ROZPRAWY INŻYNIERSKIE, 20, 3, 423-434, 1972, Instytut Podstawowych Problemów Techniki Polskiej Akademii Nauk

O PROJEKTOWANIU KONSTRUKCJI Z UWZGLĘDNIENIEM PRZYSTOSOWANIA W PRZYPADKU, GDY STAŁE SPRĘŻYSTE ZALEŻĄ OD TEMPERATURY

JAN A. KÖNIG (WARSZAWA)

1. Wstęp

Gdy obciążenia lub inne czynniki wywołujące naprężenia w konstrukcji sprężysto-plastycznej zmieniają się w dostatecznie szerokich granicach, to konstrukcja ta ulec może zniszczeniu wskutek «nieprzystosowania». Wystąpią wtedy w każdym kolejnym cyklu obciążenia — nowe odkształcenia plastyczne, pomimo że nośność graniczna dla proporcjonalnego obciążania nie została osiągnięta. Po wystarczająco dużej liczbie cykli obciążenia skutkiem nieprzystosowania będzie zmęczenie plastyczne lub przyrostowe zniszczenie konstrukcji. Pierwszy typ zniszczenia związany jest z naprzemiennymi odkształceniami plastycznymi. Drugi polega na stopniowym narastaniu odkształceń plastycznych a w rezultacie i ugięć konstrukcji.

Analiza tych zjawisk, tj. teoria przystosowania, stanowi naturalne uzupełnienie teorii nośności granicznej dla przypadku obciążeń zmiennych. To jest powodem, że teoria ta wywołała więcej zainteresowania dopiero w ostatnich latach, pomimo że zapoczątkowano ją już na początku lat trzydziestych pracami Bleicha [1] i Melana [2].

Dwa podstawowe twierdzenia teorii przystosowania podane zostały przez Melana [2] i Koitera [3]. Twierdzenia te są w gruncie rzeczy uogólnieniami twierdzeń nośności granicznej [4].

Ocena wielkości granic obciążeń pozwalających na przystosowanie staje się dla szeregu typów konstrukcji obliczeniem standardowym.

W wielu praktycznie ważnych przypadkach na konstrukcję oddziaływać mogą nie tylko zmienne obciążenia mechaniczne, ale również pole temperatury zmienne w czasie.

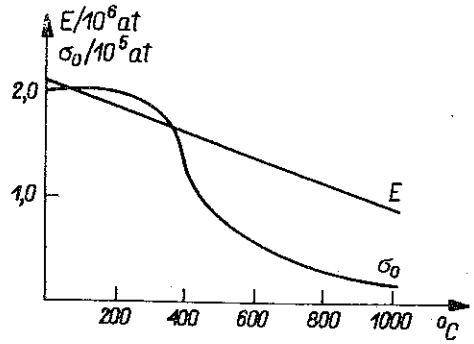
Dla konstrukcji sprężysto-plastycznych zachodzić mogą w tym przypadku efekty następujące:

1) odkształcenia termiczne zmieniają pole naprężeń;
2) granica plastyczności zmienia się wraz z temperaturą;
3) stałe sprężyste ulegają zmianie w zależności od temperatury.

Wpływ dwu pierwszych zjawisk tak w teorii nośności granicznej jak i w teorii przystosowania badany był przez Pragera [5] i przez innych autorów [6 – 11]. Praca niniejsza rozważa efekt trzeci.

Występowanie odkształceń termicznych nie zmienia sformułowania twierdzenia Melana. Muszą być one jednak uwzględnione we wzorach na «naprężenia sprężyste». W twierdzeniu Koitera wyrażenie na pracę sił wewnętrznych należy uzupełnić dodatkowym wyrazem [7 i 8].

Fakt, że granica plastyczności nie zależy od temperatury, nie zmienia pierwotnego sformułowania twierdzeń, jednakże wszystkie występujące w nich związki muszą być spełnione w całym przedziale zmienności temperatury, przewidzianym przez program obciążenia.



Rys. 1

Jeśli chodzi o zmienność stałych sprężystych wraz z temperaturą, to autorowi nie są znane wyniki dotyczące twierdzenia Koitera. Twierdzenie Melana musi być w tym przypadku odpowiednio przeformułowane [13].

W odpowiednich warunkach każdy z tych trzech wymienionych efektów może być dominujący. Dla miękkiej stali granica plastyczności spada gwałtownie w przedziale 300 – 600°C, a pozostaje stała (nawet nieco wzrasta) w przedziale 0 – 200°C. Moduł Younga natomiast dla bardzo dużego przedziału zmienności temperatury zmniejsza się o 5 – 10% na każde 100°C przyrostu według zależności liniowej

$$E(\theta)=E(\theta)[1-e\theta], \tag{1.1}$$

gdzie θ oznacza temperaturę a e jest stałą materiałową (rys. 1).

Celem niniejszej pracy jest pokazanie, że zależność stałych sprężystych od temperatury w analizie przystosowania konstrukcji może grać również istotną rolę.

W naszych rozważaniach pomijać będziemy efekty lepkie (pełzanie i relaksację), ograniczając się do analizy sprężysto-plastycznej.

2. Zależności podstawowe

Tensor odkształcenia dla ośrodka sprężysto-plastycznego, poddanego działaniu pola temperatury, przedstawiony może być w formie następującej:

$$\varepsilon_{ij}=\varepsilon^E_{ij}+\varepsilon^P_{ij}+\varepsilon^T_{ij}, \tag{2.1}$$

gdzie $\varepsilon^E_{ij}=A_{ijkl}\,\sigma_{kl}$, A_{ijkl} jest tensorem stałych sprężystych, ε^T_{ij} oznacza odkształcenia termiczne, a ε^P_{ij} odkształcenia plastyczne.

Przez «naprężenie sprężyste» σ^E_{ij} rozumieć będziemy rozwiązanie rozważanego problemu brzegowego, otrzymane przy warunku $\varepsilon^P_{ij}=0$. Tensor σ^E_{ij} w ogólności różni się od rzeczywistego tensora naprężenia σ_{ij} będącego rozwiązaniem tegoż problemu dla ciała idealnie sprężysto-plastycznego, dla którego prawo stanu określone jest warunkiem plastyczności i prawem płynięcia.

Różnica

$$\rho_{ij}=\sigma_{ij}-\sigma^E_{ij} \tag{2.2}$$

jest naprężeniem resztkowym, spełniającym zerowe warunki brzegowe.

Istotne jest spostrzeżenie, że jeżeli tensor stałych sprężystych zależy od temperatury, to pole odkształceń plastycznych ε^P_{ij} nie określa jednoznacznie pola naprężeń resztkowych ρ_{ij}, pole ρ_{ij} zależy bowiem również od aktualnej temperatury i może się wraz z nią zmieniać pomimo braku zmian pola ε^P_{ij}.

3. Twierdzenia podstawowe

Załóżmy teraz, że obciążenia mechaniczne i temperatura zmieniają się dowolnie w obrębie przepisanych granic. Pomijamy siły bezwładności oraz sprzężenia termosprężyste i termoplastyczne. Zakładamy też, że przemieszczenia pozostają wystarczająco małe na to, aby zasada prac wirtualnych pozostawała zachowana. Sformułować wtedy można następujące twierdzenie.

Twierdzenie. *Jeżeli istnieje liczba rzeczywista* $m>1$ *(współczynnik bezpieczeństwa) oraz niezależne od czasu pole odkształceń plastycznych* $\bar{\varepsilon}_{ij}$ *takie, że pojawiają się naprężenia resztkowe* $\bar{\rho}_{ij}$ *spełniające nierówność*

$$\varphi\{m[\sigma^E_{ij}(x,t,\theta)+\bar{\rho}_{ij}(x,\theta)]\}\leqslant k(x,\theta) \tag{3.1}$$

dla dowolnych obciążeń i temperatury przewidzianej przez program obciążenia, to konstrukcja dostosuje się do tego programu.

Związek $\varphi(\sigma_{ij})=k(x,\theta)$ jest warunkiem plastyczności. Wielkości występujące w (3.1) przedstawiono na rys. 2.

Dla przypadku $\partial A_{ijkl}/\partial\theta=0$ twierdzenie powyższe sprowadza się do twierdzenia Melana i może być wyrażone przy użyciu jedynie naprężeń sprężystych i resztkowych, ponieważ w tym przypadku warunki stałości naprężeń resztkowych i odkształceń plastycznych są sobie równoważne (jeśli tylko nie osiągnięto stanu granicznego konstrukcji).

Dowód. Wykorzystamy idee dowodu twierdzenia Melana przedstawionego przez Koitera [14]. Asymptotyczna stateczność odkształceń plastycznych zostanie wykazana przy użyciu odpowiednio uogólnionego funkcjonału nieujemnego chwilowych naprężeń resztkowych i temperatury:

$$Y=\frac{1}{2}\int_V A_{ijkl}(\rho_{ij}-\bar{\rho}_{ij})(\rho_{kl}-\bar{\rho}_{kl})\,dV+\frac{1}{2}\int_V\int_0^t \dot{A}_{ijkl}\times \tag{3.2}$$

$$\times(\rho_{ij}-\bar{\rho}_{ij})(\rho_{kl}-\bar{\rho}_{kl})\,dt\,dV+\frac{1}{2}\int_V \bar{A}_0 R^2\bar{\theta}\,dV.$$

Pierwsza całka w powyższym równaniu pokrywa się z funkcjonałem wprowadzonym przez Koitera [14]. Drugą dodano dla uwzględnienia zmienności modułów sprężystych; trzeci zapewnia nieujemność całej sumy. Kropka oznacza tu różniczko-

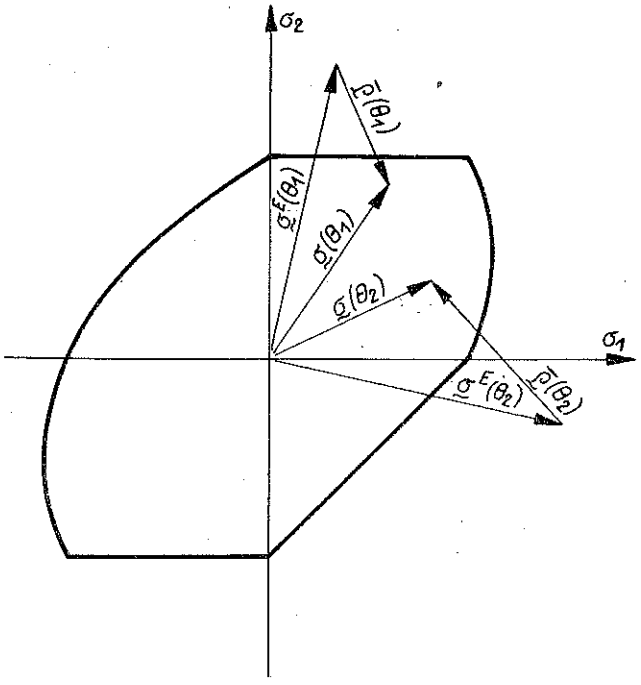
wanie względem czasu, przecinek — względem odpowiedniej zmiennej, ρ_{ij} oznacza aktualne naprężenie resztkowe. Poza tym wprowadzono następujące oznaczenia:

$$|\boldsymbol{\alpha}| = \sqrt{\alpha_{ij}\alpha_{ij}}; \qquad R = \sup_{\{\theta\}} \sup_{\{\varphi(\sigma)=k\}} |\boldsymbol{\sigma}| + \sup_{\{\theta\}} |\bar{\boldsymbol{\rho}}| + \sup_{\{t\}} |\boldsymbol{\sigma}^{E}|,$$

$$\bar{A} = \sup_{\{\theta\}} \sup_{\{|\sigma|=1\}} A_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}, \qquad \bar{\theta} = \sup_{\{t\}} |\theta|, \tag{3.3}$$

$$r = \sup_{\{\theta\}} |\bar{\boldsymbol{\rho}}|, \qquad \bar{A}_{\theta} = \sup_{\{\theta\}} \sup_{\{|\sigma|=1\}} A_{ijkl,\theta}\sigma_{ij}\sigma_{kl}.$$

Symbol $\sup_{\{\theta\}}[...]$ oznacza kres górny wielkości w nawiasie kwadratowym, gdy θ zmienia się dowolnie w granicach określonych programem obciążenia. Analogicznie symbole $\sup_{\{\varphi(\sigma)=k\}}[...]$ i $\sup_{\{|\sigma|=1\}}[...]$ oznaczają odpowiednie kresy górne, gdy tensor naprężenia może być dowolnym tensorem spełniającym warunek $\varphi(\boldsymbol{\sigma}) = k$ lub odpowiednio $|\boldsymbol{\sigma}| = 1$. Symbol $\sup_{\{t\}}[...]$ oznacza kres górny dla całego czasu trwania pracy ciała.



Rys. 2

Można wykazać, że trzecia całka we wzorze (3.2) jest zawsze niemniejsza niż całka druga. Mianowicie

$$\int_0^t \int_V \dot{A}_{ijkl}(\rho_{ij}-\bar{\rho}_{ij})(\rho_{kl}-\bar{\rho}_{kl})\,dV\,dt = \int_0^t \int_V A_{ijkl,\theta}(\rho_{ij}-\bar{\rho}_{ij})(\rho_{kl}-\bar{\rho}_{kl}) \times \tag{3.4}$$

$$\times \dot{\theta}\,dV\,dt \leqslant \int_0^t \int_V \bar{A}_0 |\boldsymbol{\rho}-\bar{\boldsymbol{\rho}}|^2 \dot{\theta}\,dV\,dt = \leqslant \int_0^t \int_V \bar{A}_0 R^2 \dot{\theta}\,dV\,dt \leqslant \int_V \bar{A}_0 R^2 \theta\,dV.$$

Różniczkując względem czasu, otrzymujemy

$$\dot{Y}=\int_V A_{ijkl}(\rho_{ij}-\bar{\rho}_{ij})(\dot{\rho}_{kl}-\dot{\bar{\rho}}_{kl})\,dV\,dt+\int_V \dot{A}_{ijkl}(\rho_{ij}-\bar{\rho}_{ij})(\rho_{kl}-\bar{\rho}_{kl})\,dV. \tag{3.5}$$

Z zasady prac wirtualnych wynika, że

$$\int_V (\rho_{ij}-\rho_{ij})[\dot{A}_{ijkl}(\rho_{kl}-\bar{\rho}_{kl})+A_{ijkl}(\dot{\rho}_{kl}-\dot{\bar{\rho}}_{kl})+\dot{\varepsilon}^P_{ij}-\dot{\bar{\varepsilon}}^P_{ij}]dV=0. \tag{3.6}$$

Ponieważ $\dot{\bar{\varepsilon}}^P_{ij}=0$, to wobec (3.5) otrzymujemy

$$\dot{Y}=-\int_V (\rho_{ij}-\bar{\rho}_{ij})\dot{\varepsilon}^P_{ij}\,dV=-\int_V [(\sigma^E_{ij}+\rho_{ij})-(\sigma^E_{ij}+\bar{\rho}_j)]\,\dot{\varepsilon}^P_{ij}\,dV\leqslant 0. \tag{3.7}$$

Ta ostatnia zależność wynika z postulatu Druckera oraz z założeń twierdzenia. Zatem dla $t>0$

$$Y(t)\leqslant Y(0) \quad \text{oraz} \quad \dot{Y}\to 0, \quad Y\to \text{const dla } t\to\infty. \tag{3.8}$$

Powtarzamy podane przez KOITERA postępowanie. Jeżeli $\varphi\,[m\,(\sigma^E_{ij}+\bar{\rho}_{ij})]\leqslant k$ w każdym punkcie konstrukcji, to całkowita moc plastyczna dysypowana w dowolnym procesie dopuszczalnym przez dany program obciążenia może być oszacowana następująco:

$$\dot{W}_p=\int_V \sigma_{ij}\,\dot{\varepsilon}^P_{ij}\,dV=\frac{m}{m-1}\int_V (\rho_{ij}-\bar{\rho}_{ij})\,\dot{\varepsilon}^P_{ij}\,dV\leqslant\frac{m}{m-1}(-\dot{Y}). \tag{3.9}$$

Całkując względem czasu otrzymujemy wreszcie oszacowanie całkowitej pracy plastycznej dysypowanej w dowolnym dopuszczalnym procesie:

$$W_p=\int_0^t\int_V \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}^P_{ij}\,dV\,dt\leqslant\frac{m}{m-1}\,Y(0)=\frac{m}{2(m-1)}\int_V [\bar{A}r^2+\bar{A}_0 R^2\bar{\theta}]\,dV. \tag{3.10}$$

Praca ta jest ograniczona, co dowodzi przystosowania konstrukcji do programu obciążenia.

4. PRZYKŁADY

Przykład 1. Rozważmy pręt prostoliniowy utwierdzony na obu końcach, ogrzewany (oziębiany) w granicach $0<\theta<\theta_0$. Dla dostatecznie dużych wartości θ_0 i po dostatecznie wielu cyklach zmian temperatury pręt ulegnie zniszczeniu przez zmęczenie plastyczne.

Największa wartość θ_0, pozwalająca na czysto sprężyste zachowanie pręta po początkowych odkształceniach plastycznych (dla przypadku stałego modułu Younga), wynosi

$$\max\theta_0=2\sigma_0/E\alpha\,, \tag{4.1}$$

rdzie σ_0 oznacza granicę plastyczności, E moduł Younga, α współczynnik cieplnej gozszerzalności liniowej.

W rozważanym przypadku wzór (2.1) może być napisany w postaci

$$\varepsilon=\varepsilon^E+\varepsilon^P+\varepsilon^T=\frac{\sigma}{E}+\alpha\theta+\alpha\varepsilon^P,$$

gdzie ε i σ oznaczają odkształcenie i naprężenie wzdłuż osi pręta. Z warunków na końcach pręta $\varepsilon=0$. Zatem

$$\sigma=-E(\alpha\theta+\varepsilon^P).$$

Warunek plastyczności w jednorodnym stanie naprężenia daje nierówności:

$$-\sigma_0\leqslant\sigma\leqslant\sigma_0.$$

Po podstawieniu otrzymujemy

$$-\sigma_0/E\leqslant\alpha\theta+\varepsilon^P\leqslant\sigma_0/E,$$

lub

$$-\sigma_0/E-\alpha\theta\leqslant\varepsilon^P\leqslant\sigma_0/E-\alpha\theta.$$

Według dowiedzionego powyżej twierdzenia istnienie niezależnego od czasu pola odkształceń plastycznych $\varepsilon^P=\bar{\varepsilon}$ takiego, że powyższa nierówność zachodzi dla dowolnej temperatury θ z przedziału $[0, \theta_0]$, jest koniecznym warunkiem przystosowania. Będzie tak, o ile kres górny lewej strony wypisanej nierówności nie jest większy od dowolnego kresu strony prawej. Jeżeli zatem w przedziale $[0, \theta_0]$ moduł Younga jest monotoniczną funkcją temperatury, to

$$-\sigma_0/E(0)\geqslant\sigma_0/E(\theta_0)-\alpha\theta_0,$$

skąd otrzymuje się warunek przystosowania w postaci

$$\max\theta_0=(\sigma_0/\alpha)[1/E(0)+1/E(\theta_0)], \tag{4.2}$$

a stałe odkształcenie plastyczne występujące w twierdzeniu wynosi $\bar{\varepsilon}=-\sigma_0/E(0)$.

Zakładając, że $E(\theta_0)=E(0)=E=\text{const}$. otrzymujemy wynik (4.1), który można też otrzymać wprost z twierdzenia Melana uogólnionego przez PRAGERA [5] i ROZENBLUMA [6], przyjmując $\bar{\rho}=\sigma_0$, gdzie $\bar{\rho}$ oznacza stałe naprężenia resztkowe. Widać, że jeżeli $\partial E/\partial\theta\neq 0$, to wzór (4.2) daje większą wartość na θ_0 niż wzór (4.1).

W przypadku miękkiej stali (rys. 1) wartości podawane przez oba wzory są bliskie 200°C. W przedziale [0, 200]°C granica plastyczności dla tej stali pozostaje stała, natomiast moduł Younga zmniejsza się o kilkanaście procent. W takim razie wzór (4.2) da wartość θ_0 o około 10% wyższą, tzn. większy przedział bezpiecznej zmienności temperatury niż (4.1).

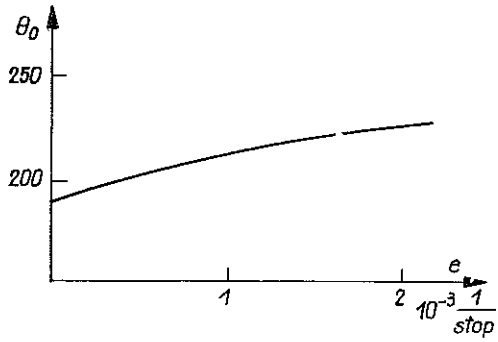
Dla innych wartości stałej materiałowej e porównanie obu wzorów przedstawiono na rys. 3.

Przykład 2. Płyta utwierdzona dowolnego kształtu poddana jest następującym zmianom temperatury:

$$\theta=\Phi(t)+\zeta\Psi(t), \quad \zeta=z/H \tag{4.3}$$

(przykład rozważany przez ROZENBLUMA [7]), gdzie $2H$ oznacza grubość płyty, z współrzędną w kierunku grubości, Φ i Ψ — to dowolne funkcje czasu, spełniające warunki

$$0 \leqslant \Phi(t) \leqslant \Phi_0, \quad 0 \leqslant \Psi(t) \leqslant \Psi_0. \tag{4.4}$$



Rys. 3

Dla stałych wartości modułu Younga i granicy plastyczności ROZENBLUM otrzymał następujący warunek przystosowania:

$$\Phi_0 + \Psi_0 \leqslant 2(1-\nu)\sigma_0/E\alpha, \tag{4.5}$$

gdzie ν oznacza współczynnik Poissona. Rozwiązanie zostało otrzymane w założeniu płaskiego stanu naprężenia i izotropii. Wszystkie naprężenia i odkształcenia zmieniają się tylko na grubości.

Jeżeli moduł Younga zmienia się według wzoru (1.1), to wzór (2.1) daje następujący wzór na odkształcenia główne:

$$\varepsilon_1(z) = \varepsilon_2(z) = \frac{(1-\nu)\sigma(z)}{E_0(1-e\theta)} + \alpha\theta + \varepsilon^P. \tag{4.6}$$

Biorąc pod uwagę (4.3) (i uwzględniając, że warunki brzegowe prowadzą znów do warunku $\varepsilon = 0$), naprężenia możemy wyrazić w następującej postaci:

$$\sigma_1(z) = \sigma_2(z) = \sigma(z) = -\frac{E_0\alpha}{1-\nu}\left[\varepsilon^P/\alpha + (\Phi+\zeta\Psi)(1-e\varepsilon^P/\alpha) - e(\Phi+\zeta\Psi)^2\right]. \tag{4.7}$$

Naprężenia resztkowe wynikające z dowolnego, niezależnego od czasu pola odkształceń plastycznych $\varepsilon^P(z) = \bar{\varepsilon}(z)$, mają formę

$$\rho(z) = \sigma(z) - \sigma^E(z) = -\bar{\varepsilon}(z)\frac{E_0}{1-\nu}[1-e(\Phi+\zeta\Psi)]; \tag{4.8}$$

ponieważ [przyjmując $\varepsilon^P = 0$ we wzorze (4.7)] otrzymujemy następujące wyrażenie na naprężenia sprężyste $\sigma^E(z)$:

$$\sigma^E(z) = -\frac{E_0\alpha}{1-\nu}(\Phi+\zeta\Psi)[1-e(\Phi+\zeta\Psi)]. \tag{4.9}$$

Z warunku przystosowania (3.1) wynika, że dla wszystkich ζ takich, dla których $|\zeta| \leqslant 1$, i dla wszystkich Φ i Ψ spełniających (4.4) istnieć musi stałe pole $\bar{\varepsilon}(z)$ takie, że

$$(4.10) \quad -\sigma_0 \leqslant \frac{E_0 \alpha}{1-\nu}(\Phi+\zeta\Psi)[1-e(\Phi+\zeta\Psi)]+\bar{\varepsilon}\frac{E_0}{1-\nu}[1-e(\Phi+\zeta\Psi)] \leqslant \sigma_0 .$$

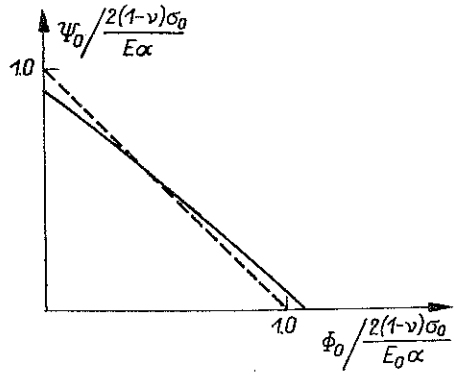
Rezultat ten będzie poprawny dla dowolnego warunku plastyczności, ponieważ w rozpatrywanym przypadku $\sigma_1=\sigma_2=\sigma=\sigma(z)$, $\sigma_3=0$. Przekształcając (4.10) otrzymujemy

$$(4.11) \quad -\frac{\sigma_0(1-\nu)}{E_0\alpha[1-e(\Phi+\zeta\Psi)]}-(\Phi+\zeta\Psi) \leqslant \bar{\varepsilon}(z)/\alpha \leqslant \frac{\sigma_0(1-\nu)}{E_0\alpha[1-e(\Phi+\zeta\Psi)]}-(\Phi+\zeta\Psi).$$

Dla Φ i Ψ zmieniających się w granicach (4.4) nierówności (4.11) będą spełnione i odpowiednie $\bar{\varepsilon}(z)$ będą istnieć, jeżeli dla wszystkich czterech wierzchołków prostokąta (4.4) właściwa będzie ta sama wielkość $\bar{\varepsilon}(z)$. Warunek taki prowadzi do układu czterech rodzin nierówności

$$-\frac{\sigma_0(1-\nu)}{E_0\alpha(1-e\Phi_0)}-\Phi_0 \leqslant \bar{\varepsilon}(z)/\alpha \leqslant \frac{\sigma_0(1-\nu)}{E_0\alpha(1-e\Phi_0)}-\Phi_0 \text{ itd.}$$

Jest bardzo trudno stwierdzić, która z powyższych nierówności jest najbardziej istotna dla danego szczególnego ζ i dla którego ζ warunek przystosowania jest najbardziej ograniczający. Jeżeli jednak weźmiemy pod uwagę, że e jest małym parametrem, to powyższa analiza uprości się, ponieważ wystarczy wtedy wziąć pod uwagę jedynie punkty $\zeta=1$ i $\zeta=-1$. Otrzymujemy wtedy



Rys. 4

$$(4.12) \quad \Phi_0+\Psi_0 \leqslant \frac{\sigma_0(1-\nu)}{E_0\alpha}[1/(1+e\Psi_0)+1/(1-e\Phi_0)]$$

(por. linię ciągłą na rys. 4). Dla $e=0$ otrzymuje się stąd wynik podany przez ROZENBLUMA (4.5).

Wzór (4.12) wykazuje, że

1) jeżeli przeważa efekt równomiernego ogrzania, opisywany przez Φ_0, to dopuszczalna wartość $\Phi_0+\Psi_0$ jest większa od wartości podawanej przez wzór (4.5);

2) jeżeli przeważa ogrzanie «zgięciowe», to wzór (4.12) jest bardziej ograniczający.

Wyniki (4.5) i (4.12) przedstawiono na rys. 4 dla przypadku miękkiej stali. Łatwo na nim sprawdzić prawdziwość powyższych wniosków.

Przykład 3. Rozważmy cylinder grubościenny, poddany działaniu cykli ciśnienia wewnętrznego i temperatury. Dla stałego modułu Younga zadanie to zostało w sposób przybliżony rozwiązane przez HOCHFELDA i JERMAKOWA [10], przy czym wzięto również pod uwagę zmienność granicy plastyczności wraz z temperaturą.

Jeżeli cykle temperatury są wystarczająco powolne, tak aby można było korzystać ze stacjonarnego rozwiązania równania przewodnictwa, to rozkład temperatury można przedstawić w sposób następujący:

$$\theta(r)=\theta(a)+[\theta(b)-\theta(a)]\frac{\ln r/a}{\ln r/b}; \tag{4.13}$$

symbole a, b i r oznaczają odpowiednio promień wewnętrzny, zewnętrzny i bieżący. Rozpatrywać będziemy przypadek, gdy wpływ zmian ciśnienia na przystosowanie może być pominięty.

Równanie równowagi

$$\frac{d\sigma_r}{dr}+\frac{\sigma_r-\sigma_\varphi}{r}=0, \tag{4.14}$$

warunek nierozdzielności

$$\frac{d\varepsilon_\varphi}{dr}+\frac{\varepsilon_\varphi-\varepsilon_r}{r}=0 \tag{4.15}$$

i prawo stanu

$$\begin{aligned}\varepsilon_r&=1/E(\theta)\,[\sigma_r-\nu\sigma_\varphi]+\alpha\theta+\varepsilon_r^P,\\ \varepsilon_\varphi&=1/E(\theta)\,[\sigma_\varphi-\nu\sigma_r]+\alpha\theta+\varepsilon_\varphi^P\end{aligned} \tag{4.16}$$

dają po przekształceniach następujące równanie różniczkowe ze względu na naprężenie σ_r:

$$\frac{r^2}{E}\frac{d^2\sigma_r}{dr^2}+\frac{r}{E}\frac{d\sigma_r}{dr}\left(3-\frac{1}{E}\frac{dE}{d\theta}\frac{d\theta}{dr}\right)-\frac{1-\nu}{E^2}\frac{dE}{d\theta}\frac{d\theta}{dr}\sigma_r+ \tag{4.17}$$

$$+r\alpha\frac{d\theta}{dr}+r\frac{d\varepsilon_\varphi^P}{dr}+\varepsilon_\varphi^P-\varepsilon_r^P=0.$$

Symbole σ_r, σ_φ oznaczają naprężenia, a ε_r, ε_φ odkształcenia odpowiednio promieniowe i obwodowe; θ oznacza temperaturę, α współczynnik liniowej rozszerzalności cieplnej, indeks P oznacza plastyczną część odpowiedniej składowej odkształcenia.

Jeżeli wyrażenia (1.1) i (4.13) podstawić do (4.17) oraz jeżeli $\theta(b)=0$, to otrzymamy

$$r^2\frac{d^2\sigma_r}{dr^2}+r\frac{d\sigma_r}{dr}\left(3-\frac{e\theta(a)}{r\ln b/a\,[1-e\theta(a)\ln(b/r)/\ln(b/a)]}\right)- \tag{4.18}$$

$$-\frac{(1-\nu)\,e\theta(a)\,\sigma_r/r\ln b/r}{E_0\,[1-e\theta(a)\ln(b/r)/\ln(b/a)]}+E_0\,\alpha\theta(a)/\ln(b/a)\,[1+e\theta(a)\ln(b/r)/\ln(b/a)]+$$

$$+E_0\,[1-e\theta(a)\ln(b/r)/\ln(b/a)]\left[r\frac{d\varepsilon_\varphi^P}{dr}+\varepsilon_\varphi^P-\varepsilon_r^P\right]=0.$$

Wyraz trzeci w powyższym równaniu może być pominięty, ponieważ e jest małym parametrem, a σ_r (dla dostatecznie małych wartości stosunku b/a) jest małe w stosunku do $d\sigma_r/dr$.

Zatem równanie (4.8) redukuje się do postaci

$$r^2\frac{d^2\sigma_r}{dr^2}+(3r-\epsilon)\frac{d\sigma_r}{dr}=E_0\alpha\theta(a)/\ln(b/a)\,[1-\epsilon\ln b/r]-\mathcal{C}(r), \tag{4.19}$$

gdzie $\epsilon=e\theta(a)/\ln(b/a)$ jest małym parametrem oraz gdzie

$$\mathcal{C}(r)=E_0\,[1-e\theta(a)\ln(b/r)/\ln(b/a)]\left[r\frac{d\varepsilon_\varphi^P}{dr}+\varepsilon_\varphi^P+\varepsilon_r^P\right].$$

Równanie (3.19) może być rozwiązywane następująco. Przedstawiamy je w postaci

$$r^2\frac{d\tau}{dr}+\tau(3r-\epsilon)=E_0\alpha\theta(a)/\ln(b/a)\left[1-\epsilon\ln\frac{b}{r}\right]-\mathcal{C}(r). \tag{4.20}$$

Równanie to rozwiązywać będziemy w sposób przybliżony metodą małego parametru. Rozwiązanie wyrazi się przy pomocy pewnych całek wyrażenia $\epsilon(r)$ zależnego od pola odkształceń plastycznych.

Zakładamy (pomijając wyższe potęgi ϵ), że

$$\tau(r)=f_0(r)+\epsilon f_1(r) \tag{4.21}$$

dla dowolnie dobranych wartości (dostatecznie małych) ϵ. Otrzymujemy stąd

$$\begin{aligned}
f_0(r)&=C_1/r^3+E_0\alpha\theta(a)/2r\ln\frac{b}{a}-\frac{1}{r^3}\int r\mathcal{C}(r)\,dr,\\
f_1(r)&=\frac{1}{r^3}\int rf_0(r)\,dr+D_1\left(r^3+E_0\alpha\theta(a)\right)\ln\frac{b}{a}\,2r\left[\ln\frac{r}{b}-\frac{1}{2}\right].
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Stałe całkowania wyznaczamy z naprężeniowych warunków brzegowych. Jeżeli, jak w naszym przypadku $\sigma_r(a)=\sigma_r(b)=0$, to

$$C_1=-2a^2b^2/(b^2-a^2)\,[E_0\alpha\theta(a)+\mathcal{F}(a)-\mathcal{F}(b)],$$

$$C_2=\mathcal{F}(a)-2b^2/(b^2-a^2)\,[E_0\alpha\theta(a)+\mathcal{F}(a)-\mathcal{F}(b)],$$

$$D_1=-2a^2b^2/(b^2-a^2)\left\{\mathfrak{G}(a)-\mathfrak{G}(b)+\frac{E_0\alpha\theta(a)}{\ln b/a}\left[\frac{b-a}{2ab}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{2\ln b/a\,(b^2+ab+a^2)}{3ab\,(b+a)}+\frac{1}{2}\ln\frac{a}{b}\,(1/2-\ln a)\right]\right\},$$

$$D_2=D_1/2a^2+\mathfrak{G}(a)-\frac{E_0\alpha\theta(a)}{\ln b/a}\left[-1/2a-\frac{2b^2\ln b/a}{3a\,(b^2-a^2)}+\frac{1}{2}\ln a\left(\ln\frac{a}{b}-\frac{1}{2}\right)\right],$$

gdzie

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(r)&=\int\frac{dr}{r^3}\int r\mathcal{C}(r)\,dr,\\
\mathfrak{G}(r)&=\int\frac{dr}{r^3}\int r\frac{d\mathcal{F}(r)}{dr}\,dr-\frac{2a^2b^2\left(\mathcal{F}(a)-\mathcal{F}(b)\right)}{b^2-a^2}\int\frac{dr}{r^4}
\end{aligned} \tag{4.23}$$

oraz

$$\sigma_r(r)=f_0(r)\,dr+C_2+\epsilon\int f_1(r)\,dr+\epsilon D_2\,,$$
$$\sigma_\varphi(r)=f_0(r)\,dr+C_2+rf_0(r)+\epsilon\int f_1(r)\,dr+\epsilon D_2+\epsilon r f_1(r)\,. \tag{4.24}$$

W ten sposób, analogicznie do przypadków 1 i 2, wyraziliśmy naprężenia za pomocą pola temperatury i pola odkształceń plastycznych.

Według twierdzenia dowiedzionego w p. 3, warunek przystosowania w przypadku warunku plastyczności Treski wymaga spełnienia następujących nierówności:

$$|\sigma_r-\sigma_\varphi|\leqslant\sigma_0\,,\ |\sigma_r|\leqslant\sigma_0\,,\ |\sigma_\varphi|\leqslant\sigma_0 \tag{4.25}$$

dla wszystkich temperatur $\theta(a)$ spełniających warunek $0\leqslant\theta(a)\leqslant\theta_0$ i dla tego samego odkształcenia plastycznego. W naszym przypadku wystarczy rozpatrzeć tylko dwa skrajne stany $\theta(a)=0$ i $\theta(a)=\theta_0$.

Wypisując nierówności (4.25) otrzymujemy

$$-\sigma_0\leqslant\left[\frac{C_1}{r^2}\right]_{\theta(a)=0}-\frac{1}{r^2}\int rC(r)\,dr+\epsilon\left\{-\frac{1}{r^2}\int r\frac{d\mathcal{F}(r)}{dr}\,dr+\right.$$
$$\left.+\frac{2a^2b^2(\mathcal{F}(a)-\mathcal{F}(b))}{r^3(b^3-a^3)}+\left[\frac{D_1}{r^2}\right]_{\theta(a)=0}\right\}\leqslant\sigma_0\,. \tag{4.26}$$

Łącząc odpowiednio te nierówności eliminujemy wyrazy zawierające odkształcenia plastyczne i otrzymujemy rodzinę nierówności z parametrem r; np.

$$-2\sigma_0\leqslant E_0\alpha\theta_0/2\ln(b/a)-2a^2b^2E_0\alpha\theta_0/r^2(b^2-a^2)+$$
$$+\epsilon\left\{\frac{E_0\alpha\theta_0}{\ln b/a}\left[\frac{1}{2r}+\frac{2a^2b^2\ln b/a}{r^3(b^3-a^3)}\right]-\frac{2a^2b^2E_0\alpha\theta_0}{r^2(b^2-a^2)\ln(b/a)}\left[\frac{b-a}{2ab}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{2\ln b/a\,(b^2+ab+a^2)}{3ab(b+a)}+\frac{1}{2}\ln\frac{a}{b}\left(\frac{1}{2}-\ln a\right)\right]+\frac{E_0\alpha\theta_0}{2r\ln b/a}\left(\ln\frac{r}{b}-\frac{1}{2}\right)\right\}\leqslant 2\sigma_0\,. \tag{4.27}$$

Ogólna analiza takiego układu nierówności jest praktycznie niemożliwa. Jednak dla określonych wartości parametrów a, b, E_0, σ_0, α i e na ogół może ona być dokonana.

Dla wartości stałych materiałowych, podobnie jak w poprzednich przykładach, górna granica bezpieczna dla amplitudy θ_0 jest rzędu 100°C, a wpływ zmian modułu Younga wraz z temperaturą nie przekracza kilku procent.

Analogicznie analizować możemy grubościenną powłokę sferyczną, jeżeli istnieje osiowa symetria środkowa, ponieważ wszystkie podstawowe równania mają identyczną lub prawie identyczną postać z postacią w przypadku powłoki walcowej.

Literatura cytowana w tekście

1. H. Bleich, *Über die Bemessung statisch stimmter Stahltragwerke unter Berücksichtigung der elastischplastischen Verhaltens des Baustoffes*, Bauingenieur, **19–20**, 261, 1932.
2. E. Melan, *Der Spannungszustand eines Hencky-Mises'schen Kontinuums bei verändlicher Belastung*, Sitz. Ber. Ak. Wiss. Wien, IIa, **147**, 73, 1938.
3. W. T. Koiter, *A new general theorem on shakedown of elastic-plastic structures*, Proc. Kon. Ned. Ak. Wet., **B 59**, 24, 14, 1956.
4. W. Prager, P. G. Hodge, *Theory of perfectly plastic solids*, J. Wiley and Sons, New York 1951.

5. W. PRAGER, *Shakedown in elastic-plastic media subjected to cycles of load and temperature*, Symp. sur la Plasticita nella Scienza della Construzioni, 122, Bologna 1957.
6. В. И. Розенблюм, *О приспособляемости неравномерно нагретых тел*, Изв. Ак. Наук СССР, ОТН, № 7, 136, 1957.
7. В. И. Розеблюм, *К анализу приспособляемости неравномерно нагретых упруго-пластических тел*, РМТФ, № 5, 98, 1965.
8. O. DE DONATO, *Second shakedown theorem allowing for cycles of both loads and temperature*, Rendiconti dell'Ostituto Lombardo di Scienza e Lettere, A **104**, 1970.
9. Д. А. Гохфельд, П. И. Ермаков, *Приспособляемость толстостенных труб при неравномерном нагреве*, ПМТФ, № 3, 107, 1963.
10. Д. А. Гохфельд, П. И. Ермаков, *Приспособляемость толстостенных сферических сосудов в условиях повторных воздействий теплого поля*, Расчеты на прочность, № 10, 137, 1964.
11. F. A. LECKIE, D. J. PAYNE, R. K. PENNY, *Use of elastic solutions to obtain lower bounds on the performance of structures under cycling loading and temperature*, Paper 1, Applied Mechanics Convention, Cambridge 1966.
12. F. A. LECKIE, R. K. PENNY, *Shakedown as a guide to the design of pressure vessels*, J. Eng. Industry, 799, August 1969.
13. J. A. KÖNIG, *A shakedown theorem for temperature depenedent elastic moduli*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **17**, 161, 1969.
14. W. T. KOITER, *General theorems for elastic-plastic solids*, Progress in Solid Mechanics, North Holland Co, Amsterdam 1960.

Резюме

О ПРОЕКТИРОВАНИИ СООРУЖЕНИЙ С УЧЕТОМ ПРИСПОСОБЛЯЕМОСТИ В СЛУЧАЕ, КОГДА УПРУГИЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ЗАВИСЯТ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

Теорема Мелана о приспособляемости обобщается в данной работе на случаи, когда упругие модули зависят от температуры. Новая формулировка теоремы потребовала соответствующей модификации методики решения задач. Для нахождения областей чисто упругой реакции сооружений использована прямая зависимость между напряжениями и пластическими деформациями.

Даны примеры расчетов стержневых систем, пластин и толстостенных оболочек. Эти примеры свидетельствуют о том, что влияние температурной зависимости модуля Юнга на приспособляемость не превышает в основном нескольких процентов.

SUMMARY

ON THE SHAKE-DOWN STRUCTURAL DESIGN IN THE CASE OF TEMPERATURE-DEPENDENT ELASTIC COEFFICIENTS

Melan's theorem on the shake-down phenomena is generalized to the case of temperature-dependent elastic moduli. The new formulation of the theorem requires a suitable modification of the method of solution. In order to determine the regions of purely elastic behaviour of the structure the plastic stress-strain relations have been used. The numerical examples concerning rods, plates and thick-walled shells show the temperature sensibility of the Young modulus to be of the order of several percent.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 stycznia 1972 r.