

OBLICZANIE SKOŃCZONYCH SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH UGIĘĆ PRĘTÓW SŁABO ZAKRZYWIONYCH

MARIA RADWAŃSKA i ZENON WASZCZYSZYN (KRAKÓW)

1. UWAGI WSTĘPNE

Trudności występujące przy obliczaniu ugięć sprężysto-plastycznych prętów omówiono szczegółowo w pracy [12]. Na postać równań i ich rozwiązanie mają wpływ m.in. takie czynniki, jak kształt przekroju poprzecznego i wzmocnienie materiału. Trudności te można pokonać przez zastosowanie wielopunktowego przekroju zastępczego i aproksymowanie rzeczywistej charakterystyki materiału $\sigma(\varepsilon)$ odcinkowoliniowym wzmocnieniem.

Przekroje wielopunktowe zostały zaproponowane przez J. ORKISZA [7]. Były one wykorzystane przez J. ORKISZA i M. ŻYCKOWSKIEGO do obliczania zarówno małych [8], jak też dużych ugięć [10] prętów prostych. Taki typ przekroju poprzecznego został przyjęty przez J. ORKISZA [9] do obliczania ugięć pręta słabo zakrzywionego. W wymienionych pracach rozważano pręty o osi nierozciągliwej.

W istniejących pracach na temat dużych ugięć prętów słabo zakrzywionych obok tego założenia wprowadzono szereg innych uproszczeń. I tak H. NAGAO [5] przyjmując wielokrotne liniowe wzmocnienie uwzględnia tylko wpływ momentu zginającego na ugięcia. E. T. ONAT i L. S. SHU [6] oraz Ł. M. BIELEŃKI [1] zajmują się dużymi przemieszczeniami sztywnoplastycznych łuków. Zestawienie innych prac, w których przyjmowano dalsze uproszczenia, podano w [13].

Celem naszej pracy jest uzyskanie rozwiązania dla skończonych ugięć pręta sprężysto-plastycznego przy pominięciu założenia o nierozciągliwej osi. W przypadku rozciągliwego pręta prostego, pomimo ogólniejszego założenia, otrzymano w pracy [12] rozwiązanie prostsze niż przy nierozciągliwej osi. Dzięki zastosowaniu przekroju wielopunktowego i przyjęciu wielokrotnego liniowego wzmocnienia materiału postać wyprowadzonych w artykule [12] podstawowych równań była taka sama jak dla liniowo sprężystego materiału. Rozwiązanie otrzymano w całkach eliptycznych, czego nie można było osiągnąć dla pręta o osi nierozciągliwej [10].

Praca nasza jest próbą otrzymania ścisłego rozwiązania dla pręta słabo zakrzywionego. Jak wykazemy, rozwiązanie podstawowego równania linii ugięcia można uzyskać jedynie w postaci uwikłanej, mało przydatnej do obliczeń numerycznych.

Dlatego w dalszym ciągu zajmiemy się opracowaniem algorytmu numerycznego rozwiązywania podstawowego układu równań opierając się na metodzie półodwrotnej. Metoda ta, polegająca na zamianie zadania brzegowego na początkowe, została

wykorzystana przez J. V. HUDDLESTONA [3] do rozwiązywania klasycznego zadania «elastyki» Eulera (por. [11]), a w pracach [2] i [13] posłużono się nią do obliczania skończonych ugięć łuków sprężysto-plastycznych.

Metoda półodwrotna jest wygodna do prowadzenia obliczeń na komputerze. Odpadają przy tym znaczne trudności «zszywania» rozwiązań z różnych przedziałów uplastycznienia pręta.

Dzięki postaci wyprowadzonych przez nas równań pręta słabo zakrzywonego będzie można obniżyć rząd zagadnienia brzegowego, co w porównaniu z pracą [13] pozwoli na skrócenie algorytmu i czasu obliczeń.

W pracy przyjmujemy następujące założenia:

1. Pręt jest monosymetryczny, smukły i słabo zakrzywiony.
2. Rozważania geometryczne ograniczamy do osi pręta; jest spełnione prawo płaskich przekrojów.
3. Pręt jest nieważki, obciążony siłami i momentami skupionymi w płaszczyźnie symetrii przekroju, która pokrywa się z główną płaszczyzną zginania.
4. Rozważamy jednoosiowy stan naprężeń pomijając wpływ naprężeń stycznych i kontaktowych na ugięcia i uplastycznienie pręta.
5. Rozważamy małe odkształcenia, tzn. stosujemy miarę Cauchy'ego, a naprężenia odnosimy do pierwotnego przekroju pręta; dopuszczamy duże przemieszczenia.
6. Pręt zbudowany jest z materiału sprężysto-plastycznego, którego charakterystykę $\sigma(\epsilon)$ aproksymujemy odcinkowoliniową funkcją, przy czym własności na ściskanie i rozciąganie mogą być różne; rozważamy jedynie procesy czynne.
7. Przyjmujemy zastępczy przekrój poprzeczny w postaci r skupionych powierzchni rozmieszczonych wzdłuż osi symetrii przekroju.

W pracy będziemy posługiwali się wielkościami bezwymiarowymi, oznaczając je małymi literami; wielkości fizyczne opiszemy dużymi literami bądź nadkreśleniami. Poniżej zestawiliśmy główne oznaczenia:

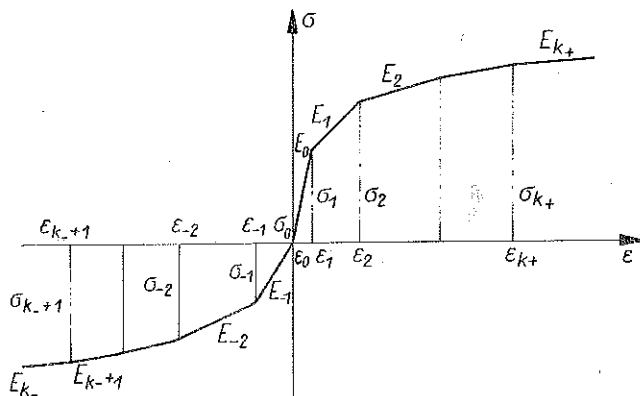
- | | |
|----------------------------------|---|
| ξ, η, x, y | bezwymiarowe współrzędne kartezjańskie materialne i przestrzenne, |
| \tilde{x}, \tilde{y} | bezwymiarowe współrzędne w układzie obróconym o kąt δ względem osi x, y , |
| λ, l | bezwymiarowe współrzędne krzywoliniowe materialne i przestrzenne, |
| $l=0, 1, \dots, L$ | numeracja punktów numerycznego całkowania, |
| F, H, H_1 | odpowiednio całkowite pole powierzchni, całkowita wysokość i maksymalna odległość skrajnej powierzchni «skupionej» od osi ciężkości przekroju poprzecznego, |
| $r=1, 2, \dots, R$ | numeracja powierzchni «skupionych», |
| $F_r, \zeta_r = Z_r/H_1$ | pole powierzchni skupionej r i jej bezwymiarowa odległość od osi pręta, |
| ρ, r | bezwymiarowe promienie krzywizn osi pręta przed i po odkształceniu, |
| ψ, φ | kąt nachylenia stycznej do osi pręta względem osi x przed i po odkształceniu, |
| $\tilde{\psi}, \tilde{\varphi}$ | kąty pomiędzy styczną do pręta i osią \tilde{x} , |
| $\gamma = L/H, \gamma_1 = L/H_1$ | parametry opisujące pręt, |
| ϵ_s, κ | odkształcenie osi i krzywizna pręta, |

- $s = \sigma/\sigma_1, e = \varepsilon/\varepsilon_1$ bezwymiarowe naprężenie i względne odkształcenie,
- $s_k, e_k, \alpha_k = E_k/E_0$ naprężenie, odkształcenie i moduł styczny w punkcie k wykresu $\sigma(\varepsilon)$,
- $k = k_-, k_- + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, k_+ - 1, k_+$ numeracja odcinków $\sigma(\varepsilon)$ wykresu,
- $p = P/\sigma_1 F$ bezwymiarowa zewnętrzna siła skupiona,
- $p = P/2\sigma_1 F_0, n = N/2\sigma_1 F,$ odpowiednio siła zewnętrzna, siła podłużna i moment zginający
- $m = M/\sigma_1 F_0 H$ w przekroju symetrycznym dwupunktowym,
- $(\cdot)' = d/d\lambda$ pochodna względem bezwymiarowej współrzędnej materialnej λ ,
- A_i, B_i współczynniki w związkach fizycznych,
- $a_i = A_i/\sigma_1 F, b_i = B_i/\sigma_1 F$ bezwymiarowe współczynniki w związkach fizycznych.

2. WYPROWADZENIE RÓWNAŃ LINII UGIĘCIA

Rozważamy pręt zbudowany z materiału o charakterystyce przedstawionej na rys. 1 i o przekroju wielopunktowym, złożonym z R powierzchni skupionych (rys. 2). Zgodnie z zasadą płaskich przekrojów, którą możemy stosować w prętach słabo zakrzywionych, odkształcenie wyraża się wzorem

$$(2.1) \quad \varepsilon = \varepsilon + \kappa Z = \varepsilon_s + \kappa \zeta H_I.$$



Rys. 1

Wyrażenie na naprężenie normalne dla przekroju wielopunktowego i materiału o liniowym odcinkowym wzmocnieniu zostało wyprowadzone w pracy J. ORKISZA i M. ŻYCZKOWSKIEGO [8]. Przedstawia się ono następująco:

$$(2.2) \quad \sigma = \sigma_k + E_k(\varepsilon - \varepsilon_k) = \sigma_k + E_k(\varepsilon_s - \varepsilon_k + \kappa \zeta H_I) \quad \text{dla} \quad \varepsilon_k \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{k+1}.$$

Wzory na siłę podłużną i moment zginający możemy przedstawić w postaci

$$(2.3) \quad N = \sum_r \sigma_r F_r = \sum_r F_r [\sigma_{k(r)} + E_{k(r)}(\varepsilon_s - \varepsilon_{k(r)} + \kappa \zeta_r H_I)]$$

oraz

$$(2.4) \quad M = \sum_r \sigma_r Z_r F_r = H_I \sum_r [\sigma_{k(r)} + E_{k(r)}(\varepsilon_s - \varepsilon_{k(r)} + \kappa \zeta_r H_I)] F_r \zeta_r,$$

przy czym sumowanie wykonuje się dla wszystkich powierzchni $r=1, 2, \dots, R$. Indeks $k(r)$ przybiera wartości $k(r)=k_-, k_-+1, \dots, k_+-1, k_+$ dobrane tak, aby był spełniony warunek $\varepsilon_{k(r)} = \varepsilon_k \leq \varepsilon_r \leq \varepsilon_{k+1}$. Powyższe wzory napiszemy w skróconej postaci:

$$(2.5) \quad N = B_0 + A_0 \varepsilon_s + H_I A_1 \kappa$$

oraz

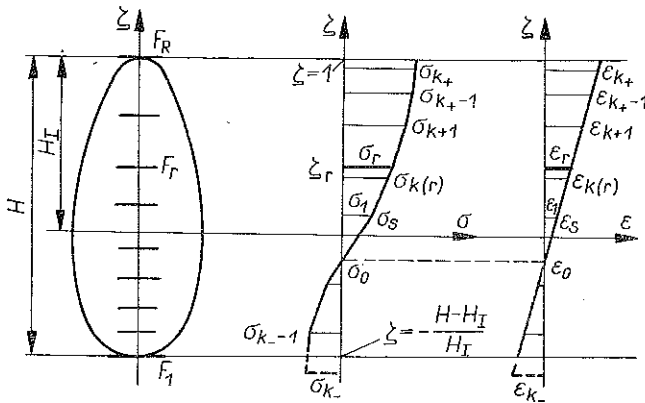
$$(2.6) \quad \frac{M}{H_I} = B_1 + A_1 \varepsilon_s + H_I A_2 \kappa,$$

gdzie stałe A_i, B_i wynoszą

$$A_i = \sum_r E_{k(r)} F_r \zeta_r^i,$$

$$(2.7) \quad B_i = \sum_r (\sigma_{k(r)} - \varepsilon_{k(r)} E_{k(r)}) F_r \zeta_r^i \quad \text{dla } i=0, 1, 2,$$

$$a_i = A_i / \sigma_1 F, \quad b_i = B_i / \sigma_1 F.$$



Rys. 2

Korzystając ze wzorów Cramera, możemy rozwiązać układ równań (2.5) i (2.6) względem ε_s i κ :

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \varepsilon_s &= \alpha_1 M + \alpha_2 N + \alpha_3, \\ \kappa &= \beta_1 M + \beta_2 N + \beta_3, \end{aligned}$$

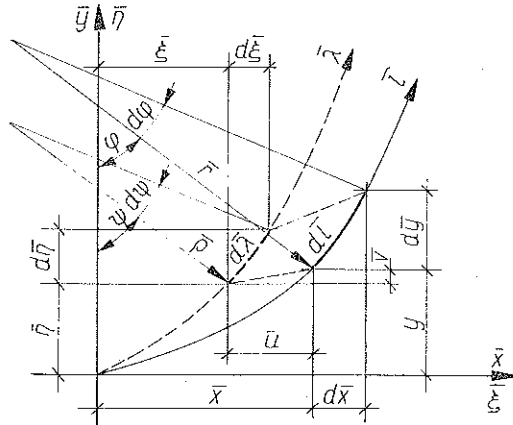
gdzie

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{A_1}{(A_1^2 - A_0 A_2) H_I}, & \beta_1 &= -\frac{A_0}{(A_1^2 - A_0 A_2) H_I^2}, \\ \alpha_2 &= -\frac{A_2}{(A_1^2 - A_0 A_2)}, & \beta_2 &= \frac{A_1}{(A_1^2 - A_0 A_2) H_I}, \\ \alpha_3 &= \frac{A_2 B_0 - A_1 B_1}{(A_1^2 - A_0 A_2)}, & \beta_3 &= \frac{A_0 B_1 - A_1 B_0}{(A_1^2 - A_0 A_2) H_I}. \end{aligned}$$

W pracy [13] zostały wyprowadzone związki geometryczne opisujące odkształcenie pręta słabo zakrzywionego o rozciągłej osi na podstawie miary Cauchy'ego (teoria małych odkształceń):

$$(2.10) \quad l' = 1 + \varepsilon_s, \quad \kappa = \frac{1}{L} \left(\varphi' - \frac{l'}{\rho} \right),$$

przy czym odkształcenie elementu pręta przedstawia rys. 3.



Rys. 3

Równania geometryczne różnią się wyrażeniem na krzywiznę od analogicznych równań odnoszących się do prętów prostych [12].

Łącząc równania fizyczne (2.8) z geometrycznymi (2.10) otrzymamy

$$(2.11) \quad \begin{aligned} l' &= 1 + \alpha_1 M + \alpha_2 N + \alpha_3, \\ \frac{1}{L} \left(\varphi' - \frac{l'}{\rho} \right) &= \beta_1 M + \beta_2 N + \beta_3. \end{aligned}$$

Z równania (2.11)₂ obliczymy wzór na moment zginający:

$$(2.12) \quad M = \frac{1}{L\beta_1} \left(\varphi' - \frac{l'}{\rho} \right) - \frac{\beta_2}{\beta_1} N - \frac{\beta_3}{\beta_1},$$

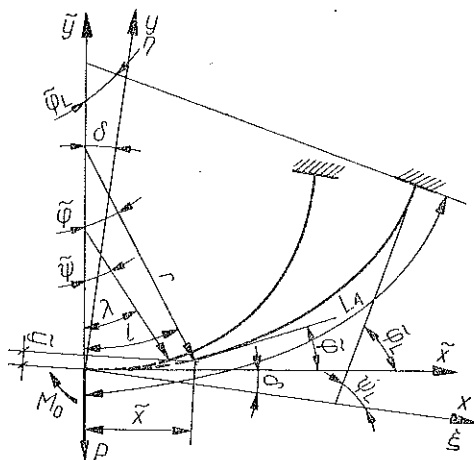
który podstawimy do (2.11)₁:

$$(2.13) \quad \begin{aligned} l' &= \frac{\rho\alpha_1}{\beta_1\rho L + \alpha_1} \varphi' + \frac{L\rho}{\beta_1\rho L + \alpha_1} (\beta_1 - \alpha_1\beta_3 + \alpha_3\beta_1) + \\ &+ \frac{L\rho}{\beta_1\rho L + \alpha_1} (\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2) N. \end{aligned}$$

Z rysunku 4, przedstawiającego obciążony pręt, określimy siłę podłużną i moment zginający w dowolnym przekroju pręta. Podobnie jak w pracach [11 i 12] zastososo-

wano układ współrzędnych prostoliniowych \tilde{x}, \tilde{y} , w którym oś \tilde{y} jest równoległa do kierunku działania siły P , co prowadzi do równań

$$(2.14) \quad N = P \sin \tilde{\varphi}, \quad M = - \int_0^{\lambda} Pl' \cos \tilde{\varphi} d\lambda + M_0.$$



Rys. 4

Wprowadzony dodatni moment odpowiada zgodnie ze wzorem (2.6) dodatniej krzywiznie κ . Różniczkowo-całkowe funkcje (2.14) różniczkujemy względem współrzędnej λ :

$$(2.15) \quad N' = P \cos \tilde{\varphi} \tilde{\varphi}', \quad M' = -Pl' \cos \tilde{\varphi}.$$

Dalsze przekształcenia polegają na zróżniczkowaniu równania (2.13), wprowadzeniu wyrażenia na l' według (2.13) do równania (2.15)₂ i na podstawieniu tak otrzymanych wyrażeń do zróżniczkowanego równania (2.11)₂. Opisaną drogą dojdziemy do równania

$$(2.16) \quad \tilde{\varphi}'' \frac{\rho \beta_1}{L\rho \beta_1 + \alpha_1} - \tilde{\varphi}' P \cos \tilde{\varphi} \frac{L\rho \beta_1 \beta_2 - L\rho \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_1}{L\rho \beta_1 + \alpha_1} + \\ + P \cos \tilde{\varphi} \frac{L^2 \rho \beta_1 (\beta_1 - \alpha_1 \beta_3 + \alpha_3 \beta_1)}{L\rho \beta_1 + \alpha_1} + P^2 \sin \tilde{\varphi} \cos \tilde{\varphi} \frac{L^2 \rho \beta_1 (\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2)}{L\rho \beta_1 + \alpha_1} = 0.$$

W ten sposób otrzymujemy podstawowe równanie napisane w postaci:

$$(2.17) \quad \tilde{\varphi}'' + C_1 \cos \tilde{\varphi} \tilde{\varphi}' + C_2 \cos \tilde{\varphi} - C_3 \sin \tilde{\varphi} \cos \tilde{\varphi} = 0,$$

gdzie bezwymiarowe współczynniki C_i wynoszą:

$$(2.18) \quad C_1 = \frac{PA_2}{(A_1^2 - A_0 A_2)\rho} = \frac{pa_2}{(a_1^2 - a_0 a_2)\rho}, \quad C_3 = \frac{P^2 \gamma_I^2}{A_1^2 - A_0 A_2} = \frac{p^2 \gamma_I^2}{a_1^2 - a_0 a_2}, \\ C_2 = \frac{P\gamma_I^2 (B_0 - A_0)}{A_1^2 - A_0 A_2} = \frac{p\gamma_I^2 (b_0 - a_0)}{a_1^2 - a_0 a_2},$$

Analogiczne równanie odnoszące się do prętów prostych otrzymano w pracach [10 i 12], różniących się założeniem dotyczącym wydłużalności osi. I tak dla pręta o nierozciągliwej osi równanie ma postać [10]:

$$(2.19) \quad \tilde{\varphi}'' + \bar{C}_1 \cos \tilde{\varphi} \tilde{\varphi}' + \bar{C}_2 \cos \tilde{\varphi} = 0,$$

natomiast zawarte w pracy [12] równanie dla pręta prostego o rozciągliwej osi przedstawia się następująco:

$$(2.20) \quad \tilde{\varphi}'' + \bar{C}_2 \cos \tilde{\varphi} + \bar{C}_3 \sin \tilde{\varphi} \cos \tilde{\varphi} = 0.$$

Okazało się, że w przypadku prętów prostych uwzględnienie rozciągliwości osi pozwala uogólnić a zarazem podać ostateczne rozwiązanie przy pomocy całek eliptycznych pierwszego rodzaju. Natomiast równanie (2.19) zostało doprowadzone przez J. ORKISZA do równania Abela drugiego rodzaju, które nie daje się efektywnie scałkować.

We wszystkich przytoczonych równaniach (2.17), (2.19) i (2.20) współczynniki C_i zależą jedynie od przyjętego przekroju zastępczego i stopnia uplastycznienia pręta w rozpatrywanym przekroju.

Oprócz równania (2.17) wyprowadzimy na podstawie (2.13) i wzorów

$$(2.21) \quad d\tilde{x} = dl \cos \tilde{\varphi}, \quad d\tilde{y} = dl \sin \tilde{\varphi}$$

dalsze podstawowe równania opisujące linię ugięcia:

$$(2.22) \quad \begin{aligned} l' &= D_1 - D_2 \sin \tilde{\varphi} + D_3 \tilde{\varphi}', \\ \tilde{x}' &= D_1 \cos \tilde{\varphi} - D_2 \sin \tilde{\varphi} \cos \tilde{\varphi} + D_3 \tilde{\varphi}' \cos \tilde{\varphi}, \\ \tilde{y}' &= D_1 \sin \tilde{\varphi} - D_2 \sin^2 \tilde{\varphi} + D_3 \tilde{\varphi}' \sin \tilde{\varphi}, \end{aligned}$$

gdzie bezwymiarowe współczynniki wynoszą:

$$(2.23) \quad \begin{aligned} D_1 &= \frac{\gamma_I \rho (B_0 - A_0)}{A_1 - \gamma_I \rho A_0} = \frac{\gamma_I \rho (b_0 - a_0)}{a_1 - \gamma_I \rho a_0}, \\ D_2 &= \frac{P \gamma_I \rho}{A_1 - \gamma_I \rho A_0} = \frac{p \gamma_I \rho}{a_1 - \gamma_I \rho a_0}, \\ D_3 &= \frac{A_1 \rho}{A_1 - \gamma_I \rho A_0} = \frac{a_1 \rho}{a_1 - \gamma_I \rho a_0}. \end{aligned}$$

3. ŚCISLE ROZWIĄZANIE RÓWNIANIA LINII UGIĘCIA

Do rozwiązania równania różniczkowego drugiego rzędu:

$$(3.1) \quad \tilde{\varphi}'' + C_1 \cos \tilde{\varphi} \tilde{\varphi}' + C_2 \cos \tilde{\varphi} + C_3 \sin \tilde{\varphi} \cos \tilde{\varphi} = 0$$

zastosowano przekształcenia i podstawienia podobne jak w pracach [10 i 12]. Stałe C_1, C_2, C_3 wyrażone są wzorami (2.18); zależą one, jak już wspomnieliśmy, od przyjętego zastępczego przekroju poprzecznego i stopnia jego uplastycznienia materiału w rozpatrywanym przekroju, natomiast w przypadku pręta jednorodnego nie są funkcjami zmiennej λ .

Dzięki podstawieniu

$$(3.2) \quad \sin \tilde{\varphi} = v$$

doprowadzimy do następującego nieliniowego równania:

$$(3.3) \quad v''(1-v^2) + vv'^2 + C_1 v' (1-v^2)^{3/2} + (C_1 v + C_2) (1-v^2)^2 = 0.$$

Stosujemy kolejne podstawienie:

$$(3.4) \quad v' = t(v), \quad v'' = tt',$$

które sprowadzi równanie (3.3) do nieliniowego równania rzędu pierwszego:

$$(3.5) \quad tt' = f_2(v)t^2 + f_1(v)t + f_0(v),$$

gdzie

$$(3.6) \quad \begin{aligned} f_0(v) &= -(C_3 v + C_2) (1-v^2), \\ f_1(v) &= -C_1 (1-v^2)^{1/2}, \\ f_2(v) &= -\frac{v}{1-v^2}. \end{aligned}$$

Otrzymane równanie (3.5) jest równaniem Abela drugiego rodzaju, które przez podstawienie [4]

$$(3.7) \quad z(v) = tE, \quad E = \exp\left(-\int f_2 dx\right) = \frac{1}{(1-v^2)^{1/2}}$$

przekształcimy w równanie

$$(3.8) \quad zz' = -C_1 z - (C_3 v + C_2).$$

Ostatnie podstawienie

$$(3.9) \quad z = (C_3 v + C_2)w, \quad z' = C_3 w + (C_3 v + C_2)w'$$

prowadzi do równania o rozdzielonych zmiennych

$$(3.10) \quad \frac{dw}{C_3 v + C_2} = \frac{w dw}{4(C_3 w^2 + C_1 w + 1)},$$

z którego po scałkowaniu otrzymujemy

$$(3.11) \quad v = -\frac{C_2}{C_3} + \frac{\exp\left(\frac{C_1}{2} \int \frac{dw}{C_3 w^2 + C_1 w + 1}\right) \frac{C}{C_3}}{(C_3 w^2 + C_1 w + 1)^{1/2}} \frac{C}{C_3}.$$

Otrzymanie ścisłego rozwiązania na kąt $\tilde{\varphi}$ jest tu niemożliwe ze względu na trudności odwracania kolejnych podstawień. Uzyskana funkcja v (3.11) ma postać uwikłaną, gdyż jak wynika z podstawienia (3.10) w jest funkcją v . Rzutuje to oczywiście na rozwiązanie równań (2.22) linii ugięcia, po prawej stronie których występuje kąt $\tilde{\varphi}$. Uwikłana postać rozwiązania (3.11) jest nieprzydatna do obliczeń numerycznych, toteż w dalszym ciągu ucieknijemy się do metod czysto numerycznych.

4. NUMERYCZNE ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ LINII UGIĘCIA

Podstawowe równania (2.17) i (2.22) napiszemy w postaci układu pięciu równań quasi-liniowych pierwszego rzędu, gdyż taka postać jest wygodna do obliczeń numerycznych:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\varphi}' &= u, \\
 u' &= -C_1 u \cos \tilde{\varphi} - C_2 \cos \tilde{\varphi} + C_3 \sin \tilde{\varphi} \cos \tilde{\varphi}, \\
 \tilde{x}' &= D_1 \cos \tilde{\varphi} - D_2 \sin \tilde{\varphi} \cos \tilde{\varphi} + D_3 u \cos \tilde{\varphi}, \\
 \tilde{y}' &= D_1 \sin \tilde{\varphi} - D_2 \sin^2 \tilde{\varphi} + D_3 u \sin \tilde{\varphi}, \\
 \tilde{l}' &= 1 + \varepsilon_s = D_1 - D_2 \sin \tilde{\varphi} + D_3 u.
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

Do scałkowania tego układu zastosowano metodę bezpośredniego numerycznego całkowania, tzw. metodę półodwrotną [13]. Stosowana metoda polega na zamianie zagadnienia brzegowego na początkowe i spełnieniu wszystkich warunków brzegowych w drodze iteracyjnej.

Układ równań (4.1) napiszemy w postaci skróconej jako równanie wektorowe

$$\{z\}' = \{f(\tilde{\varphi}, u)\},
 \tag{4.2}$$

gdzie składowe wektora wierszowego $\{z\}$ są wielkościami występującymi po lewej stronie układu (4.1):

$$\{z\}_\lambda = \{\tilde{\varphi}, u, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{l}\}_\lambda
 \tag{4.3}$$

a wektor $\{f\}$ jest zbudowany z odpowiednich prawych stron (4.1).

Całkowanie równania (4.2) przedstawimy w postaci schematycznej

$$\{z\}_0 [NC] = \{z\}_L,
 \tag{4.4}$$

gdzie przejście od wektora wejścia $\{z\}_0$ w punkcie λ_0 do wektora wyjścia $\{z\}_L$ w λ_L jest realizowane przez macierz transformacji $[NC]$, która symuluje numeryczne całkowanie, wykonywane przez maszynę.

Wśród pięciu składowych wektora $\{z\}_0$ jedynie część jest niezależna (będziemy ją nazywali swobodnymi wartościami początkowymi), gdyż w punkcie λ_0 należy spełnić odpowiednie warunki brzegowe. Wartości tych swobodnych składowych dobieramy tak, aby spełnić wszystkie warunki brzegowe na drugim końcu w punkcie λ_L . Zadanie, które można rozwiązać podaną metodą, należy do symetrycznych dwupunktowych zagadnień brzegowych, co w skrócie można napisać $n+n$, gdzie n oznacza zarówno liczbę swobodnych wartości początkowych jak też spełnianych warunków brzegowych w λ_L .

W podanej metodzie podstawową trudnością będzie więc rozwiązanie równania

$$\{X\} [NC] = \{Y\},
 \tag{4.5}$$

gdzie obok wektorów swobodnych wartości początkowych $\{X\}$ i warunków brzegowych $\{Y\}$, występuje nieznaną macierz przejścia $[NC]$. Trudność tę można po-

konać np. przez zastosowanie wzorów Newtona-Raphsona do iteracyjnego wyznaczenia $\{X\}$, por. [14]. Wybrane współrzędne wektora $\{z\}$ będą bądź współrzędnymi $\{X\}$, bądź ich kombinacjami liniowymi.

Dobór wektorów $\{z\}_0$ i $\{z\}_L$ zilustrować można na przykładzie utwierdzonego pręta zakrzywionego (rys. 4), dla którego rozpoczynamy numeryczne całkowanie od swobodnego końca obciążonego siłą skupioną $p = P/\sigma_1 F$ i momentem zginającym $m_0 = M_0/\sigma_1 W$.

Obliczenia można uprościć przyjmując początek układu współrzędnych \tilde{x}, \tilde{y} w punkcie λ_0 . Wtedy wektor wejścia napiszemy w postaci

$$(4.6) \quad \{z\}_0 = \{\tilde{\varphi}_0, u, 0, 0, 0\}_0,$$

gdzie jedynie $\tilde{\varphi}_0$ jest swobodną wartością początkową.

Wartość $u_0 = \tilde{\varphi}'_0$ można obliczyć przy znanych wartościach obciążeń brzegowych m_0 i p_0 . W iteracyjny sposób wyznaczamy ε_s i κ z równań (2.8); można tutaj skorzystać ze wzorów *regula falsi* [13], gdyż współczynniki w tych równaniach α_i, β_i są funkcjami ε_s i κ . Poszukiwaną wartość u_0 obliczymy ze wzoru

$$(4.7) \quad u_0 = \frac{1 + \varepsilon_s}{\rho} + \kappa L.$$

Tak więc wektor $\{X\}$ będzie miał tylko jedną współrzędną $\tilde{\varphi}_0$.

Przedłużenie numerycznego rozwiązywania wymaga znajomości współczynników C_i oraz D_i , występujących po prawej stronie równań (4.1). Wartości tych współczynników będziemy określali w drodze kolejnych przybliżeń przez obliczanie uogólnionych odkształceń ε_s i κ . Jeśli całkując numerycznie dojdziemy do punktu o wektorze $\{z\}_i$, to możemy obliczyć tutaj siłę podłużną według (2.14)₁:

$$(4.8) \quad n_i = p \sin \tilde{\varphi}_i,$$

którą obok u_i można podstawić do wzoru iteracyjnego na $\varepsilon_s^{(j)}$ obliczonego z (2.8):

$$(4.9) \quad \varepsilon_s^{(j)} = \frac{\gamma_I \rho}{\gamma_I \rho a_0^{(j)} - a_1^{(j)}} \left[(n_i - b_0^{(j)}) - \frac{a_1^{(j)}}{\gamma_I} \left(u_i - \frac{1}{\rho} \right) \right],$$

gdzie wykorzystano już wzór na $\kappa^{(j)}$,

$$(4.10) \quad \kappa^{(j)} = \frac{1}{L} \left(u_i - \frac{1 + \varepsilon_s^{(j)}}{\rho} \right),$$

wynikający z (2.10).

Aby rozpocząć iterację, możemy podstawić za $a_0^{(0)}, a_1^{(0)}, b_0^{(0)}$ wartości obliczone w poprzednim punkcie całkowania numerycznego λ_{i-1} . Przy określonych wartościach $\varepsilon_s^{(j)}$ i $\kappa^{(j)}$ współczynniki $a_0^{(j)}, a_1^{(j)}$ i $b_0^{(j)}$ obliczamy według (2.7), gdyż wartości odkształceń w poszczególnych warstwach r możemy łatwo obliczyć zgodnie z prawem płaskich przekrojów (2.1), a na ich podstawie określić przedział $\varepsilon_k < \varepsilon < \varepsilon_{k+1}$ wykresu $\sigma(\varepsilon)$. Po zakończeniu «wewnętrznej» iteracji (w każdym punkcie λ_i) możemy obliczyć C_i i D_i według (2.18) i (2.23), a więc też wyznaczyć $\{z\}'_i$.

Należy tutaj podkreślić istotne ułatwienie, jakim jest odwracanie tylko jednego związku fizycznego (2.6)₁ zamiast dwóch, jak było w pracy [13], co ma istotny wpływ na skrócenie czasu obliczeń. Stało się to możliwe dzięki przemieszczeniowej postaci podstawowego układu (4.1).

Numeryczne całkowania kończymy w punkcie λ_L , dla którego spośród współrzędnych wyjścia $\{z\}_L$ tworzymy wektor $\{Y\}$ też o jednej składowej (rys. 4):

$$(4.11) \quad \tilde{\varphi}_L = \tilde{\psi}_L - \delta.$$

Tak więc zadanie będzie symetrycznym zagadnieniem dwupunktowym typu 1+1.

Jeżeli nie jest spełniony warunek brzegowy, tzn. powstaje błąd

$$(4.12) \quad f^{(j)} = \tilde{\varphi}_L - \tilde{\psi}_L + \delta \neq 0,$$

to musimy poprawić swobodną wartość

$$(4.13) \quad \tilde{\varphi}_0^{(j+1)} = \tilde{\varphi}_0^{(j)} + \Delta \tilde{\varphi}_0^{(j)},$$

gdzie

$$(4.14) \quad \Delta \tilde{\varphi}_0^{(j)} = \frac{f^{(j)}}{f^{(j-1)} - f^{(j)}} \Delta \tilde{\varphi}_0^{1(j-1)}$$

i powtórzyć obliczenia aż do spełnienia tego warunku.

5. OBLICZANIE UGIĘĆ PRĘTA O STAŁYM PRZEKROJU WIELOPUNKTOWYM

5.1. Algorytm rozwiązywania podstawowego układu równań

Omawianą metodę iteracyjnego obliczania ugięć przedstawimy w postaci algorytmu, dostosowanego do obliczeń na maszynie cyfrowej «Odra 1013» (por. Dodatek).

Tok postępowania podamy w następujących punktach:

1. Przyjmujemy dane charakteryzujące pręt (ρ, γ) , materiał $(\sigma_1, \varepsilon_1, e_k, s_k, \alpha_k)$, obciążenie zewnętrzne (p, m_0) i krok całkowania $\Delta\lambda$.
2. Dla wybranego na przecie punktu wyjściowego λ_0 określamy wektor wejścia $\{z\}_0 = \{\tilde{\varphi}_0, u_0, \tilde{x}_0, \tilde{y}_0, l_0\}_0$, w którym składowa $\tilde{\varphi}_0$ tworzy jedyną współrzędną wektora swobodnych wartości początkowych $\{X\}$. Składową u_0 obliczamy ze wzoru (4.7), wyznaczając wcześniej siłę podłużną n_0 według (4.8) i odkształcenia ε_s i κ .
3. Obliczamy wydłużenia ε^r w poszczególnych powierzchniach «skupionych» F_i na podstawie wzoru (2.1).
4. Badamy stopień uplastycznienia każdej powierzchni, określając odcinek wykresu $\sigma(\varepsilon)$ opisany wielkościami $s_k^r, \alpha_k^r, \varepsilon_k^r$, gdzie $\varepsilon_k^r < \varepsilon^r < \varepsilon_{k+1}^r$.
5. Ustalamy współczynniki C_i i D_i według (2.18) i (2.23).
6. Obliczamy wektor $\{z\}'$ za pomocą wzorów (4.1).
7. Na podstawie wzorów numerycznego całkowania obliczamy dla punktu $\lambda_1 = \lambda_0 + \Delta\lambda$ wektor $\{z\}_1$.
8. Dla punktów $l=1, 2, \dots, L$ wyznaczmy kolejno siłę podłużną n_l (4.8), a następnie iteracyjnie obliczamy ε_s i κ korzystając ze wzorów (4.9) i (4.10). Powtarzamy obliczenia zawarte w punktach 3–7, dochodząc do wektora $\{z\}_L$.
9. W punkcie λ_L mamy narzucony warunek brzegowy w postaci wektora $\{Y\}$.
10. Jeżeli nie jest spełniony warunek brzegowy, poprawiamy wektor swobodnych wartości początkowych $\{X\}$ i powtarzamy obliczenia, aż do spełnienia warunku (4.12).

Na każdym kroku λ_l otrzymujemy z maszyny wydrukowane wyniki w postaci układu wartości opisujących przemieszczenia $\tilde{\varphi}, u, \tilde{x}, \tilde{y}, l$, odkształcenia ε^r i naprę-

żenia s' . Można także w każdym punkcie obliczyć siły wewnętrzne n i m korzystając z przytaczanego już powyżej wzoru (4.8) i (2.12), który napiszemy w postaci bezwymiarowej:

$$(5.1) \quad m_i = b_1 + \frac{a_1}{a_0} (n_i - b_0) + \frac{1}{2\gamma} \left(a_2 - \frac{a_1^2}{a_0} \right) \left(\frac{\tilde{\varphi}'}{\rho} - \frac{l'}{\rho} \right)_i.$$

Do całkowania układu równań stosujemy np. metodę Rungego-Kutty czwartego rzędu.

Przy ograniczeniu się do rozpatrywania procesów czynnych można stosować zmienny krok całkowania wzdłuż osi pręta. Prościej jest ustalić stałą długość tego kroku na całej długości pręta i z jego zmiany wnioskować o zbieżności i stabilności metody.

Dla przekroju dwupunktowego można określić stopień uplastycznienia przekroju obliczając naprężenia na wysokości obu powierzchni skupionych przy pomocy wzoru

$$(5.2) \quad s^+ = n + m, \quad s^- = n - m,$$

gdzie $+$ i $-$ oznaczają górną i dolną półkę. W tym przypadku nie musimy obliczać odkształceń, tak jak podaliśmy w algorytmie, gdyż badając znak $\Delta s = s_k - s$ odpowiednim podprogramem ustalimy s_k , α_k , ε_k . Dla bieżącego punktu musimy w iteracyjny sposób obliczać moment zginający m_i według (5.1), poprawiając kolejno wartości współczynników $a_0^{(j)}$, $a_1^{(j)}$, $b_0^{(j)}$, $b_1^{(j)}$, które zależą od stopnia uplastycznienia przekroju poprzecznego.

Bezwymiarowe współczynniki a_i i b_i [por. (2.7)] napisane dla przekroju dwupunktowego mają postać

$$(5.3) \quad \begin{aligned} a_0 &= \frac{\varepsilon_1}{2} (\alpha_k^+ + \alpha_k^-), \\ a_1 &= \frac{\varepsilon_1}{2} (\alpha_k^+ - \alpha_k^-), \\ b_0 &= \frac{1}{2} [(s_k^+ + s_k^-) - (\alpha_k^+ e_k^+ + \alpha_k^- e_k^-)], \\ b_1 &= \frac{1}{2} [(s_k^+ - s_k^-) - (\alpha_k^+ e_k^+ - \alpha_k^- e_k^-)]. \end{aligned}$$

Zestawiając tok postępowania zaproponowany dla przekroju wielopunktowego z omówionym powyżej przekrojem dwupunktowym można stwierdzić, że w obu przypadkach konieczna jest wewnętrzna iteracja, dzięki której obliczamy $\varepsilon_s^{(j)}$, $\kappa^{(j)}$ bądź w przypadku przekroju dwupunktowego $m^{(j)}$, a więc i s^+ i s^- .

Obliczone przemieszczenia pręta w układzie \tilde{x} , \tilde{y} można wyrazić w układzie x , y (rys. 4), jeżeli skorzystamy ze wzorów transformacyjnych:

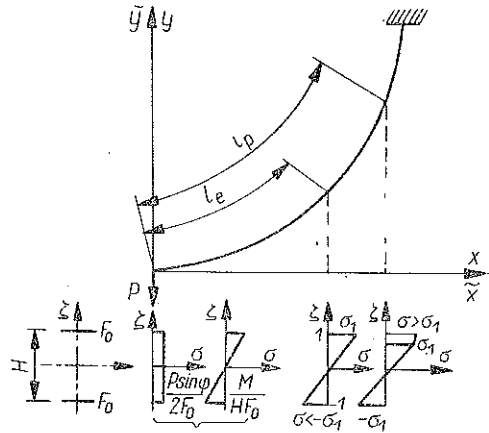
$$(5.4) \quad x = \tilde{x} \cos \delta - \tilde{y} \sin \delta, \quad y = \tilde{x} \sin \delta + \tilde{y} \cos \delta.$$

W rozpatrywanym przykładzie mamy do czynienia z prętem obciążonym na brzegu. Jeżeli będziemy mieć układ obciążeń skupionych (siły, momenty), to rozważania będą nadal poprawne dla poszczególnych przedziałów charakterystycznych, na które podzielony będzie pręt przez obciążenie. Związki równowagi (2.14) będą

miały taką samą postać, jeżeli w punktach początkowych poszczególnych przedziałów wprowadzimy lokalny układ współrzędnych \tilde{x}, \tilde{y} o osi \tilde{y} równoległej do linii działania wypadkowej wszystkich sił działających po lewej stronie przedziału. W punktach podziału pręta (przyłożenia obciążenia) będą musiały być spełnione warunki ciągłości. Będą one spełnione, gdyż będziemy całkować numerycznie w kolejnych przedziałach, przy czym wektor wejścia do następnego przedziału zbudujemy na podstawie wektora wyjścia z poprzedniego i granicznego obciążenia. Warunki brzegowe będą narzucone na wektor wyjścia ostatniego przedziału i będą mogły być spełnione w drodze iteracyjnego całkowania wzdłuż całego pręta.

5.2. Przykład numeryczny

Aby zilustrować omawianą metodę i zweryfikować opracowany algorytm, obliczono ugięcia pręta słabo zakrzywionego kołowego o promieniu $\bar{\rho} = 500$ cm i długości $L = 785,4$ cm (ćwiartka łuku koła).



Rys. 5

Pręt wspornikowy obciążony jest stale pionową siłą skupioną P , przyłożoną do swobodnego końca. Przy takim obciążeniu kąt $\delta = 0$ i układ \tilde{x}, \tilde{y} pokrywa się z układem x, y (rys. 4 i rys. 5).

Dwupunktowy symetryczny przekrój poprzeczny określony jest następującymi wielkościami:

$$F_0 = F_1 = F_2 = 5,0 \text{ cm}^2,$$

$$H_1 = H/2 = 5,0 \text{ cm},$$

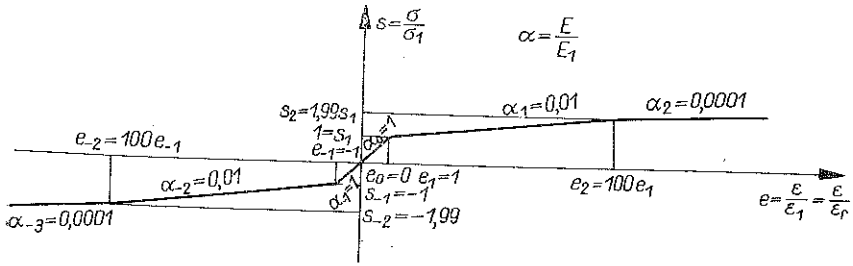
$$\gamma = L/H = 78,5.$$

Materiał, z którego jest zbudowany pręt, ma jednakowe własności na ściskanie jak i rozciąganie ($\sigma_1 = Q_r = -Q_z$) i wykazuje dwukrotne liniowe wzmocnienie (rys. 6). Charakterystyka jego przedstawia się następująco:

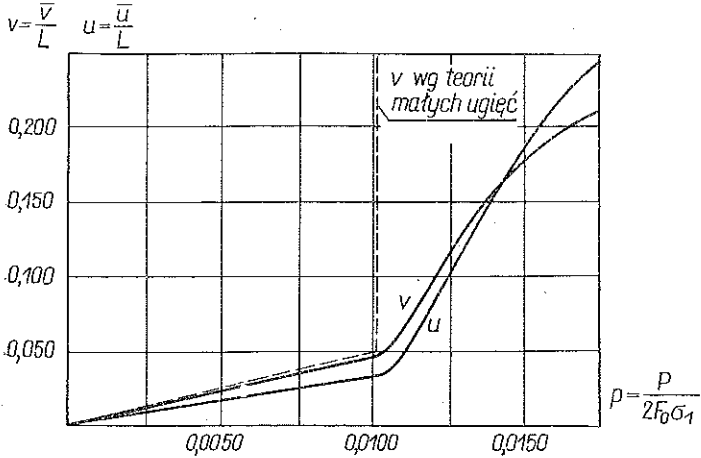
$$\begin{array}{lll} \varepsilon_1 = 0,001, & \sigma_1 = 2 \cdot 10^3 \text{ kG/cm}^2, & \alpha_0 = 1, \\ e_0 = 0, & s_0 = 0, & \alpha_1 = 0,01, \alpha_{-1} = 1, \\ e_1 = -e_{-1} = 1, & s_1 = -s_{-1} = 1, & \alpha_2 = 0,0001, \\ e_2 = -e_{-2} = 100, & s_2 = -s_{-2} = 1,99, & \alpha_{-2} = 0,01, \\ & E_0 = 2 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2 & \alpha_{-3} = 0,0001. \end{array}$$

Obliczenia wykonano dla różnych wartości siły P z przedziału $P = 100$ do 350 kG (bezwymiarowe wartości — $p = 0,0050$ do $0,0175$).

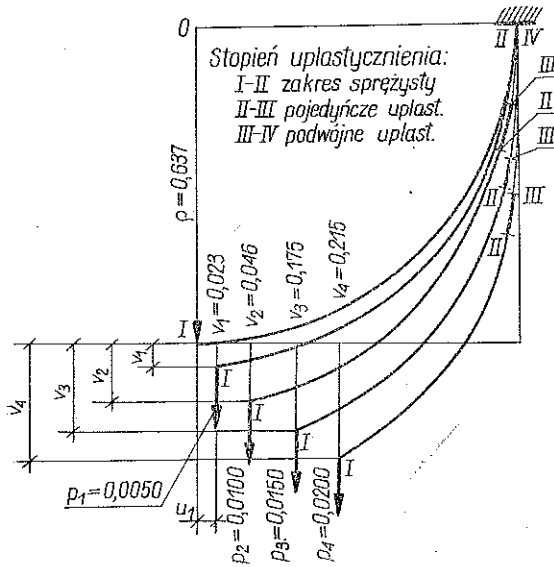
Otrzymane wyniki opracowano w postaci wykresu (rys. 7) pokazującego bezwymiarowe przemieszczenie swobodnego końca pręta jako funkcję bezwymiarowej siły p .



Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8

Na rysunku tym linią przerywaną zaznaczono wyniki otrzymane wg liniowej teorii małych ugięć przy uwzględnieniu jedynie stanu giętnego. Przy sile $p=0,01$ nastąpiło uplastycznienie przy utwierdzeniu pręta, co wpłynęło gwałtownie na przyrost ugięć (wpływ uplastycznienia na szybki przyrost przemieszczeń jest widoczny również na wykresach otrzymanych wg teorii dużych ugięć).

Na podstawie wyników numerycznych, otrzymanych z maszyny cyfrowej, można odtworzyć przemieszczenia poszczególnych punktów, otrzymując odkształconą oś pręta, z zaznaczeniem ponadto stref różnego uplastycznienia. Rysunek 8 przedstawia oś pręta przed i po odkształceniu dla czterech wartości siły obciążającej.

Zestawiając wartości ugięć uzyskujemy potwierdzenie konieczności stosowania teorii skończonych ugięć. Zgodnie z przewidywaniem odkształcenia plastyczne są znaczne, a ugięcia osiągają wartość $1/3$ wstępnego promienia zakrzywienia pręta.

6. ZAKOŃCZENIE

Jak wykazaliśmy, przyjęcie przekroju wielopunktowego i materiału o liniowym wielokrotnym wzmocnieniu pozwoliło uzyskać ogólne i ściśle równanie różniczkowe linii ugięcia. Wprowadzenie natomiast wydłużalnej osi nie uprościło postaci równań, a także nie umożliwiło efektywnego ich scałkowania, tak jak to miało miejsce w pracy [12] w przypadku pręta prostego. Problem został jednak rozwiązany dzięki zastosowaniu metody bezpośredniego numerycznego całkowania i wykorzystaniu maszyny cyfrowej.

Opracowany algorytm jest bardzo ogólny i może być wykorzystany w przypadku dowolnego przekroju wielopunktowego i materiału o dowolnej charakterystyce, np. o różnych własnościach na ściskanie i rozciąganie.

Konieczność odwracania związków fizycznych w podanym algorytmie wymaga posługiwania się jednoznaczными zależnościami pomiędzy uogólnionymi siłami wewnętrznymi m , n i uogólnionymi przemieszczeniami ϵ , κ . Z tego względu nie można stosować do obliczeń modelu materiału idealnie sprężysto-plastycznego. Szczególnie wyraźne jest to w przypadku przekroju dwu- lub trzypunktowego, gdzie przy uplastycznieniu zewnętrznych pól odkształcenia nie mogą wzrastać nieograniczenie w żadnym przekroju pręta.

Jeżeli wykorzystana się pamięć maszyny, to można rozpatrywać także procesy bierne, podobnie jak to zostało zrobione w pracach [2 i 13]. Wymaga to rozbudowania algorytmu i prowadzenia obliczeń dla małych przyrostów Δp obciążenia, gdyż przy bardziej złożonym typie obciążenia lub programie obciążenia trudno przewidzieć wartość obciążenia p , przy którym mogą się pojawić i rozwijać obszary lokalnych odciążenia (procesy bierne). Takie przyrostowe obliczanie dużych ugięć przypomina postępowanie przy stosowaniu teorii płynięcia plastycznego do obliczania dużych ugięć ustrojów powierzchniowych [14] i jest bardziej czasochłonne od obliczeń prowadzonych na podstawie teorii odkształceniowej przy pominięciu historii obciążania. W niektórych przypadkach można pominąć małe obszary procesów biernych i liczyć ustrój sprężysto-plastyczny jako nieliniowo sprężysty [13].

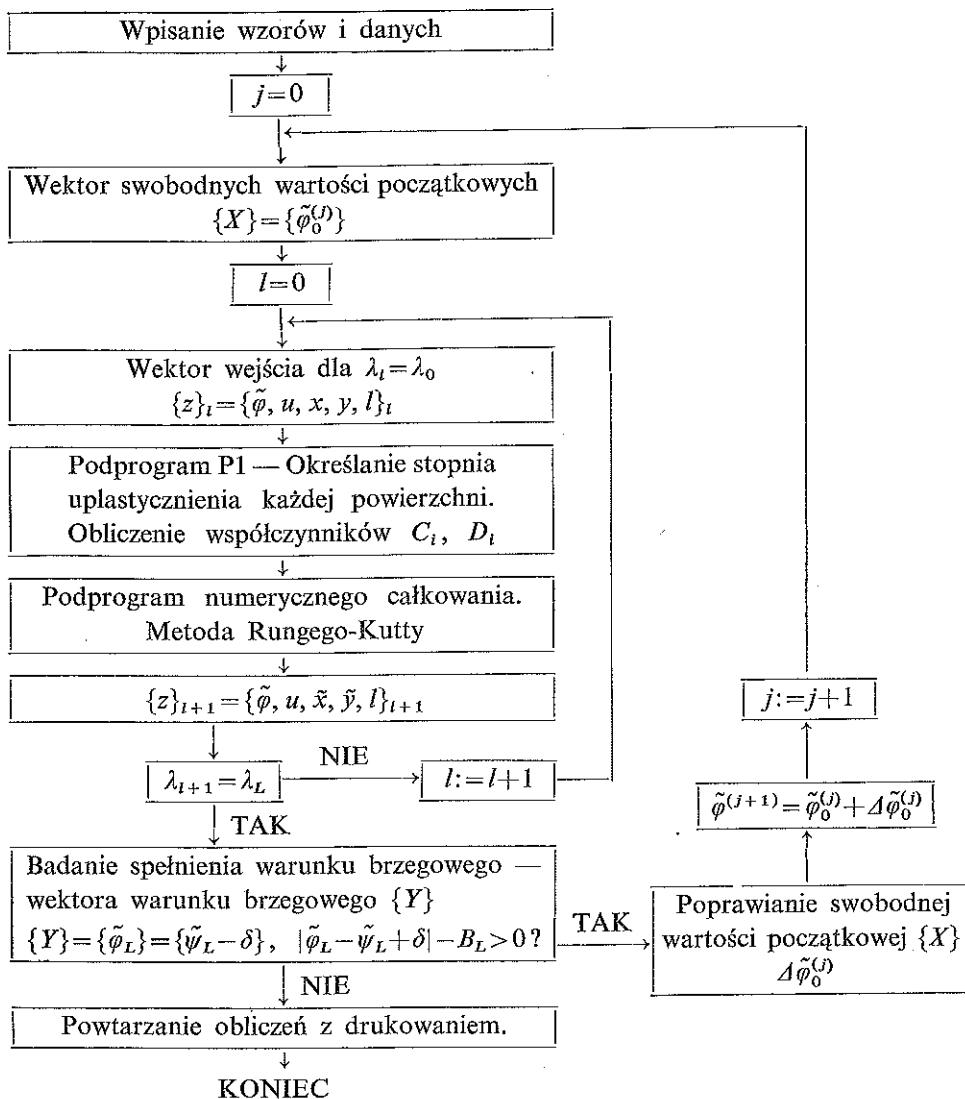
Przytoczony przykład numerycznego obliczania dużych ugięć zakrzywionego pręta o przekroju dwupunktowym służy jedynie jako weryfikacja proponowanego algorytmu. W przykładzie tym nie występują procesy bierne.

Ze względu na numeryczne całkowanie wzdłuż osi pręta i wysokości przekroju, można uwzględnić niejednorodność w obu kierunkach.

Podane powyżej możliwości rozszerzenia zagadnienia nastąpią kosztem zwiększenia obciążenia maszyny, poszerzenia programu przy nienaruszonym jednak jego logicznym układzie.

DODATEK

Algorytm do obliczania ugięć



LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Л. М. Беленкий, *О пластическом течении плоских криволинейных стержней при больших перемещениях*, Строит. Мех. и Расч. Сооруж., **11**, 2, 36–40, 1969.
2. C. SICHON, Z. WASZCZYŻYŃ, *Numeryczne obliczanie sprężysto-plastycznego łuku kołowego o przekroju typu «sandwich»*, Arch. Inżyn. Ładow., **17**, 3, 529–544, 1971.
3. I. V. HUDDLESTON, *A numerical technique for elastics problems*, J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE, EM5, **94**, 1159–1165, 1968.
4. E. KAMKE, *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen*, wyd. 6, Akademische Verlagsgesellschaft Geest und Portig, Leipzig 1959.
5. H. NAGAO, *Large elasto-plastic deflection of circular-arc cantilever*, Proc. 4-th. Japan. Nat. Congr. Appl. Mech., **111**–116, 1964.
6. E. T. ONAT, L. S. SHU, *Finite deformations of a rigid perfectly plastic arch*, J. Appl. Mech., **29**, 3, 549–553, 1962.
7. J. ORKISZ, *Przykłady doboru wielopunktowych przekrojów zastępczych dla belek zginanych sprężysto-plastycznie*, Czas. Techn., **67**, 10, 6–12, 1962.
8. J. ORKISZ, M. ŻYCZKOWSKI, *Małe ugięcia sprężysto-plastyczne belek o dowolnym przekroju*, Rozpr. Inżyn., **11**, 4, 677–712, 1963.
9. J. ORKISZ, *Sprężysto-plastyczne ugięcia prętów słabo zakrzywionych o dowolnym przekroju*, Rozpr. Inżyn., **14**, 4, 681–698, 1966.
10. J. ORKISZ, M. ŻYCZKOWSKI, *Skończone ugięcia sprężysto-plastyczne belek o dowolnym przekroju*, Rozpr. Inżyn., **14**, 4, 681–698, 1966.
11. Е. П. Попов, *Нелинейные задачи статики тонких стержней*, Гостехиздат, Москва, Ленинград 1951.
12. Z. WASZCZYŻYŃ, *Application of multi-point equivalent cross-sections to the calculations of finite deflections of elastic-plastic beams with stretchable axis*, Acta Mechanica, **3**, 2, 219–235, 1967.
13. Z. WASZCZYŻYŃ, *Application of the theory of finite deflections to calculations of elastic-plastic arches*, Arch. Inżyn. Ładow., **16**, 1, 55–74, 1970.
14. Z. WASZCZYŻYŃ, *Obliczanie skończonych ugięć sprężysto-plastycznych powłok i płyt obrotowo-symetrycznych*, Politechnika Krakowska, Zeszyt Naukowy Nr 3, Kraków 1970.

Резюме

РАСЧЕТ КОНЕЧНЫХ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ПРОГИБОВ СЛАБО ИСКРИВЛЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

Работа посвящена геометрически нелинейному анализу криволинейных стержней из упруго-пластического материала, обладающего свойством многократного упрочнения, который можно рассматривать как кусочно-линейный упругий материал.

В первой главе обсуждены трудности, встречающиеся при расчетах геометрически и физически нелинейных криволинейных стержней, а также перечисляются упрощения, применяемые различными авторами при этих расчетах. Даются основные предположения данной работы. В главе второй приведены уравнения деформированного стержня, содержащиеся в работе [13]; согласно работе [8] их применяют для расчета упрощенной модели «многоточечного» сечения. Третья глава содержит формальное решение выведенного уравнения деформированного искривленного стержня. В главе четвертой изложен метод эффективного численного интегрирования полученных уравнений, применяемый в предыдущих работах одного из авторов. В пятой главе дана схема алгоритма расчетов на ЭЦВМ «Одра—1013», а также решен численный пример статически определимого стержня типа «сандвич». Шестая глава вкратце подводит итог работы.

SUMMARY

CALCULATION OF FINITE ELASTIC-PLASTIC DEFLECTIONS OF SLIGHTLY CURVED RODS

The paper deals with the geometrically nonlinear analysis of rods made of elastic-plastic materials with multiple hardening, i.e. of the sectionally linear elastic materials.

In Sec. 1 are discussed the difficulties encountered in calculating the geometrically and physically nonlinear rods, and simplifications introduced by various authors are listed; fundamental assumptions are given. Section 2 presents the equations of a deformed rod and their application to the simplified «multipoint» cross-section model according to [13 and 8]. Section 3 contains the formal solution of the resulting equation of the deflection curve. Section 4 presents the method of effective numerical integration of the equations (based on earlier papers of one of the co-authors), while Sec. 5 gives the calculation scheme prepared for the «ODRA 1013» electronic computer and a numerical example concerning a statically determinate sandwich arch. Section 6 constitutes a summary of the paper.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 listopada 1971 r.
