

## STATYKA I DYNAMIKA MAŁO WYNIOSŁYCH POWŁOK ORTOTROPOWYCH O STAŁYCH KRZYWIZNACH

MARIAN KRÓLAK (ŁÓDŹ)

### 1. WSTĘP

W pracy rozwiązano zagadnienie zginania statycznego i drgań własnych powłok ortotropowych (o ortotropii materiałowej lub konstrukcyjnej) o stałych krzywiznach i stałym skreśnieniu powierzchni środkowej. Jest to uogólnienie rozwiązania Z. MAZURKIEWICZA [1], dotyczącego powłoki izotropowej w kształcie paraboloidy hiperbolicznej. Podobnie jak w pracy [1] rozpatrzono tu powłoki o małych wyniosłościach, prostokątne w planie i obciążone dowolnym obciążeniem normalnym do powierzchni środkowej (obciążenie może być rozłożone na dowolnej powierzchni prostokątnej w planie). Punktem wyjścia jest momentowa teoria powłok z założeniami Kirchhoffa-Love'a i uproszczeniami wprowadzonymi przez WŁASOWA [2] dla powłok o małych wyniosłościach, tzn. dla powłok spełniających następujące warunki:

$$(1.1) \quad \frac{h}{R_{\min}} = hk_{\max} \leq \frac{1}{30}, \quad \frac{f}{l_{\min}} \leq \frac{1}{5},$$

gdzie  $h$  oznacza grubość powłoki,  $R_{\min} = 1/k_{\max}$  minimalny promień krzywizny,  $f$  maksymalną wyniosłość,  $l_{\min}$  mniejszy wymiar powłoki.

Uproszczenia te, jak wiadomo, są równoznaczne z tym, że równania równowagi teorii momentowej, wyrażające sumę rzutów wszystkich sił działających na wycięty element powłoki na osie styczne do powierzchni środkowej, mają czysto bezmomentowy charakter. Poza tym przyjmuje się jeszcze, że powierzchnia środkowa powłoki ma metrykę geometrii euklidesowej.

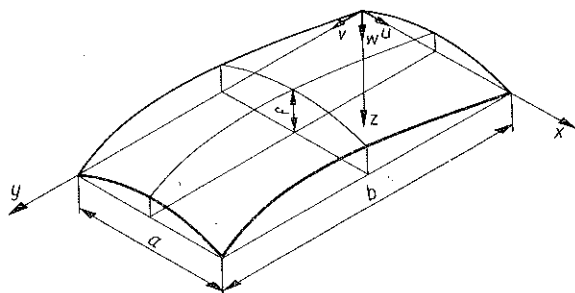
Ostatnie uproszczenie jest szczególnie istotne dla powłok o niezerowej krzywiznie Gaussa, tzn. dla powierzchni nierozwijalnych.

### 2. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA

Zgodnie z omówionymi wyżej uproszczeniami równania równowagi elementu wyciętego z powłoki przedstawionej na rys. 1 mają postać

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_{12}}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} + k_1 N_1 + 2k_{12} N_{12} + k_2 N_2 + \rho \omega^2 w + Z &= 0, \end{aligned}$$

gdzie  $N_1, N_{12}, N_2, M_1, M_{12}$  i  $M_2$  oznaczają odpowiednio siły i momenty przekrojowe odniesione do powierzchni środkowej, a działające w kierunku osi  $x$  i  $y$ ;  $k_1, k_{12}$  i  $k_2$  krzywizny i skrócenie powierzchni środkowej powłoki,  $\rho$  masę przypadającą na



Rys. 1

jednostkę pola powierzchni powłoki,  $\omega$  częstość drgań,  $w$  ugięcie powłoki oraz  $Z$  obciążenie. Dla odkształceń względnych i zmiany krzywizn powierzchni środkowej mamy

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x} - k_1 w, & \kappa_1 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial y} - k_2 w, & \kappa_2 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ \gamma_{12} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2k_{12} w, & \kappa_{12} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

Wzory na siły i momenty przekrojowe mają postać

$$(2.3) \quad \begin{aligned} N_1 &= A_1 \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \nu_{21} \frac{\partial v}{\partial y} - (k_1 + \nu_{21} k_2) w \right], & M_1 &= -D_1 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ N_2 &= A_2 \left[ \frac{\partial v}{\partial y} + \nu_{12} \frac{\partial u}{\partial x} - (k_2 + \nu_{12} k_1) w \right], & M_2 &= -D_2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ N_{12} &= A_{12} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2k_{12} w \right), & M_{12} &= -D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.4) \quad \begin{aligned} A_1 &= \frac{E_1 h}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, & D_1 &= \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}, \\ A_2 &= \frac{E_2 h}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, & D_2 &= \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}, \\ A_{12} &= Gh, & D_{12} &= \frac{Gh^3}{6} \end{aligned}$$

są sztywnościami na rozciąganie i zginanie (odpowiednio w kierunku osi  $x$  i  $y$ ) oraz na ścinanie i skręcanie,  $u, v$  przemieszczeniami punktów powierzchni środkowej w kierunku osi  $x$  i  $y$  (rys. 1),  $E_1, E_2$  modułami Younga, a  $\nu_{12}, \nu_{21}$  współczynnikami Poissona w kierunku osi  $x$  i  $y$ , wreszcie  $G$  modułem odkształcenia postaciowego.

Po podstawieniu do równań (2.1) wyrażeń (2.3) otrzymujemy następujący układ równań w przemieszczeniach:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} L_{11}(u) + L_{12}(v) + L_{13}(w) &= 0, \\ L_{21}(u) + L_{22}(v) + L_{23}(w) &= 0, \\ L_{31}(u) + L_{32}(v) + L_{33}(w) &= Z, \end{aligned}$$

w których wprowadzono następujące operatory różniczkowe:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} L_{11} &= A_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + A_{12} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\ L_{12} &= (A_1 \nu_{21} + A_{12}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \\ L_{13} &= -A_1(k_1 + \nu_{21}k_2) \frac{\partial}{\partial x} - 2A_{12}k_{12} \frac{\partial}{\partial y}, \\ L_{21} &= (A_2 \nu_{12} + A_{12}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \\ L_{22} &= A_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + A_{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \\ L_{23} &= -A_2(k_2 + \nu_{12}k_1) \frac{\partial}{\partial y} - 2A_{12}k_{12} \frac{\partial}{\partial x}, \\ L_{31} &= -(A_1k_1 + A_2\nu_{12}k_2) \frac{\partial}{\partial x} - 2A_{12}k_{12} \frac{\partial}{\partial y}, \\ L_{32} &= -(A_1k_1\nu_{21} + A_2k_2) \frac{\partial}{\partial y} - 2A_{12}k_{12} \frac{\partial}{\partial x}, \\ L_{33} &= D_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + (D_1\nu_{21} + D_2\nu_{12} + 2D_{12}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4}{\partial y^4} + \\ &\quad + A_1k_1(k_1 + \nu_{21}k_2) + 4k_{12}^2 A_{12} + A_2k_2(k_2 + \nu_{12}k_1) - p\omega^2. \end{aligned}$$

Jeżeli wprowadzimy funkcję przemieszczeń  $\Phi(x, y)$ , która spełnia równanie różniczkowe

$$(2.7) \quad A\Phi = Z,$$

gdzie

$$(2.8) \quad A = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix},$$

czyli

$$(2.9) \quad A = D_1 \left[ \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \left( v_{21} + \frac{D_2}{D_1} v_{12} + 2 \frac{D_{12}}{D_1} \right) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{D_2}{D_1} \frac{\partial^4}{\partial y^4} - \right. \\ \left. - \frac{\rho \omega^2}{D_1} \right] A_1 A_{12} \left\{ \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \left[ \frac{A_2}{A_{12}} (1 - v_{12} v_{21}) - \left( v_{21} + \frac{A_2}{A_1} v_{12} \right) \right] \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right\} + \\ + A_1 A_2 A_{12} (1 - v_{12} v_{21}) \left[ k_2^2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} - 4k_2 k_{12} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + 2(k_1 k_2 + 2k_{12}^2) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - \right. \\ \left. - 4k_1 k_{12} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + k_1^2 \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right],$$

to dla przemieszczeń otrzymujemy następujące formuły:

$$(2.10) \quad \begin{aligned} u &= (L_{12} L_{23} - L_{13} L_{22}) \Phi, \\ v &= (L_{21} L_{13} - L_{23} L_{11}) \Phi, \\ w &= (L_{11} L_{22} - L_{12} L_{21}) \Phi. \end{aligned}$$

Po wykorzystaniu wzorów (2.6) otrzymujemy

$$(2.11) \quad \begin{aligned} u &= A_1 A_{12} \left\{ (k_1 + v_{21} k_2) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} - 2k_{12} v_{21} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial y} + \left[ \frac{A_2}{A_{12}} (1 - v_{12} v_{21}) k_1 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{A_2}{A_1} (k_2 + v_{12} k_1) \right] \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial y^2} + \frac{A_2}{A_1} 2k_{12} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} \right\}, \\ v &= A_1 A_{12} \left\{ 2k_{12} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} + \left[ \frac{A_2}{A_{12}} (1 - v_{12} v_{21}) k_2 - (k_1 + v_{21} k_2) \right] \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial y} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{A_2}{A_1} v_{12} 2k_{12} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial y^2} + \frac{A_2}{A_1} (k_2 + v_{12} k_1) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} \right\}, \\ w &= A_1 A_{12} \left\{ \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + \left[ \frac{A_2}{A_{12}} (1 - v_{12} v_{21}) - v_{21} - \frac{A_2}{A_1} v_{12} \right] \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} \right\}. \end{aligned}$$

Wzory na siły i momenty przekrojowe otrzymujemy na podstawie wzorów (2.3) oraz (2.11):

$$(2.12) \quad \begin{aligned} N_1 &= -A_1 A_2 A_{12} (1 - v_{12} v_{21}) \left( k_2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} - 2k_{12} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x \partial y^3} + k_1 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} \right), \\ N_2 &= -A_1 A_2 A_{12} (1 - v_{12} v_{21}) \left( k_2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} - 2k_{12} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^3 \partial y} + k_1 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} \right), \\ N_{12} &= A_1 A_2 A_{12} (1 - v_{12} v_{21}) \left( k_2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^3 \partial y} - 2k_{12} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + k_1 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x \partial y^3} \right), \\ M_1 &= -D_1 A_1 A_{12} \left\{ \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^6} + \left[ \frac{A_2}{A_{12}} (1 - v_{12} v_{21}) - \frac{A_2}{A_1} v_{12} \right] \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^4 \partial y^2} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2.12) \quad & + \left[ \frac{A_2}{A_{12}} (1 - \nu_{12} \nu_{21}) \nu_{21} - \nu_{21}^2 + \frac{A_2}{A_1} (1 - \nu_{12} \nu_{21}) \right] \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^2 \partial y^4} + \frac{A_2}{A_1} \nu_{21} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial y^6} \Bigg\}, \\
 & \text{[c.d.]} \\
 M_2 = & -D_2 A_1 A_{12} \left\{ \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial y^6} + \left[ \frac{A_2}{A_{12}} (1 - \nu_{12} \nu_{21}) - \nu_{21} \right] \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^2 \partial y^4} + \right. \\
 & \left. + \left[ \left( \frac{A_2}{A_{12}} \nu_{12} + 1 \right) (1 - \nu_{12} \nu_{21}) - \frac{A_2}{A_1} \nu_{12}^2 \right] \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^4 \partial y^2} + \nu_{12} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^6} \right\}, \\
 M_{12} = & -D_{12} A_1 A_{12} \left\{ \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^5 \partial y} + \left[ \frac{A_2}{A_{12}} (1 - \nu_{12} \nu_{21}) - \nu_{21} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{A_2}{A_1} \nu_{12} \right] \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^3 \partial y^3} + \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x \partial y^5} \right\}.
 \end{aligned}$$

W dalszych rozważaniach ograniczymy się do następujących przypadków powłok:

a) powłoki, dla których  $k_1 = \text{const}$ ,  $k_2 = \text{const}$  i  $k_{12} = 0$ ;

b) powłoki, dla których  $k_{12} = \text{const}$ ,  $k_1 = k_2 = 0$ .

Aby otrzymać rozwiązanie dla tych przypadków, przyjmiemy funkcje  $\Phi(x, y)$  i  $Z(x, y)$  w postaci podwójnego sinusowego szeregu Fouriera:

$$\begin{aligned}
 (2.13) \quad \Phi(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \\
 Z(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Z_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y,
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \beta_n = \frac{n\pi}{b}.$$

Po podstawieniu funkcji (2.13) do równania (2.7) i po wykorzystaniu operatora (2.9) otrzymamy dla wymienionych wyżej powłok

$$(2.14) \quad \Phi_{mn} = \frac{Z_{mn}}{A_1 A_{12} D_1 \Omega_{mn}},$$

przy czym wielkości  $\Omega_{mn}$  określone są następującymi wzorami:

$$\begin{aligned}
 (2.15) \quad \Omega_{mn} = & \left[ \alpha_m^4 + \left( \nu_{21} + \frac{D_2}{D_1} \nu_{12} + 2 \frac{D_{12}}{D_1} \right) \alpha_m^2 \beta_n^2 + \frac{D_2}{D_1} \beta_n^4 - \frac{\rho \omega^2}{D_1} \right] A_{mn} + \\
 & + \frac{A_2}{D_1} (1 - \nu_{12} \nu_{21}) (k_2 \alpha_m^2 + k_1 \beta_n^2)^2
 \end{aligned}$$

dla powłok, dla których  $k_1 = \text{const}$ ,  $k_2 = \text{const}$  i  $k_{12} = 0$  oraz

$$\begin{aligned}
 (2.16) \quad \Omega_{mn} = & \left[ \alpha_m^4 + \left( \nu_{21} + \frac{D_2}{D_1} \nu_{12} + 2 \frac{D_{12}}{D_1} \right) \alpha_m^2 \beta_n^2 + \frac{D_2}{D_1} \beta_n^4 - \frac{\rho \omega^2}{D_1} \right] A_{mn} + \\
 & + \frac{A_2}{D_1} (1 - \nu_{12} \nu_{21}) 4k_{12}^2 \alpha_m^2 \beta_n^2
 \end{aligned}$$

dla powłok, dla których skręcenie jest stałe ( $k_{12} = \text{const}$ ) i  $k_1 = k_2 = 0$ .

Występujące we wzorach (2.14), (2.15) i (2.16) współczynniki  $A_{mn}$  i  $Z_{mn}$  wynoszą odpowiednio:

$$(2.17) \quad A_{mn} = \alpha_m^4 + \left[ \frac{A_2}{A_{12}} (1 - \nu_{12} \nu_{21}) - \nu_{21} - \frac{A_2}{A_1} \nu_{12} \right] \alpha_m^2 \beta_n^2 + \frac{A_2}{A_1} \beta_n^4,$$

$$Z_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b Z(x, y) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \, dx \, dy.$$

Po wyznaczeniu funkcji  $\Phi(x, y)$  przemieszczenia obliczamy ze wzorów (2.11), a siły i momenty przekrojowe ze wzorów (2.12).

### 3. WARUNKI BRZEGOWE

1. Rozpatrzmy najpierw podparcie przegubowe na wszystkich brzegach powłoki. Dla takiego podparcia mamy następujące warunki brzegowe:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} w = M_1 = 0 & \quad \text{dla} \quad x=0 \text{ i } x=a, \\ w = M_2 = 0 & \quad \text{dla} \quad y=0 \text{ i } y=b. \end{aligned}$$

Ponadto dla powłok o stałych krzywiznach bez skręcenia powierzchni środkowej ( $k_{12}=0$ ) mamy

$$(3.2) \quad \begin{aligned} v = N_1 = 0 & \quad \text{dla} \quad x=0 \text{ i } x=a, \\ u = N_2 = 0 & \quad \text{dla} \quad y=0 \text{ i } y=b, \end{aligned}$$

a dla powłok o stałym skręceniu (przy  $k_1 = k_2 = 0$ ) mamy

$$(3.3) \quad \begin{aligned} u = N_{12} = 0 & \quad \text{dla} \quad x=0 \text{ i } x=a, \\ v = N_{12} = 0 & \quad \text{dla} \quad y=0 \text{ i } y=b. \end{aligned}$$

Jeżeli  $p(x, y)$  przedstawia funkcję obciążenia normalnego do powierzchni środkowej powłoki (brak obciążeń brzegowych), to łatwo wykazać, że

$$(3.4) \quad \begin{aligned} Z_{mn} = p_{mn} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x, y) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \, dx \, dy, & \Phi_{mn} &= \frac{p_{mn}}{A_1 A_{12} D_1 \Omega_{mn}}, \\ w &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{mn} A_{mn}}{D_1 \Omega_{mn}} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \\ M_1 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{mn} A_{mn}}{\Omega_{mn}} (\alpha_m^2 + \nu_{21} \beta_n^2) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \\ M_2 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_2}{D_1} \frac{p_{mn} A_{mn}}{\Omega_{mn}} (\beta_n^2 + \nu_{12} \alpha_m^2) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y. \end{aligned}$$

Dla  $Z=p=0$  otrzymujemy równanie jednorodne, którego rozwiązanie określa częstotliwość drgań własnych powłoki:

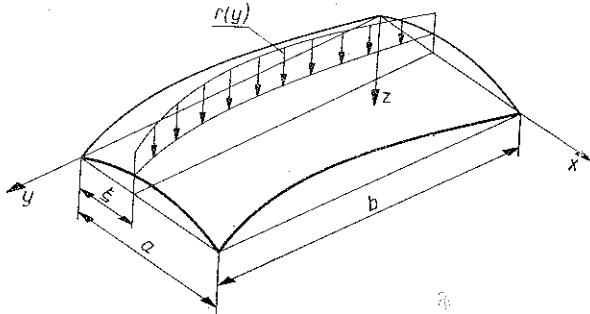
$$(3.5) \quad \omega_{mn} = \sqrt{\frac{D_1}{\rho} \frac{\Omega_{mn}^*}{A_{mn}}},$$

gdzie

$$\Omega_{mn}^* = \Omega_{mn} + \frac{\rho \omega^2}{D_1} A_{mn}.$$

2. Przejdźmy do przypadku powłoki utwierdzonej na brzegu  $x=0$  i podpartej przegubowo na pozostałych brzegach. Załóżmy, że na rozpatrywaną powłokę działa obciążenie  $r(y)$  w odległości  $x=\xi$  (rys. 2). Po rozwinięciu obciążenia  $r(y)$  w pojedynczy sinusowy szereg Fouriera mamy

$$(3.6) \quad r(y) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n \sin \beta_n y, \quad r_n = \frac{2}{b} \int_0^b r(y) \sin \beta_n y dy,$$



Rys. 2

a po rozwinięciu w podwójny sinusowy szereg Fouriera otrzymujemy

$$(3.7) \quad r(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} r_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y,$$

$$r_{mn} = \frac{2}{a} \frac{2}{b} \int_0^b r(y) \sin \beta_n y dy \sin \alpha_m \xi = \frac{2}{a} r_n \sin \alpha_m \xi.$$

Ugięcie powłoki wywołane obciążeniem  $r(y)$  można obliczać ze wzoru (3.4) podstawiając  $r_{mn}$  zamiast  $p_{mn}$ :

$$(3.8) \quad w_r(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n A_{mn}}{D_1 \Omega_{mn}} \sin \alpha_m \xi \sin \alpha_m x \sin \beta_n y.$$

Kąt ugięcia powłoki na brzegu  $x=0$  wywołany obciążeniem  $r(y)$  wynosi

$$(3.9) \quad \left[ \frac{\partial w_r}{\partial x} \right]_{x=0} = \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n A_{mn} \alpha_m}{D_1 \Omega_{mn}} \sin \alpha_m \xi \sin \beta_n y.$$

Przyjmijmy, że na brzegu powłoki  $x=0$  działają momenty zginające  $M(0, y)$ . Rozwińmy te momenty w pojedynczy sinusowy szereg Fouriera:

$$(3.10) \quad M(0, y) = \sum_{n=1}^{\infty} M_n^{(0)} \sin \beta_n y.$$

Zgodnie z twierdzeniem Maxwella praca momentów  $M(0, y)$  na kącie ugięcia (3.9) jest równa pracy obciążenia  $r(y)$  na ugięciu (w przekroju  $x=\xi$ ), wywołanym przez momenty  $M(0, y)$ . Stąd otrzymujemy wzór na ugięcie powłoki, wywołane momentami  $M(0, y)$ :

$$(3.11) \quad w_M(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n^{(0)} A_{mn} \alpha_m}{D_1 \Omega_{mn}} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y.$$

Ugięcie powłoki od obciążenia  $p(x, y)$  i momentów  $M(0, y)$  wynosi

$$(3.12) \quad w(x, y) = w_p(x, y) + w_M(x, y) = \\ = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( p_{mn} + \frac{2}{a} M_n^{(0)} \alpha_m \right) \frac{A_{mn}}{D_1 \Omega_{mn}} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y,$$

a zatem

$$(3.13) \quad Z_{mn} = p_{mn} + \frac{2}{a} M_n^{(0)} \alpha_m.$$

Z warunku utwierdzenia brzegu mamy

$$(3.14) \quad \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=0} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( p_{mn} + \frac{2}{a} M_n^{(0)} \alpha_m \right) \frac{A_{mn}}{\Omega_{mn}} \alpha_m \sin \beta_n y = 0$$

i ostatecznie

$$(3.15) \quad M_n^{(0)} = -\frac{a}{2} \frac{S_n^{(2)}}{S_n^{(1)}},$$

gdzie

$$(3.16) \quad S_n^{(2)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_{mn} A_{mn} \alpha_m}{\Omega_{mn}}, \quad S_n^{(1)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_{mn} \alpha_m^2}{\Omega_{mn}}.$$

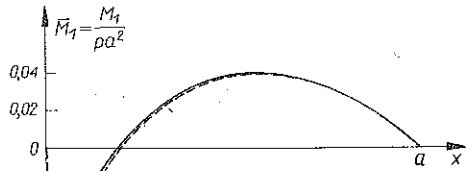
Znając wartości współczynników  $M_n^{(0)}$  można ze wzorów (3.12) obliczyć  $Z_{mn}$ , a ze wzoru (2.14)  $\Phi_{mn}$ . Znajomość funkcji przemieszczeń  $\Phi(x, y)$  pozwala obliczyć wszystkie wielkości statyczne w powłoce. Należy jednak zwrócić uwagę na to, że również momenty zginające otrzymamy w postaci szeregu sinusowego, ponieważ ugięcie powłoki rozwinięte jest w podwójny sinusowy szereg Fouriera. Wprawdzie w pobliżu brzegu utwierdzonego momenty te bardzo szybko rosną i w granicy dążą do momentu utwierdzenia, to jednak do obliczeń praktycznych bardziej uzasadnione jest zastosowanie momentów utwierdzenia z rozwinięcia w pojedynczy szereg Fouriera czyli ze wzoru (3.10).



Dla przykładu przytoczymy tu wyniki obliczeń przeprowadzone dla kwadratowej płyty izotropowej ( $\nu=0,3$ ), utwierdzonej na brzegu  $x=0$ , obciążonej równomiernie na całej powierzchni.

Przy uwzględnieniu 289 wyrazów podwójnego szeregu Fouriera otrzymano przedstawiony na rys. 3 wykres momentów  $M_1$  w przekroju  $y=b/2$

Linia przerywana na rys. 3 przedstawia wykres otrzymany przy zastosowaniu rozwinięcia w podwójny sinusowy szereg Fouriera, linia ciągła — rozwiązanie podane w pracy [3], a punkt  $A$  wartość momentu utwierdzenia otrzymaną ze wzoru (3.10). Z przedstawionego wykresu widać, że różnica między wynikami podanymi w pracy [3], a wynikami otrzymanymi w niniejszej pracy istnieje praktycznie dla  $0 \leq x \leq 0,03a$ . W związku z tym część  $OB$  wykresu (punkt  $B$  odpowiada wartości momentu  $M_1$  w punkcie  $x=0,03a$ ) należy zastąpić odcinkiem prostej  $AB$ .



Rys. 3

3. Postępując w sposób podobny jak pokazano wyżej dla powłoki utwierdzonej wzdłuż wszystkich brzegów, otrzymujemy:

$$(3.17) \quad Z_{mn} = p_{mn} + \frac{2}{a} \alpha_m [M_n^{(0)} - M_n^{(a)} (-1)^m] + \frac{2}{b} \beta_n [M_m^{(0)} - M_m^{(b)} (-1)^n].$$

Wartości współczynników  $M_n^{(0)}$ ,  $M_n^{(a)}$ ,  $M_m^{(0)}$  i  $M_m^{(b)}$  wyznacza się z następującego układu równań:

$$(3.18) \quad \begin{aligned} S_n^{(2)} + \frac{2}{a} M_n^{(0)} S_n^{(1)} - \frac{2}{a} M_n^{(a)} \bar{S}_n^{(1)} + \frac{2}{b} \beta_n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{M_m^{(0)} A_{mn} \alpha_m}{\Omega_{mn}} - \\ - \frac{2}{b} \beta_n (-1)^n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{M_m^{(b)} A_{mn} \alpha_m}{\Omega_{mn}} = 0, \\ \bar{S}_n^{(2)} + \frac{2}{a} M_n^{(0)} \bar{S}_n^{(1)} - \frac{2}{a} M_n^{(a)} S_n^{(1)} + \frac{2}{b} \beta_n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{M_m^{(0)} (-1)^m A_{mn} \alpha_m}{\Omega_{mn}} - \\ - \frac{2}{b} \beta_n (-1)^n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{M_m^{(b)} (-1)^m A_{mn} \alpha_m}{\Omega_{mn}} = 0, \\ S_m^{(2)} + \frac{2}{b} M_m^{(0)} S_m^{(1)} - \frac{2}{b} M_m^{(b)} \bar{S}_m^{(1)} + \frac{2}{a} \alpha_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n^{(0)} A_{mn} \beta_n}{\Omega_{mn}} - \\ - \frac{2}{a} \alpha_m (-1)^m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n^{(a)} A_{mn} \beta_n}{\Omega_{mn}} = 0, \end{aligned}$$

$$(3.18) \quad \begin{aligned} \bar{S}_m^{(2)} + \frac{2}{b} M_m^{(0)} \bar{S}_m^{(1)} - \frac{2}{b} M_m^{(b)} S_m^{(1)} + \frac{2}{a} \alpha_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n^{(0)} (-1)^n \Delta_{mn} \beta_n}{\Omega_{mn}} - \\ \text{[c.d.]} \quad - \frac{2}{a} \alpha_m (-1)^m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n^{(a)} (-1)^n \Delta_{mn} \beta_n}{\Omega_{mn}} = 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.19) \quad \begin{aligned} S_n^{(2)} &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_{mn} \Delta_{mn} \alpha_m}{\Omega_{mn}}, & \bar{S}_n^{(2)} &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_{mn} \Delta_{mn} \alpha_m (-1)^m}{\Omega_{mn}}, \\ S_n^{(1)} &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Delta_{mn} \alpha_m^2}{\Omega_{mn}}, & \bar{S}_n^{(1)} &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Delta_{mn} (-1)^m \alpha_m^2}{\Omega_{mn}}, \\ S_m^{(2)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{mn} \Delta_{mn} \beta_n}{\Omega_{mn}}, & \bar{S}_m^{(2)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{mn} \Delta_{mn} \beta_n (-1)^n}{\Omega_{mn}}, \\ S_m^{(1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta_{mn} \beta_n^2}{\Omega_{mn}}, & \bar{S}_m^{(1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta_{mn} \beta_n^2 (-1)^n}{\Omega_{mn}}. \end{aligned}$$

4. Dla powłoki utwardzonej na brzegach  $x=0$  i  $x=a$  i podpartej przegubowo na pozostałych brzegach rozwiązanie otrzymujemy na podstawie poprzedniego przypadku (przyjmując  $M_m^{(0)}=0$  i  $M_m^{(b)}=0$ )

$$(3.20) \quad \begin{aligned} Z_{mn} &= p_{mn} + \frac{2}{a} \alpha_m [M_n^{(0)} - M_n^{(a)} (-1)^n], \\ M_n^{(0)} &= \frac{a}{2} \frac{S_n^{(1)} S_n^{(2)} - \bar{S}_n^{(1)} \bar{S}_n^{(2)}}{(\bar{S}_n^{(1)})^2 - (S_n^{(1)})^2}, \\ M_n^{(a)} &= \frac{a}{2} \frac{\bar{S}_n^{(1)} S_n^{(2)} - S_n^{(1)} \bar{S}_n^{(2)}}{(\bar{S}_n^{(1)})^2 - (S_n^{(1)})^2}. \end{aligned}$$

W podobny sposób można otrzymać rozwiązania dla utwardzenia na brzegach  $x=0$  i  $y=0$ , jeżeli przyjmiemy  $M_n^{(a)}=0$  i  $M_m^{(b)}=0$  oraz na trzech brzegach, np.  $x=0$ ,  $y=0$  i  $y=b$ , jeżeli przyjąć  $M_n^{(a)}=0$ .

#### 4. ORTOTROPIA KONSTRUKCYJNA

Wyprowadzone wzory są poprawne dla ortotropii materiałowej, gdy spełniona jest zależność

$$(4.1) \quad \frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}.$$

Dla powłoki o ortotropii konstrukcyjnej, wywołanej symetrycznym uźebrowaniem dostatecznie gęsto rozmieszczonymi żebrami sztywnymi w swej płaszczyźnie, a za-

tem nie mającymi wpływu na sztywność ścinania i skręcania powłoki, można korzystać z wyprowadzonych wzorów, jeżeli przyjmie się

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[ 1 + 2 \frac{g_1}{t_1} \frac{\delta_1}{h} (1-\nu^2) \right], & A_{12} &= \frac{Eh}{2(1+\nu)}, \\
 A_2 &= \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \left[ 1 + 2 \frac{g_2}{t_2} \frac{\delta_2}{h} (1-\nu^2) \right], \\
 D_1 &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left\{ 1 + 2 \frac{g_1}{t_1} \frac{\delta_1}{h} \left[ 3 + 6 \frac{\delta_1}{h} + 4 \left( \frac{\delta_1}{h} \right)^2 \right] (1-\nu^2) \right\}, & D_{12} &= \frac{Eh^3}{12(1+\nu)}, \\
 (4.2) \quad D_2 &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left\{ 1 + 2 \frac{g_2}{t_2} \frac{\delta_2}{h} \left[ 3 + 6 \frac{\delta_2}{h} + 4 \left( \frac{\delta_2}{h} \right)^2 \right] (1-\nu^2) \right\}, \\
 \nu'_{12} &= \frac{\nu}{1 + 2 \frac{g_2}{t_2} \frac{\delta_2}{h} \left[ 3 + 6 \frac{\delta_2}{h} + 4 \left( \frac{\delta_2}{h} \right)^2 \right] (1-\nu^2)}, & \nu''_{12} &= \frac{\nu}{1 + 2 \frac{g_2}{t_2} \frac{\delta_2}{h} (1-\nu^2)}, \\
 \nu'_{21} &= \frac{\nu}{1 + 2 \frac{g_1}{t_1} \frac{\delta_1}{h} \left[ 3 + 6 \frac{\delta_1}{h} + 4 \left( \frac{\delta_1}{h} \right)^2 \right] (1-\nu^2)}, & \nu''_{21} &= \frac{\nu}{1 + 2 \frac{g_1}{t_1} \frac{\delta_1}{h} (1-\nu^2)},
 \end{aligned}$$

gdzie  $\nu'_{12}, \nu'_{21}$  oznaczają zastępcze współczynniki Poissona przy zginaniu,  $\nu''_{12}, \nu''_{21}$  zastępcze współczynniki Poissona przy rozciąganiu,  $g_1, g_2; \delta_1, \delta_2; t_1, t_2$  odpowiednio szerokości, wysokości i rozstawy żeber w kierunkach osi  $x$  i  $y$ .

## 5. OBLICZENIA NUMERYCZNE

Wyprowadzone wzory zostały zaprogramowane na elektronową maszynę cyfrową ZAM-2 Beta. Program obejmuje przypadki powłok podpartych przegubowo na wszystkich brzegach, utwierdzonych na jednym brzegu lub na dwóch przeciwległych brzegach (pozostałe brzegi podparte przegubowo), obciążonych równomiernym obciążeniem normalnym do powierzchni środkowej na dowolnej powierzchni prostokątnej. W wyniku obliczeń otrzymuje się wartości ugięć, momentów zginających, a w przypadku powłok podpartych przegubowo również częstości drgań własnych.

W celu zanalizowania wpływu kształtu powłoki na wartości momentów zginających rozpatrzono powłokę kulistą, walcową, w kształcie paraboloidy hiperbolicznej oraz płytę, podpartą przegubowo na wszystkich brzegach i obciążoną równomiernie na całej powierzchni. Pozostałe dane przyjęto następujące:

$$\frac{E_2}{E_1} = 0,25, \quad \frac{G}{E_1} = 0,1764, \quad \nu_{12} = \frac{1}{3}, \quad \frac{a}{b} = 1, \quad \frac{a}{h} = 500 \quad \text{i} \quad \frac{f}{h} = 5.$$

Tablica 1

Przekrój  $x=a/2$

$y/b$	Płyta		Paraboloida hiperboliczna		Powłoka walcowa		Powłoka kulista	
	$\bar{w} \cdot 10^3$	$\bar{M}_1 \cdot 10^2$	$\bar{w} \cdot 10^3$	$\bar{M}_1 \cdot 10^2$	$\bar{w} \cdot 10^3$	$\bar{M}_1 \cdot 10^2$	$\bar{w} \cdot 10^3$	$\bar{M}_1 \cdot 10^2$
0,0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,1	2,594	2,711	0,879	0,871	0,390	0,403	0,084	-0,002
0,2	4,788	4,917	1,537	1,434	0,600	0,529	0,125	-0,040
0,3	6,397	6,504	1,942	1,742	0,640	0,471	0,143	-0,054
0,4	7,367	7,456	2,148	1,887	0,607	0,369	0,154	-0,048
0,5	7,688	7,762	2,208	1,919	0,584	0,314	0,156	-0,051

Przekrój  $y=b/2$

$x/a$	Płyta		Paraboloida hiperboliczna		Powłoka walcowa		Powłoka kulista	
	$\bar{w} \cdot 10^3$	$\bar{M}_1 \cdot 10^2$	$\bar{w} \cdot 10^3$	$\bar{M}_1 \cdot 10^2$	$\bar{w} \cdot 10^3$	$\bar{M}_1 \cdot 10^2$	$\bar{w} \cdot 10^3$	$\bar{M}_1 \cdot 10^2$
0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,1	2,439	3,037	0,745	1,227	0,222	0,542	-	-
0,2	4,598	5,219	1,376	1,777	0,394	0,584	-	-
0,3	6,273	6,666	1,839	1,933	0,505	0,464	-	-
0,4	7,329	7,513	2,116	1,954	0,565	0,375	-	-
0,5	7,688	7,762	2,208	1,919	0,584	0,314	0,156	-0,051

Stosunek  $G/E_1$  dla ortotropii materiałowej obliczono ze wzoru

$$(5.1) \quad \frac{G}{E_1} = \frac{1}{1 + \frac{E_1}{E_2} + 2\nu_{12}},$$

podanego w pracy [4].

Tablica 2. Częstość drgań powłoki walcowej  $\bar{\omega}_{mn}$

$n \backslash m$	1	2	3
1	13,65	6,39	9,57
2	27,29	14,73	13,01
3	34,29	22,90	18,71

Wyniki obliczeń podano w tablicy 1 oraz na rys. 4, 5 i 6.

Wielkości  $\bar{w}$ ,  $\bar{M}_1$  i  $\bar{M}_2$ , występujące w tabl. 1, przedstawiają bezwymiarowe ugięcie powłoki i bezwymiarowe momenty zginające:

$$\bar{w} = \frac{D_1}{pa^4} w, \quad \bar{M}_1 = \frac{1}{pa^2} M_1, \quad \bar{M}_2 = \frac{1}{pa^2} M_2.$$

Częstość drgań własnych dla powłoki walcowej podano w tabl. 2, gdzie

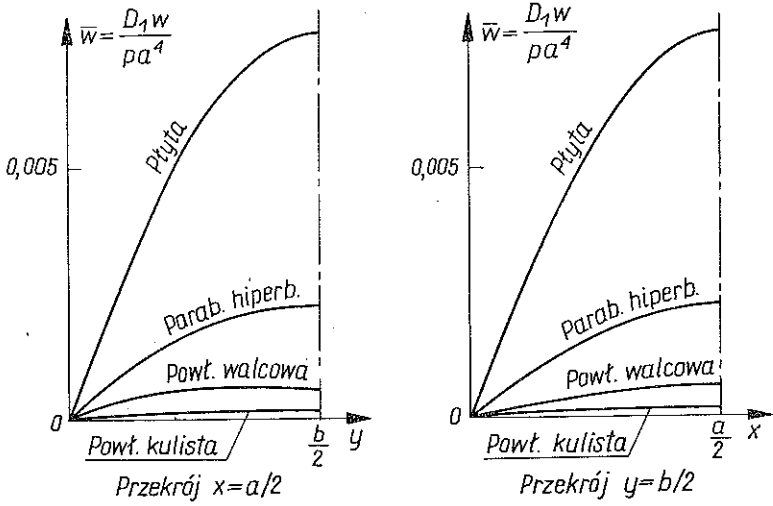
$$\bar{\omega}_{mn} = a^2 \sqrt{\frac{\rho}{D_1}} \omega_{mn}.$$

Tablica 3

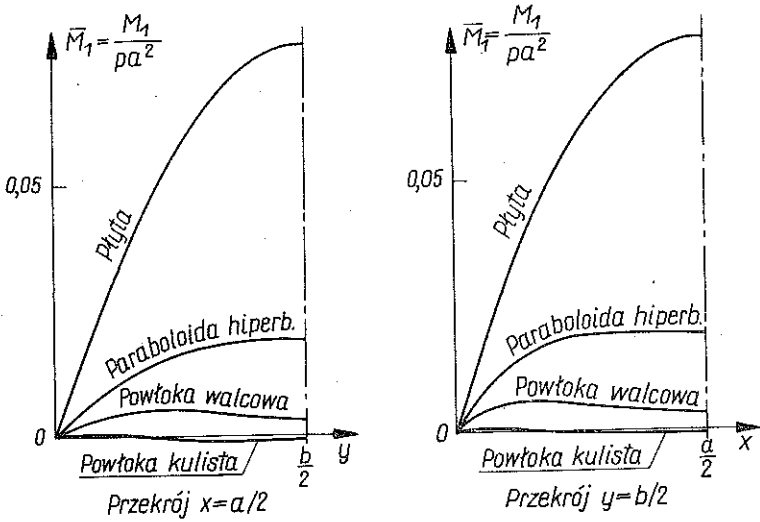
Przekrój $x=a/2$					
$y/b$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\bar{w} \cdot 10^3$	0,895	1,557	1,952	2,143	2,196
$\bar{M}_1 \cdot 10^2$	0,910	1,492	1,791	1,917	1,939
$\bar{M}_2 \cdot 10^2$	0,693	0,792	0,640	0,492	0,403
Przekrój $y=b/2$					
$x/a$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\bar{w} \cdot 10^3$	0,735	1,361	1,823	2,103	2,196
$\bar{M}_1 \cdot 10^2$	1,174	1,710	1,896	1,956	1,939
$\bar{M}_2 \cdot 10^2$	0,168	0,281	0,351	0,391	0,403

Wpływ wyniosłości na wartości statyczne w powłoce obserwowano na przykładzie powłoki walcowej, biorąc pod uwagę wyniki dla płyty i powłoki walcowej podane w tabl. 1 oraz wyniki podane dla powłoki walcowej o  $f/h=2,5$  (pozostałe dane jak wyżej) w tabl. 3.

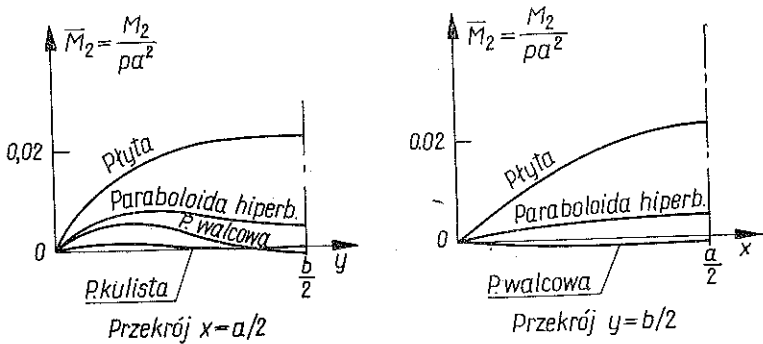
Wyniki obliczeń przedstawiono na rysunkach 7, 8 i 9.



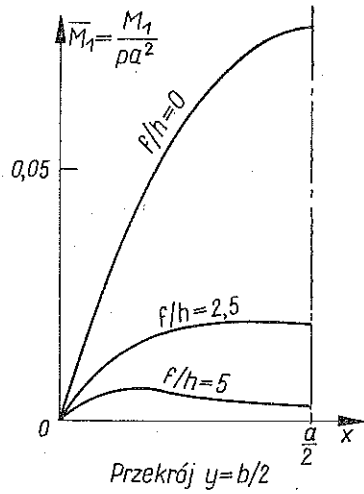
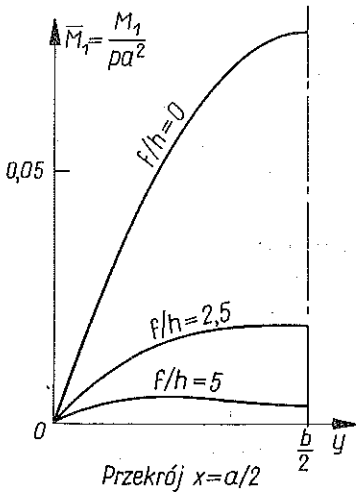
Rys. 4



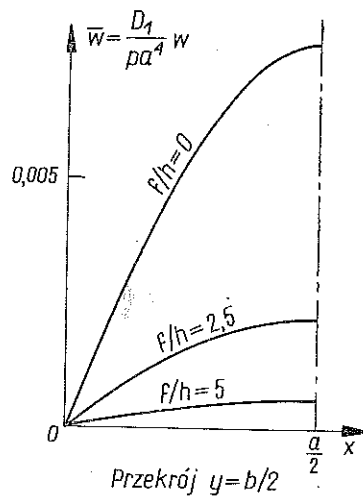
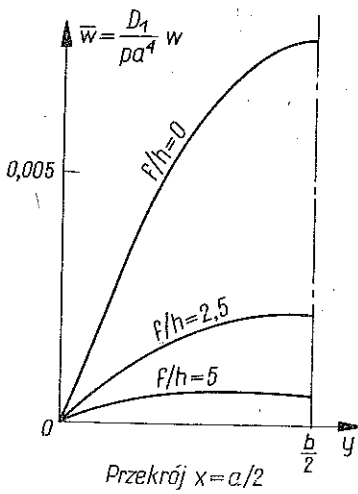
Rys. 5



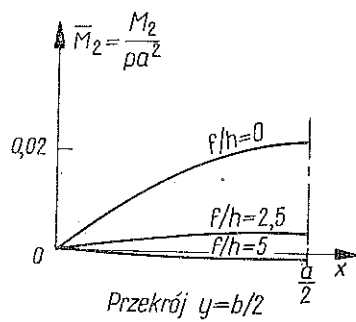
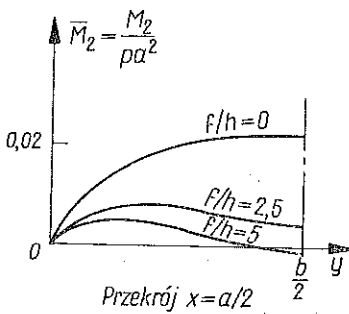
Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8



Rys. 9

## 6. WNIOSKI

Wyniki obliczeń potwierdzają znane własności, że w powłokach o zerowych krzywiznach lecz nie zerowym skręceniu (np. w powłokach w kształcie paraboloidy hiperbolicznej) momenty zginające są mniejsze niż w płycie o tych samych wymiarach. W powłokach z zerową krzywizną Gaussa (np. w powłokach walcowych) momenty zginające są mniejsze niż w powłokach o zerowych krzywiznach; w powłokach o dodatniej krzywiznie Gaussa momenty zginające są mniejsze niż w powłokach o zerowej krzywiznie Gaussa i często tak małe, że można tu stosować teorię bezmomentową. Z obliczeń widać, że ze wzrostem wyniosłości powłoki wartości momentów zginających maleją.

Na podstawie przeprowadzonych obliczeń można również stwierdzić, że zbieżność stosowanych szeregów jest dobra dla powłok o bardzo małych wyniosłościach.

Ze wzrostem wyniosłości zbieżność szeregów pogarsza się i dlatego trzeba uwzględniać coraz to większą liczbę wyrazów szeregu. Obecnie autor rozwiązuje powyższe zagadnienie dla powłok ortotropowych o dowolnych krzywiznach, dlatego też szczegółowsza analiza wielkości statycznych i dynamicznych oraz wpływ ortotropii na te wielkości zostaną podane w następnej publikacji.

## LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Z. MAZURKIEWICZ, *Statics and dynamics of a shell in a form of hiperbolic paraboloid*, Arch. Mech. Stos. 17, 3, 1965.
2. В. З. Власов, *Общая теория оболочек*, Москва-Ленинград 1949.
3. S. TIMOSZENKO, S. WOJNOWSKY-KRIEGER, *Teoria płyt i powłok*, Arkady, Warszawa 1959.
4. С. Г. Лехницкий, *Теория упругости анизотропного тела*, Москва-Ленинград 1950.
5. А. А. Назаров, *Основы теории и методы расчета пологих оболочек*, Москва-Ленинград 1966.
6. E. REISSNER, F. Y. M. WAN, *On the equations of linear shallow shell theory*, Studies of Applied Mathematics, 2, 48, 1969.
7. С. А. Амбарцумян, *Теория анизотропных оболочек*, Физматгиз, Москва 1961.
8. А. С. Христенко, А. Э. Калько, *Расчет прямоугольной в плане оболочки с помощью двойных тригонометрических рядов при локальном нагружении*, Труды Николаевского кораблестроительного ин., 1971, вып. 46.
9. И. В. Слезингер, *К расчету тонких пологих оболочек с прямоугольным планом*, Сборник «Исследования по теории сооружений» Выпуск 18, Стройиздат, Москва 1970.
10. H. DÜBDECK, *Die Biegetheorie der flachen hyperbolischen Paraboloidschalen  $z=cxy$* , Ing. Arch., 31, 1962.

## Резюме

## СТАТИКА И ДИНАМИКА ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК МАЛОЙ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

Работа посвящена задачам статического изгиба и собственных колебаний ортотропных оболочек постоянной кривизны и постоянного кручения срединной поверхности. Рассмотрены в ней прямоугольные в плане оболочки, нагруженные произвольными силами, перпендикулярными к срединной поверхности.



Решение системы дифференциальных уравнений в частных производных получено путем применения рядов Фурье и введения функции перемещений. Работа иллюстрируется рядом численных примеров.

## SUMMARY

STATICS AND DYNAMICS OF SHALLOW ORTHOTROPIC SHELLS  
WITH CONSTANT CURVATURES

The paper deals with the problems of static bending and free vibrations of orthotropic shells with constant curvatures and a constant twist of the middle surface of the shell. Shallow shells with a rectangular projection are considered; arbitrary load is normal to the middle surface.

The solution of the system of partial differential equations is obtained by means of the Fourier series and the displacement potentials. The paper is illustrated by several numerical examples.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 14 grudnia 1971 r.*

---