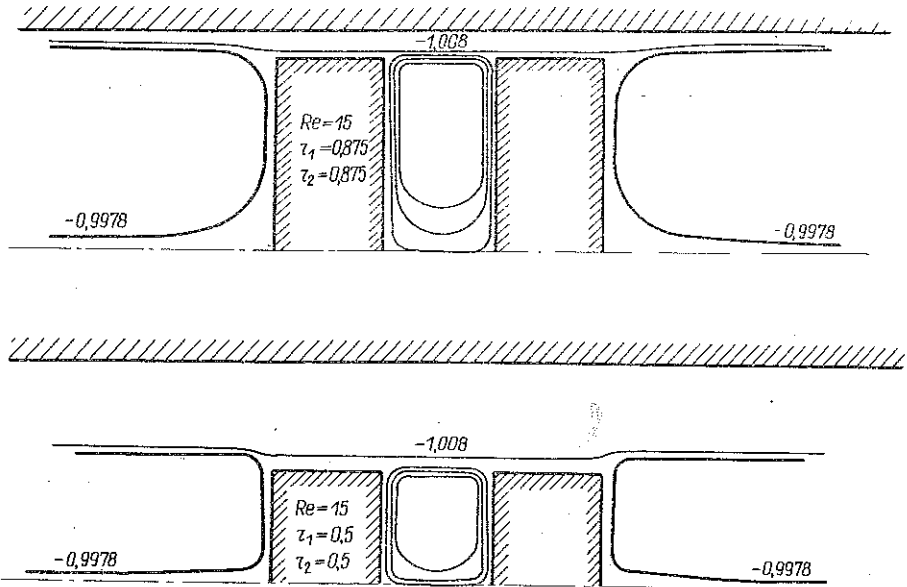
Rys. 8

Jeśli ciało składające się z dwóch cząstek porusza się, to między tymi cząstkami pojawiają się siły wzajemnego oddziaływania. Jeśli ciało składa się z dwóch cząstek o równych promieniach, to między cząstkami działają siły przyciągania, o ile w tym przypadku promienie cząstek wynoszą mniej niż $0,5 R$ (R jest promieniem rury). Jeśli promienie cząstek są większe niż $0,6 R$, to między nimi działają siły odpychania.

Jeśli ciało jest złożone z dwóch cząstek o różnych promieniach, to charakter współdziałania zależy od położenia cząstek; jeśli pierwsza cząstka ma promień większy niż druga, to między nimi powstają siły odpychania; w przypadku przeciwnym pojawiają się siły przyciągania.



Rys. 9



Rys. 10

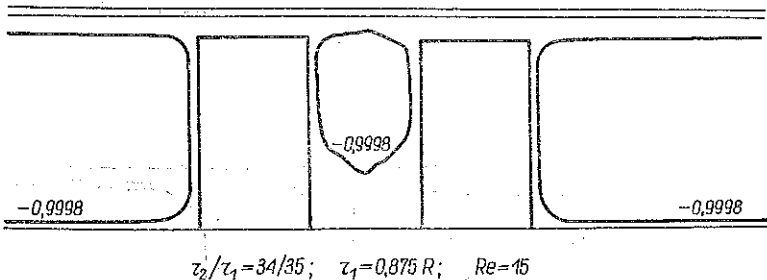
Siły wzajemnego oddziaływania między cząstkami dla ciała składającego się z cząstek o różnych promieniach osiągają wartość maksymalną dla określonego stosunku promieni cząstki tworzącej poruszające się ciało. Jeśli promienie cząstki dążą do zera, to siła wzajemnego oddziaływania dąży również do zera. Istnieje taki stosunek promieni zależny od odległości między cząstkami, przy którym siły oddziaływania są równe zeru.

Jako ostatni przykład rozważmy problem dwuwymiarowego przepływu dla rury przedzielonej półnieskończoną płytą. W celu otrzymania rozwiązania równań Naviera-Stokesa przyjęto hipotetyczny model cieczy nienewtonowskiej, w którym lokalna liczba Reynoldsa jest równa $Re/(1 + Re \varepsilon (\omega)^4)$ (Re jest tu aktualną liczbą Reynoldsa, ω jest wirowością w danym punkcie strumienia, a $\varepsilon > 0$ jest małą liczbą).

Aproksymację taką przyjęto po to, aby móc przeprowadzić obliczenia z możliwie dużymi liczbami Reynoldsa. Nieznane wartości na ściankach są otrzymywane w procesie liczenia. Wynika to z tworzenia się zaburzeń w pobliżu ścianki. W procesie obliczeń wielkość ε zaczyna maleć, skoro tylko zmiany ω na brzegu z kolejnymi iteracjami stają się mniejsze od $\delta > 0$,

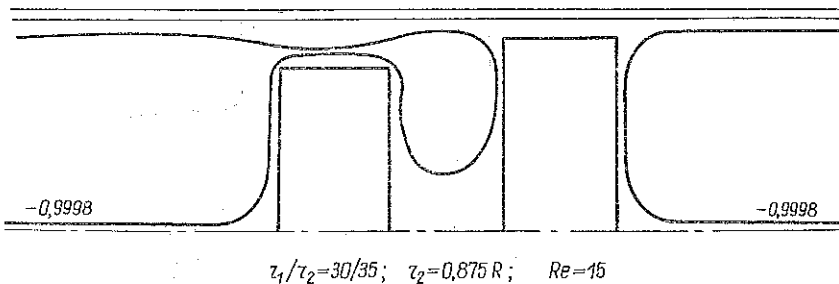
$$|\omega_0^{n+1} - \omega_0^n| < \delta$$

(ω_0^n jest wartością wirowości na ściance w n -tej iteracji).



Rys. 11

Układ równań Naviera-Stokesa był aproksymowany schematem Peacemana-Rachforda. Obliczenia były prowadzone dla dużego przedziału liczb Reynoldsa od $Re=1$ do $Re=1000$. Wykazano, że przyjęcie modelu cieczy nienewtonowskiej daje zysk czasu dla $Re=1000$. Dla niższych liczb Reynoldsa klasyczne obliczenia z $\varepsilon=0$ są bardziej efektywne.



Rys. 12

Profile prędkości w przekroju poprzecznym, leżącym na odległości $x=0,2$ od końca półnieskończonej płyty oraz profile prędkości w przekroju poprzecznym $x=0,3$ przy $Re=1000$ są przedstawione na rys. 13. Pole przepływu w rurze dla $Re=10$ jest pokazane na rys. 14.

Na zakończenie chcielibyśmy przedyskutować kilka problemów, jakie wyłoniły się w trakcie numerycznych obliczeń równań Naviera-Stokesa.

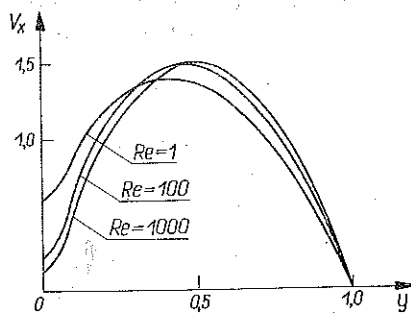
Jaka jest granica zastosowań opisanych metod? Zauważmy przede wszystkim, że zastąpienie równań różniczkowych pewnym algorytmem różnic skończonych może wprowadzić dodatkową lepkość «matematyczną». Jeśli po prawej stronie równania dla wirowości zamiast $\partial\omega/\partial\xi$ napiszemy przybliżone wyrażenie różnicowe $L_h(\omega)$, to w przybliżeniu jest ono równe

$$\frac{\partial\omega}{\partial\xi} + hA \frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2} + o(h^2),$$

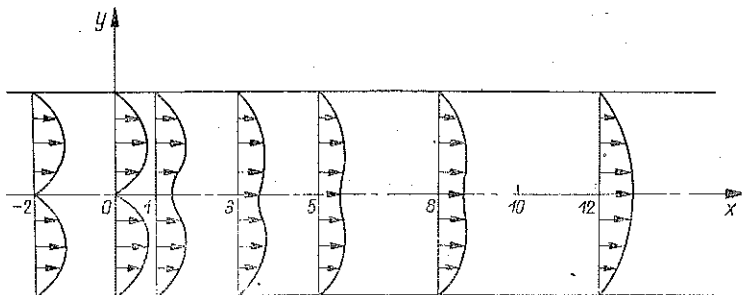
a zatem do lepkiego wyrazu fizycznego $\partial^2\omega/\partial\xi^2$ dodaliśmy «szkodliwy» wyraz

$$\text{Re } hA \frac{\partial\psi}{\partial\eta} \frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2}.$$

Gdy wartość liczby Re jest duża, ten dodany wyraz ze względów metodycznych może być większy od fizycznego wyrazu «lepkiego», tzn. nasze równanie różnicowe odpowiada zupełnie innej efektywnej liczbie Reynoldsa. Fakt ten znany jest dobrze od wielu lat. Zatem we wszystkich precyzyjnych i niezawodnych obliczeniach taka aproksymacja jest niedopuszczalna. Stosując w naszej pracy różnice centralne wykluczaliśmy wyraz związany z lepkością, a zatem błąd aproksymacji jest rzędu $\text{Re } h^2 (\partial^3\omega/\partial\xi^3)$. Chociaż wyrażenie to nie odpowiada lepkości, niemniej przy dużych wartościach liczby Reynoldsa może zupełnie zmienić charakter równania. Rozważania powyższe jasno ilustrują trudności związane z dużymi liczbami Reynoldsa. Aby otrzymać zadowalającą dokładność obliczeń, musi przede wszystkim być spełniony warunek $\text{Re } h^2 \ll 1$. Prowadzi on do układu równań algebraicznych (aproksymującego początkowe równanie różniczkowe cząstkowe) bardzo wysokiego rzędu. Rozwiązania tych równań nie można otrzymać nawet na najlepszych współczesnych maszynach cyfrowych.



Rys. 13



Rys. 14

Inne interesujące zjawisko zaobserwowaliśmy przy rozwiązywaniu zagadnień, w których występuje rozdzielanie. Wszystkie wspomniane wyżej metody zaczęły tu zawodzić przy pewnej dużej liczbie Reynoldsa (prawie takiej samej dla wszystkich metod). Jako przykład może tu posłużyć rozszerzanie się dyszy (rys. 1) przy $Re \approx 200$. Ta liczba nie jest jeszcze zbyt duża, tak że warunek $Re h^2 \ll 1$ może być spełniony bez większego trudu. Fakt utraty zbieżności metod można by tu próbować wyjaśnić niestatecznością ruchu fizycznego przy takich liczbach Reynoldsa (również w doświadczeniach z takimi liczbami Reynoldsa nie zaobserwowano ruchu stacjonarnego). Rzeczywiście metoda kolejnych przybliżeń lub «sztuczna» metoda niestacjonarna nie są bezpośrednio zależne od fizycznej niestateczności. Tak więc bardzo prawdopodobną wydaje się sugestia, że rozbieżność metod wynika z nieistnienia rozwiązania stacjonarnego. Oczywiście metody numeryczne nigdy nie są w stanie udowodnić istnienia lub nieistnienia rozwiązania, ale mogą dostarczyć hipotez mniej lub bardziej racjonalnych. Ostateczne wyjaśnienie tej kwestii jest już zadaniem matematyków.

Резюме

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО УРАВНЕНИЯМ НАВЬЕ-СТОКСА, ПРОВЕДЕННЫЕ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОМ ЦЕНТРЕ АН СССР

Исследовались три метода для численного решения уравнений Навье-Стокса: 1) стационарный метод последовательных приближений, 2) нестационарный «искусственный» метод и 3) нестационарный «действительный» метод. Граничные условия использовались во всех случаях одни и те же. Они представлялись в такой форме, что уравнения для вихря скорости ω и функции ψ тока ϕ разделялись.

Представлены некоторые результаты расчетов, которые проводились до наибольших возможных чисел Re . Было обнаружено для некоторых случаев, что, когда число Re достигает порядка нескольких сотен, все методы становятся расходящимися. Второй важной рассматриваемой проблемой является точность численных решений для потока с большими числами Re .

SUMMARY

STUDIES ON NAVIER-STOKES EQUATIONS AT THE COMPUTING CENTER OF USSR ACADEMY OF SCIENCES

Three methods are used for the numerical solution of Navier-Stokes equations: 1) «stationary method» of successive approximations, 2) non-stationary «artificial» method and 3) non-stationary «real» method. The boundary conditions used are in all cases the same. They are presented in such a form that the equations for vorticity ω and stream function ψ are separated.

Some results of computations are presented. The calculations have been carried out for the largest possible Re numbers. It was found in some cases that when Re -number reached the order of a few hundreds, all the methods become divergent. The second important problem considered is the accuracy of numerical calculations for the flow with large Re -numbers.

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 grudnia 1971 r.