

## RÓWNANIA TEORII DUŻYCH UGIĘĆ POWŁOK PLASTYCZNYCH

MARIA DUSZEK (WARSZAWA)

### 1. WSTĘP

Rozwój teorii powłok plastycznych jaki obserwujemy w ostatnich latach umożliwia dokładniejszą i głębszą analizę zachowania się konstrukcji cienkościennych w zakresie odkształceń plastycznych. Wiele zagadnień takich, jak uwzględnienie zmian własności geometrycznych, spowodowanych plastyczną deformacją, lub pewnych cech materiału, związanych z przyjętym prawem konstytutywnym (np. nieściśliwości dla powłok plastycznych), wymaga całkowitej weryfikacji stosowanych dotychczas założeń i wniosków wyprowadzonych na ich podstawie.

Teoria powłok, jak każda teoria przybliżona, nie jest w stanie uniknąć pewnych sprzeczności i niedokładności; chodzi jednak o to, aby zweryfikować zakres dopuszczalności poszczególnych założeń i stosować konsekwentnie przyjęty stopień dokładności we wszystkich podstawowych związkach, pomijając wyrazy tego samego rzędu wielkości.

Podstawowym studiom w zakresie powłok sprężystych poświęcono w ostatnich latach szereg prac. Należą tu m.in. badania KOITERA [1 i 2], JOHNA [3], SANDERSA [4], NAGHDIEGO [5] i WOŹNIAKA [6], zawierające rozważania na temat oszacowań związków geometrycznych i dyskusję równań równowagi.

W zakresie powłok plastycznych główna uwaga skierowana była na rozwiązanie zagadnień nośności granicznej na podstawie klasycznych założeń teorii LOVE'A-KIRCHHOFFA [7]. Przeprowadzona przez DUSZEK i SAWCZUKA [8] analiza założeń i dyskusja związków konsekwentnej teorii początkowego plastycznego płynięcia powłok z materiału nieściśliwego wskazuje, że założenia te są dostateczne, jeśli idzie o ocenę nośności granicznej.

Zagadnieniom nieliniowym w zakresie odkształceń sprężysto-plastycznych powłok poświęcono dużą liczbę prac. Dotyczyły one jednak raczej zagadnień szczegółowych, a nie badały niesprzeczności założeń ani równań wyjściowych, stosowanych teorii przybliżonych. Przegląd tych prac zawiera opracowanie LEPIKA [9], natomiast WASZCZYSZYN [10] opracował konsekwentną teorię i metodę obliczania powłok obrotowo-symetrycznych przy uwzględnieniu zmian geometrii konstrukcji.

Praca SAWCZUKA [11] zawiera sformułowanie lagrangeowskiego opisu dla powłok sztywno-plastycznych przy dużych ugięciach. Na uwagę jeszcze zasługuje praca Ł. A. KOLESNIKOWA [23], w której przeanalizowano wpływ pomijania składowych we wzorach na skończone odkształcenia — na dokładność równań dużych ugięć płyt.

Niniejsza praca ma na celu ustalenie równań teorii powłok plastycznych z materiału nieściśliwego przy uwzględnieniu zmian geometrii. Jest ona kontynuacją studiów [8 i 11] i celem jej jest podanie układu równań teorii dużych ugięć oraz przedstawienie i dyskusja związków podstawowych dla kilku teorii przybliżonych. Wyprowadzono równania teorii skończonych ugięć powłok w układzie odniesienia, związanym z nieodkształconą konfiguracją powłok, tzn. w opisie Lagrange'a.

W p. 2 podano podstawowe zależności pomiędzy zmiennymi w opisie Eulera i Lagrange'a oraz sformułowano podstawowe założenia opracowywanej teorii dużych ugięć. W p. 3 przeprowadzono systematyczną klasyfikację związków odkształceniowo-przemieszczeniowych, specyfikując ich postać w zależności od przyjętej «geometrii» powłoki i dopuszczalnych wielkości poszczególnych składowych wektora przemieszczeń. Ocena oszacowań zmiennych uogólnionych i równań równowagi dla pewnych wybranych teorii przeprowadzono w p. 4. W p. 5 omówiono zasady formułowania warunku plastyczności w teorii dużych ugięć i podano odpowiednie przykłady. W zakończeniu wyspecyfikowano podstawowe związki dla poszczególnych przypadków powłok walcowych i kulistych.

Jedną z podstawowych niekonsekwencji w stosowanej dotychczas teorii powłok plastycznych przy dużych ugięciach jest przyjmowanie założeń Love'a-Kirchhoffa przy wyprowadzaniu związków geometrycznych przy jednoczesnym założeniu nieściśliwości materiału w trakcie określania równań powierzchni granicznej. Zagadnienie to odnośnie zakresu początkowego płynięcia omawiano w pracy [8]. Jednak wydaje się, że sprzeczność ta szczególnie wyraźnie występuje dopiero przy zaawansowanym plastycznym płynięciu powodującym przemieszczenia co najmniej rzędu grubości powłoki.

Gdy zmiany wielkości geometrycznych konstrukcji w procesie odkształcenia nie są pomijalnie małe, konieczne jest odróżnianie początkowej konfiguracji ciała od zdeformowanej. Dotychczasowe teorie dużych ugięć płyt i powłok nie są w tym względzie konsekwentne i odnoszą pewne wielkości, np. odkształcenia, do stanu odkształconego, podczas gdy siły wewnętrzne i równania równowagi definiowane są w układzie związanym z nieodkształconą powłoką. W logicznej teorii pole podstawowych zmiennych powinno być odniesione bądź do ustalonego układu związanego z początkową, niezdeformowaną konfiguracją ciała, bądź też do układu związanego z ciałem w stanie zdeformowanym. Za opisem Lagrange'a przemawiają dwa względy. Po pierwsze, warunki brzegowe formułowane są zwykle w konfiguracji nieodkształconej, po drugie zaś w opisie tym znikają tożsamościowo pochodne materialne tensora odkształceń w przypadku sztywnego ruchu (por. np. [12]). Przedstawione w niniejszej pracy zależności odniesione są konsekwentnie do układu związanego z nieodkształconą konfiguracją powłoki.

## 2. OZNACZENIA I ZAŁOŻENIA

Jeśli przez  $X^A$  i  $x^I$  oznaczymy odpowiednio materialne i przestrzenne współrzędne, a przez  $G_{AB}$  i  $g_{ij}$  tensory metryczne odpowiednich baz, to dla normalnych układów współrzędnych spełnione są warunki  $G_{43} = g_{a3} = 0$ ,  $G_{33} = g_{33} = 1$ . Litery greckie

przebiegają wartości 1, 2, łacińskie zaś wartości 1, 2, 3. W przyjętym układzie współrzędnych linie parametryczne  $X^A = \text{const}$  ( $x^a = \text{const}$ ) tworzą siatkę na powierzchni środkowej, a  $X^3$  ( $x^3$ ) oznacza współrzędną odmierzoną w kierunku zewnętrznej normalnej do powierzchni środkowej.

Aczkolwiek założenia teorii Love'a-Kirchhoffa należy uznać za bardzo trafne i ogromna większość prac z zakresu teorii powłok przyjmuje je bez zastrzeżeń, to należy sobie zdać sprawę z zakresu ich stosowalności. Głównymi przyczynami budzącymi zastrzeżenia co do zastosowania tych założeń w rozwijanej teorii są przyczyny następujące: 1) dopuszczenie stanów zaawansowanego plastycznego płynięcia, powodującego duże przemieszczenia lub nawet duże odkształcenia; stąd konieczność stosowania związków geometrycznych nieliniowych; 2) przyjęcie założenia o nieściśliwości materiału, które jest jednym z podstawowych przyjęć w teorii konstrukcji plastycznych. Wymaganie spełnienia powyższych warunków przy jednoczesnym żądaniu spełnienia założeń Love'a-Kirchhoffa doprowadziłoby nas do bardzo wąskiej klasy rozpatrywanych deformacji określonych związkami

$$X^I = X^I(x^a), \quad X^3 = x^3$$

oraz  $E_{AI} G^{AI} = 0$ , co oznacza specjalne stany odkształceń, zachodzące bez zmian grubości powłoki.

W celu uzyskania możliwości rozpatrywania ogólnych przypadków deformacji, należy odstąpić od teorii Love'a-Kirchhoffa rezygnując z pewnych jej założeń, a w szczególności z wymagań następujących: 1) zerowania się odkształceń poprzecznych w każdym punkcie przekroju powłoki, 2) niewydłużalności elementu normalnego do powierzchni środkowej.

Założenia przedstawionej teorii są następujące:

1. Rozkład przemieszczeń wzdłuż grubości powłoki jest liniowy:

$$(2.1) \quad U_I = V_I(X^A) + X^3 \beta_I(X^A), \quad U_3 = W(X^A) + X^3 \beta_3(X^A),$$

gdzie  $V_I$ ,  $W$  oznaczają kowariantne składowe wektora przemieszczenia punktów powierzchni środkowej,  $\beta_I$  jest miarą zmiany nachylenia zewnętrznej normalnej do powierzchni środkowej,  $\beta_3$  przedstawia rozkład odkształceń normalnych do powierzchni środkowej.

2. Wpływ odkształceń poprzecznych na wartość energii dysypowanej jest pomijalnie mały. Wymaganie to związane jest z warunkiem

$$(2.2) \quad \int_{-h/2}^{h/2} E_{A3} dX^3 = 0.$$

3. Odkształcenie plastyczne zachodzi bez zmiany objętości dla całego przekroju powłoki, tzn.

$$(2.3) \quad \int_{-h/2}^{h/2} E_{33} dX^3 = - \int_{-h/2}^{h/2} E_{AI} G^{AI} dX^3.$$

4. Wpływ naprężeń normalnych działających na powierzchnie równoległe do powierzchni środkowej (z wyjątkiem powierzchni ograniczających) może być pominięty, tzn.

$$(2.4) \quad \sigma_{33} = 0.$$

5. Powłoka jest cienka, tzn.

$$(2.5) \quad (h/R)^n \ll 1,$$

gdzie  $h$  oznacza grubość powłoki,  $R$  najmniejszy promień krzywizny powierzchni środkowej,  $2 \geq n \geq 1$  oznacza przyjętą grubość powłoki. Zwykle w teorii powłok cienkich przyjmuje się  $n=1$ .

Nawiązując do (2.2) nadmienimy, że zwykle przyjmowane założenie teorii Love'a-Kirchhoffa, żądające zerowania się odkształceń poprzecznych  $E_{A3} = 0$  dla każdego punktu powłoki, jest w sprzeczności z dopuszczeniem niezerowych sił poprzecznych. Oczywiście jest to niekonsekwencja wynikająca z przybliżonego charakteru teorii powłok i nie podważająca sensu teorii opartej na założeniach Love'a-Kirchhoffa, niemniej problem ten nadal budzi wątpliwości niektórych autorów [13] i powoduje komentarze [14].

Formułując równania teorii powłok w opisie Lagrange'a, tzn. w odniesieniu do konfiguracji nieodkształconej, posługiwac się będziemy symetrycznym tensorem naprężeń Piolięgo-Kirchhoffa i tensorem odkształceń Greena.

Dla materiału nieściśliwego zachodzi następujący związek pomiędzy składowymi tensora naprężeń Cauchy'ego  $\sigma^{ij}$  i składowymi tensora naprężeń Piolięgo-Kirchhoffa  $S^{KL}$ :

$$(2.6) \quad \sigma^{ij} = x^i_{,K} x^j_{,L} S^{KL}.$$

Równania równowagi odniesione do stanu niezdeformowanego przyjmują postać:

$$(2.7) \quad (x^k_{,K} S^{KM})_{||M} = 0,$$

gdzie  $||$  oznacza kowariantne różniczkowanie w bazie o tensorze metrycznym  $G_{AB}$ .

Gradient deformacji można wyrazić przez gradient przemieszczenia następującym wzorem:

$$(2.8) \quad x^k_{,K} = g^k_M (\delta^M_K + U^M_{||K}), \quad g^k_M = \mathbf{g}^k \mathbf{G}_M.$$

Korzystając z (2.8) możemy równania równowagi (2.7) przedstawić w postaci

$$(2.9) \quad [(\delta^M_K + U^M_{||K}) S^{KR}]_{||R} = 0.$$

Stosując twierdzenie Gaussa do (2.9) otrzymujemy naprężeniowe warunki brzegowe

$$(2.10) \quad [(\delta^M_K + U^M_{||K}) S^{KR}] N_R = T^M,$$

gdzie  $N_R$  oznacza jednostkowy wektor normalny do niezdeformowanej powierzchni,  $T^M$  wektor naprężenia na tej powierzchni.

Tensor odkształcenia Greena określony jest za pomocą następującej formuły:

$$(2.11) \quad 2E_{KL} = x^i_{,K} x^j_{,L} g_{ij} - G_{KL} = U_{K||L} + U_{L||K} + G_{RM} U^R_{||K} U^M_{||L}.$$

Po zróżniczkowaniu względem czasu otrzymujemy tensor prędkości odkształcenia Greena w postaci

$$(2.12) \quad 2\dot{E}_{KL} = \dot{U}_{K||L} + \dot{U}_{L||K} + G_{RM} \dot{U}^R_{||K} U^M_{||L} + G_{RM} U^R_{||K} \dot{U}^M_{||L}.$$

## 3. KINEMATYKA

Zgodnie z założeniem (2.1) dalszą analizę ograniczymy do takiej klasy deformacji powłok, która charakteryzuje się liniowym rozkładem przemieszczeń wzdłuż grubości ścianki.

Jak wskazuje analiza przeprowadzona w [8], wpływ nieliniowych wyrazów (w rozwinięciu składowych wektora prędkości przemieszczeń w szereg potęgowy) na energię dysypowaną jest rzędu  $(h/R)^2$  lub  $(h/L)^2$  w porównaniu do jedności. Wobec założenia 5 o cienkości powłoki przyjęty liniowy rozkład pola przemieszczeń nie wprowadza dodatkowych ograniczeń, natomiast znacznie upraszcza związki opisujące kinematykę powłoki. Liniowość pola przemieszczeń względem zmiennej  $X^3$  jest również jednym z założeń teorii Love'a-Kirchhoffa.

Składowe tensora odkształceń Greena na podstawie (2.11) przyjmują postać

$$(3.1) \quad \begin{aligned} 2E_{A\Gamma} &= U_{A\parallel\Gamma} + U_{\Gamma\parallel A} + U_{\Phi\parallel A} U_{\parallel\Gamma}^{\Phi} + U_{3\parallel A} U_{\parallel\Gamma}^3, \\ 2E_{A3} &= U_{3\parallel A} + U_{A\parallel 3} + U_{\Phi\parallel 3} U_{\parallel A}^{\Phi} + U_{3\parallel 3} U_{\parallel A}^3, \\ 2E_{33} &= 2U_{3\parallel 3} + U_{\Phi\parallel 3} U_{\parallel 3}^{\Phi} + U_{3\parallel 3} U_{\parallel 3}^3. \end{aligned}$$

Podstawiając (2.1) do (3.1) otrzymujemy

$$(3.2) \quad \begin{aligned} 2E_{A\Gamma} &= V_{A\parallel\Gamma} + V_{\Gamma\parallel A} + V_{\Phi\parallel A} V_{\parallel\Gamma}^{\Phi} + W_{\parallel A} W_{\parallel\Gamma} + X^3(\beta_{A\parallel\Gamma} + \beta_{\Gamma\parallel A} + V_{\Phi\parallel\Gamma} \beta_{\parallel A}^{\Phi} + \\ &\quad + \beta_{\Phi\parallel A} V_{\parallel\Gamma}^{\Phi} + W_{\parallel A} \beta_{3\parallel\Gamma} + \beta_{3\parallel A} W_{\parallel\Gamma}) + (X^3)^2(\beta_{\Phi\parallel A} \beta_{\parallel\Gamma}^{\Phi} + \beta_{3\parallel A} \beta_{3\parallel\Gamma}), \\ 2E_{A3} &= \beta_A + W_{\parallel A} + \beta_{\Phi} V_{\parallel A}^{\Phi} + \beta_3 W_{\parallel A} + X^3(\beta_{3\parallel A} + \beta_{\Phi} \beta_{\parallel A}^{\Phi} + \beta_3 \beta_{3\parallel A}), \\ 2E_{33} &= 2\beta_3 + \beta_{\Phi} \beta^{\Phi} + \beta_3 \beta^3. \end{aligned}$$

Różniczkowanie kowariantne tensorów przestrzennych można wyrazić przez wielkości określone na powierzchni środkowej przy pomocy związków (por. np. [1])

$$(3.3) \quad \begin{aligned} V_{A\parallel\Gamma} &= V_{A|\Gamma} - B_{A\Gamma} W, \\ W_{\parallel A} &= W_{|A} + B_A^{\Gamma} V_{\Gamma}, \\ V_{A\parallel 3} &= V_{A|3} = V_{A,3}, \end{aligned}$$

gdzie  $|$  oznacza różniczkowanie kowariantne w bazie związanej z powierzchnią środkową. Składowe tensora odkształceń Greena (3.2) przybierają wówczas następującą postać:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} 2E_{A\Gamma} &= 2V_{(A|\Gamma)} - 2B_{A\Gamma} W + V_{|A}^{\Phi} V_{\Phi|\Gamma} - 2B_{(A}^{\Phi} V_{\Phi|\Gamma)} W + B_A^{\Phi} B_{\Phi\Gamma} W^2 + \\ &\quad + W_{|A} W_{|\Gamma} + 2B_{(A}^{\Phi} V_{\Phi|\Gamma)} - B_A^{\Phi} V_{\Phi} B_{\Gamma}^{\Theta} V_{\Theta} + X^3 [2\beta_{(A|\Gamma)} - 2B_{A\Gamma} \beta_3 - \\ &\quad - 2B_{(A}^{\Phi} V_{\Phi|\Gamma)} + 2B_A^{\Phi} B_{\Phi\Gamma} W + 2V_{|A}^{\Phi} \beta_{\Phi|\Gamma)} - 2B_{(A}^{\Phi} \beta_{\Phi|\Gamma)} W + 2B_{(A}^{\Phi} B_{\Phi|\Gamma)} W \beta_3 - \\ &\quad - 2B_{(A}^{\Phi} V_{\Phi|\Gamma)} \beta_3 + 2W_{|(A} \beta_{3|\Gamma)} + 2B_{(A}^{\Phi} V_{\Phi} \beta_{3|\Gamma)} + 2B_{(A}^{\Phi} W_{|\Gamma)} V_{\Phi} + \\ &\quad + 2B_{(A}^{\Phi} B_{\Gamma}^{\Theta} V_{\Theta} \beta_{\Phi}]) + (X^3)^2 [\beta_{|A}^{\Phi} \beta_{\Phi|\Gamma} + B_A^{\Phi} \beta_{\Phi} B_{\Gamma}^{\Theta} \beta_{\Theta} + \beta_{3|A} \beta_{3|\Gamma} + \\ &\quad + B_{A\Phi} B_{\Gamma}^{\Theta} \beta_3^2 + 2B_{(A}^{\Phi} \beta_{\Phi} \beta_{3|\Gamma)} - 2B_{(A}^{\Phi} \beta_{\Phi|\Gamma)} \beta_3], \\ 2E_{A3} &= W_{|A} + \beta_A + B_A^{\Phi} V_{\Phi} + V_{|A}^{\Phi} \beta_{\Phi} - B_A^{\Phi} \beta_{\Phi} W + W_{|A} \beta_3 + B_A^{\Phi} V_{\Phi} \beta_3 + \\ &\quad + X^3(\beta_{3|A} + B_A^{\Phi} \beta_{\Phi} + \beta_{|A}^{\Phi} \beta_{\Phi} - B_A^{\Phi} \beta_{\Phi} \beta_3 + \beta_{3|A} \beta_3 + B_A^{\Phi} \beta_{\Phi} \beta_3), \\ 2E_{33} &= 2\beta_3 + \beta^A \beta_A + \beta_3^2. \end{aligned}$$

Powyższa postać składowych tensora odkształceń jest zbyt skomplikowana, aby mogła znaleźć praktyczne zastosowanie. Formułując przybliżone teorie powłok, należy pominąć wyrazy stosownie do wprowadzonych założeń upraszczających. Wymagany przez założenie 5 stopień dokładności określony pomijalnością wyrazów rzędu  $(h/R)^n$  w stosunku do jedności powinien konsekwentnie być przestrzegany. Odrzucając we wzorach (3.4) wyrazy rzędu  $(h/R)^n$  w stosunku do jedności, nie zmniejszamy stopnia dokładności rozważanej teorii.

W celu oszacowania pochodnych kowariantnych wprowadzamy następującą definicję długości wzorcowej fali deformacji powierzchni środkowej  $L$  (por. np. [2]):

$$(3.5) \quad |U_{K|A}| \equiv O\left(\frac{U_K}{L}\right).$$

Rząd wielkości poszczególnych składowych we wzorach (3.4) zależy od stopnia zaawansowania deformacji, geometrii powłoki, warunków obciążenia oraz warunków brzegowych. Na ogół nie jesteśmy w stanie w sposób ścisły z góry przewidzieć stopnia wpływu poszczególnych czynników, niemniej możemy poczynić pewne oszacowania rzędu ich wielkości, sprawdzając następnie poprawność tych oszacowań po rozwiązaniu problemu lub na drodze doświadczalnej.

Tak więc formułując przybliżone teorie, rozważać będziemy poszczególne przypadki deformacji, klasyfikując je w zależności od przyjętego rzędu następujących wielkości:

$$(3.6) \quad L/R, \quad h/R, \quad W/R, \quad V/R.$$

W literaturze przedstawione są liczne próby klasyfikacji podstawowych związków dla powłok przy dużych odkształceniach. Pierwszym i stosunkowo najobszerniejszym studium dotyczącym tego zagadnienia jest praca CHIENA [15]. Przyjmując jako podstawowe zmienne tensory odkształcenia i zmiany krzywizny, wyprowadził on kompletny układ równań równowagi i związków nierozdzielności dla powłok sprężystych. Następnie, zakładając wielkość krzywizny początkowej oraz rząd wielkości tensorów odkształcenia i zmiany krzywizny, rozpatrzył 36 różnych wariantów podstawowego układu równań. Inną metodę reprezentuje praca DONNELLA [16]. Wprowadzając założenia odnośnie do krzywizny początkowej i wielkości przemieszczeń, przeprowadził on klasyfikację równań kinematycznych wyprowadzonych z rozważań geometrycznych.

Podobnie wychodząc z rozważań geometrycznych E. REISSNER [24] wyprowadził równania geometryczne i równania równowagi dla powłok obrotowych przy kołowo-symetrycznej deformacji. Bezpośrednie porównanie tych równań z równaniami Donnella utrudnia fakt wprowadzenia kąta obrotu elementu zamiast przemieszczenia normalnego.

Ponieważ żadna ze znanych klasyfikacji przybliżonych nieliniowych teorii powłok nie odpowiada w pełni naszym potrzebom w zakresie powłok plastycznych, przeto przeprowadzimy weryfikację dotychczasowych przybliżeń adoptując pewne elementy i konsekwentnie stosując opis Lagrange'a.

Rozpoczniemy od teorii uwzględniającej ugięcia rzędu grubości powłoki. Przy ugięciach mniejszego rzędu uzasadnione jest stosowanie teorii liniowej. Z dotychczasowych prac poświęconych zagadnieniu powłok plastycznych przy skończonych ugięciach [17 – 20, 25] wynika, że ze wzrostem ugięcia szybko wzrastają siły błonowe, natomiast stopniowo zanikają momenty zginające. Biorąc pod uwagę ten wniosek przyjmujemy, że przy ugięciach rzędu grubości powłoki bezwzględna wartość bezwymiarowych momentów zginających jest co najwyżej rzędu sił błonowych.

Systematycznie badając zależności (3.4) dla szeregu wzajemnych stosunków wielkości (3.6) otrzymujemy odpowiednio układy związków geometrycznych poszczególnych teorii. Schemat wskazujący rozpatrywane teorie podany jest w tabelicy 1. Oznaczono tam poszczególne przypadki, dla których szczegółowe związki zawiera tabela 2.

Tablica 1. Rozpatrywane teorie

	$L/R$	$h/R$	$W/R$	$V/R$
1	1, 2			
$\varepsilon$	3, 4	1	1.1, 1.2, 2.1, 2.2	
$\varepsilon^2$		2, 3	1.3, 1.4, 2.3, 2.4, 3.1, 3.2, 4.1, 4.2,	1.1, 2.1
$\varepsilon^3$		4	3.3, 3.4, 4.3, 4.4,	1.2, 1.3, 2.2, 2.3 3.1, 4.1,
$\varepsilon^4$				1.4, 2.4, 3.2, 3.3, 4.2, 4.3
$\varepsilon^5$				3.4, 4.4

W tabelicy 2 zestawiono zależności pomiędzy przemieszczeniami a odkształceniami wynikające z (3.4) przy wprowadzaniu określonych oszacowań, przy czym odkształcenia poszczególnych warstw powłoki określone są w zależności od tensora wydłużeń powierzchni środkowej  $\lambda_{\Delta T}$  i tensora zmiany krzywizny tej powierzchni  $\kappa_{\Delta T}$ :

$$(3.7) \quad E_{\Delta T} = \lambda_{\Delta T} + X^3 \kappa_{\Delta T}.$$

Pierwsza kolumna tabelicy 2 podaje oznaczenie odpowiedniej teorii, druga zaś definiuje wielkość  $\varepsilon$  przez stosunek grubości do najmniejszego promienia krzywizny powierzchni środkowej. Następne trzy kolumny charakteryzują rozpatrywaną aktualnie deformację. Kolumna szоста precyzuje stopień dokładności otrzymywanych związków, tzn. określa, jakiego rzędu wyrazy pominięto w stosunku do jedności. Pozostałe kolumny podają związki geometryczne, odpowiadające rozpatrywanym przybliżeniom.

Na szczególną uwagę zasługują teorie 3.1, 4.3 i 4.2 dodatkowo wyodrębnione w tabelicy 3, odpowiednio jako a, b i c. Przedstawiają one podstawowe przypadki deformacji powłoki przy jednocześnie stosunkowo prostej postaci związków geo-

Tablica 2. Związki geometryczne

	$h/R$	$L/R$	$W/R$	$V/R$	stopień dokładności	$\kappa_{\Delta\Gamma}$
1	2	3	4	5	6	7
1.1	$\varepsilon$	1	$\varepsilon$	$\varepsilon^2$	$\varepsilon^2 \ll 1$	$\beta_{(\Delta \Gamma)}$
1.2	$\varepsilon$	1	$\varepsilon$	$\varepsilon^3$	$\varepsilon^2 \ll 1$	$\beta_{(\Delta \Gamma)}$
1.3	$\varepsilon$	1	$\varepsilon^2$	$\varepsilon^3$	$\varepsilon^3 \ll 1$	$\beta_{(\Delta \Gamma)} - B_{\Delta\Gamma} \beta_3$
1.4	$\varepsilon$	1	$\varepsilon^2$	$\varepsilon^4$	$\varepsilon^3 \ll 1$	$\beta_{(\Delta \Gamma)} - B_{\Delta\Gamma} \beta_3$
2.1	$\varepsilon^2$	1	$\varepsilon$	$\varepsilon^2$	$\varepsilon^2 \ll 1$	0
2.2	$\varepsilon^2$	1	$\varepsilon$	$\varepsilon^3$	$\varepsilon^2 \ll 1$	0
2.3	$\varepsilon^2$	1	$\varepsilon^2$	$\varepsilon^3$	$\varepsilon^3 \ll 1$	0
2.4	$\varepsilon^2$	1	$\varepsilon^2$	$\varepsilon^4$	$\varepsilon^4 \ll 1$	0
3.1	$\varepsilon^2$	$\varepsilon$	$\varepsilon^2$	$\varepsilon^3$	$\varepsilon^2 \ll 1$	$\beta_{(\Delta \Gamma)}$
3.2	$\varepsilon^2$	$\varepsilon$	$\varepsilon^2$	$\varepsilon^4$	$\varepsilon^3 \ll 1$	$\beta_{(\Delta \Gamma)} + \frac{1}{2} B_{(\Delta}^\Phi W_{ \Gamma)} W_{ \Phi} - B_{\Phi(\Delta} \beta_{ \Gamma)}^\Phi +$ $+ B_{(\Gamma}^\Phi W_{ \Delta)} \beta_\Phi$
3.3	$\varepsilon^2$	$\varepsilon$	$\varepsilon^3$	$\varepsilon^4$	$\varepsilon^3 \ll 1$	$\beta_{(\Delta \Gamma)} - B_{\Delta\Gamma} \beta_3$
3.4	$\varepsilon^2$	$\varepsilon$	$\varepsilon^3$	$\varepsilon^5$	$\varepsilon^3 \ll 1$	$\beta_{(\Delta \Gamma)}$
4.1	$\varepsilon^3$	$\varepsilon$	$\varepsilon^2$	$\varepsilon^3$	$\varepsilon^3 \ll 1$	$\beta_{(\Delta \Gamma)}$
4.2	$\varepsilon^3$	$\varepsilon$	$\varepsilon^2$	$\varepsilon^4$	$\varepsilon^3 \ll 1$	$\beta_{(\Delta \Gamma)}$
4.3	$\varepsilon^3$	$\varepsilon$	$\varepsilon^3$	$\varepsilon^4$	$\varepsilon^3 \ll 1$	$\beta_{(\Delta \Gamma)}$
4.4	$\varepsilon^3$	$\varepsilon$	$\varepsilon^3$	$\varepsilon^5$	$\varepsilon^3 \ll 1$	$\beta_{(\Delta \Gamma)}$



$\lambda_{\Delta\Gamma}$	$\beta_{\Delta}$	$\beta_3$
8	9	10
$V_{(\Delta \Gamma)} - B_{\Delta\Gamma}W + \frac{1}{2}W_{ \Delta}W_{ \Gamma} + \frac{1}{2}B_{\Delta}^{\Phi}B_{\Phi\Gamma}W^2$	$\beta_{\Phi}(\delta_{\Delta}^{\Phi} - B_{\Delta}^{\Phi}W) =$ $= -W_{ \Delta} - B_{\Delta}^{\Phi}V_{\Phi}$	
$-B_{\Delta\Gamma}W + \frac{1}{2}W_{ \Delta}W_{ \Gamma} + \frac{1}{2}B_{\Delta}^{\Phi}B_{\Phi\Gamma}W^2$	$\beta_{\Phi}(\delta_{\Delta}^{\Phi} - B_{\Delta}^{\Phi}W) =$ $= -W_{ \Delta}$	
$V_{(\Delta \Gamma)} - B_{\Delta\Gamma}W + \frac{1}{2}W_{ \Delta}W_{ \Gamma} + \frac{1}{2}B_{\Delta}^{\Phi}B_{\Phi\Gamma}W^2$	$\beta_{\Phi}(\delta_{\Delta}^{\Phi} - B_{\Delta}^{\Phi}W) =$ $= -W_{ \Delta} - B_{\Delta}^{\Phi}V_{\Phi}$	$2\beta_3 + \beta^{\Delta}\beta_{\Delta} =$ $= G^{\Delta\Gamma}E_{\Delta\Gamma}$
$V_{(\Delta \Gamma)} - B_{\Delta\Gamma}W + \frac{1}{2}W_{ \Delta}W_{ \Gamma} + \frac{1}{2}B_{\Delta}^{\Phi}B_{\Phi\Gamma}W^2$	$\beta_{\Phi}(\delta_{\Delta}^{\Phi} - B_{\Delta}^{\Phi}W) =$ $= -W_{ \Delta} - B_{\Delta}^{\Phi}V_{\Phi}$	$2\beta_3 + \beta^{\Delta}\beta_{\Delta} =$ $= G^{\Delta\Gamma}E_{\Delta\Gamma}$
$V_{(\Delta \Gamma)} - B_{\Delta\Gamma}W + \frac{1}{2}W_{ \Delta}W_{ \Gamma} + \frac{1}{2}B_{\Delta}^{\Phi}B_{\Phi\Gamma}W^2$		
$-B_{\Delta\Gamma}W + \frac{1}{2}W_{ \Delta}W_{ \Gamma} + \frac{1}{2}B_{\Delta}^{\Phi}B_{\Phi\Gamma}W^2$		
$V_{(\Delta \Gamma)} - B_{\Delta\Gamma}W + \frac{1}{2}W_{ \Delta}W_{ \Gamma} + \frac{1}{2}B_{\Delta}^{\Phi}B_{\Phi\Gamma}W^2$		
$V_{(\Delta \Gamma)} - B_{\Delta\Gamma}W + \frac{1}{2}W_{ \Delta}W_{ \Gamma} + \frac{1}{2}B_{\Delta}^{\Phi}B_{\Phi\Gamma}W^2$		
$V_{(\Delta \Gamma)} - B_{\Delta\Gamma}W + \frac{1}{2}W_{ \Delta}W_{ \Gamma}$	$\beta_{\Delta} = -W_{ \Delta}$	
$V_{(\Delta \Gamma)} - B_{\Delta\Gamma}W + \frac{1}{2}W_{ \Delta}W_{ \Gamma} + \frac{1}{2}B_{\Delta}^{\Phi}B_{\Phi\Gamma}W^2$	$\beta_{\Phi}(\delta_{\Delta}^{\Phi} - B_{\Delta}^{\Phi}W) =$ $= -W_{ \Delta}$	
$V_{(\Delta \Gamma)} - B_{\Delta\Gamma}W + \frac{1}{2}W_{ \Delta}W_{ \Gamma}$	$\beta_{\Delta} = -W_{ \Delta} - B_{\Delta}^{\Phi}V_{\Phi}$	$2\beta_3 + \beta^{\Delta}\beta_{\Delta} =$ $= G^{\Delta\Gamma}E_{\Delta\Gamma}$
$V_{(\Delta \Gamma)} - B_{\Delta\Gamma}W + \frac{1}{2}W_{ \Delta}W_{ \Gamma}$	$\beta_{\Delta} = -W_{ \Delta}$	
$V_{(\Delta \Gamma)} - B_{\Gamma\Delta}W + \frac{1}{2}W_{ \Delta}W_{ \Gamma} + \frac{1}{2}B_{\Delta}^{\Phi}B_{\Phi\Gamma}W^2 +$ $+ \frac{1}{2}V_{ \Delta}^{\Phi}V_{\Phi \Gamma} + \frac{1}{2}B_{ \Delta}^{\Phi}(V_{\Phi \Gamma})W + \frac{1}{2}B_{(\Delta}^{\Phi}W_{ \Gamma})V_{\Phi}$	$\beta_{\Phi}(\delta_{\Delta}^{\Phi} - B_{\Delta}^{\Phi}W +$ $+ V_{ \Delta}^{\Phi}) = -W_{ \Delta} -$ $- B_{\Delta}^{\Phi}V_{\Phi} - \beta_3W_{ \Delta}$	$2\beta_3 + \beta^{\Delta}\beta_{\Delta} =$ $= G^{\Delta\Gamma}E_{\Delta\Gamma}$
$V_{(\Delta \Gamma)} - B_{\Delta\Gamma}W + \frac{1}{2}W_{ \Delta}W_{ \Gamma} + \frac{1}{2}B_{\Delta}^{\Phi}B_{\Phi\Gamma}W^2$	$\beta_{\Phi}(\delta_{\Delta}^{\Phi} - B_{\Delta}^{\Phi}W) =$ $= -W_{ \Delta}$	
$V_{(\Delta \Gamma)} - B_{\Delta\Gamma}W + \frac{1}{2}W_{ \Delta}W_{ \Gamma}$	$\beta_{\Delta} = -W_{ \Delta} - B_{\Delta}^{\Phi}V_{\Phi}$	
$V_{(\Delta \Gamma)} - B_{\Delta\Gamma}W + \frac{1}{2}W_{ \Delta}W_{ \Gamma}$	$\beta_{\Delta} = -W_{ \Delta}$	

metrycznych. Stopień dokładności odpowiada aproksymacji stosowanej dla powłok cienkich, gdy stosunek grubości powłoki do najmniejszego promienia krzywizny jest wielkością pomijalną w stosunku do jedności.

Tablica 3. Najprostsze teorie

	$h/R$	$L/R$	$W/R$	$V/R$	Stopień dokład.	$\lambda_{A\Gamma}$	$\kappa_{A\Gamma}$
a	$\varepsilon^2$	$\varepsilon$	$\varepsilon^2$	$\varepsilon^3$	$\varepsilon^2 \ll 1$	$V_{(A \Gamma)} - B_{A\Gamma} W +$ $+\frac{1}{2} W_{ A} W_{ \Gamma}$	$-W_{ A\Gamma}$
b	$\varepsilon^3$	$\varepsilon$	$\varepsilon^3$	$\varepsilon^4$	$\varepsilon^3 \ll 1$	$V_{(A \Gamma)} - B_{A\Gamma} W +$ $+\frac{1}{2} W_{ A} W_{ \Gamma}$	$-W_{ A\Gamma} - B_{A \Gamma}^\Phi V_\Phi -$ $-B_{A\Delta}^\Phi V_{\Phi \Gamma}$
c	$\varepsilon^3$	$\varepsilon$	$\varepsilon^2$	$\varepsilon^4$	$\varepsilon^3 \ll 1$	$V_{(A \Gamma)} - B_{A\Gamma} W +$ $+\frac{1}{2} W_{ A} W_{ \Gamma} +$ $+\frac{1}{2} B_{A\Delta}^\Phi B_{\Phi\Gamma} W^2$	$\beta_{(A \Gamma)}$ $\beta_\Phi (\delta_A^\Phi - B_{A\Delta}^\Phi W) = W_{ A}$

Związki odpowiadające naszemu przypadkowi b były wyprowadzone przez DONNELLA [16]. Zastosowane one były przy rozpatrywaniu dużych ugięć powłok plastycznych w pracach [17-18].

#### 4. SIŁY WEWNĘTRZNE I RÓWNANIA RÓWNOWAGI

W celu zdefiniowania stosowanych w teorii powłok tensorów powierzchniowych zwanych siłami wewnętrznymi posłużymy się funkcją dysypacji. Dysypacja odniesiona do jednostki powierzchni środkowej przyjmuje postać

$$(4.1) \quad D = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\rho}{\rho_0} \mu S^{KL} \dot{E}_{KL} dX^3, \quad \mu = \det \mu_r^A, \quad \mu_r^A = \delta_r^A - X^3 B_r^A,$$

gdzie  $\rho$  oznacza gęstość w konfiguracji aktualnej,  $\rho_0$  zaś w początkowej. Założenie 3 o nieściśliwości oraz założenie 5 o cienkości powłoki prowadzą do następujących zależności:

$$(4.2) \quad \frac{\rho}{\rho_0} = 1 \quad \text{oraz} \quad \mu = 1.$$

Podstawiając (4.2) do (4.1), otrzymujemy

$$(4.3) \quad D = \int_{-h/2}^{h/2} S^{KL} \dot{E}_{KL} dX^3 = \int_{-h/2}^{h/2} (S^{A\Gamma} \dot{E}_{A\Gamma} + 2S^{A3} \dot{E}_{A3} + S^{33} \dot{E}_{33}) dX^3.$$

Należy teraz ocenić «udziały» poszczególnych wyrazów tego wyrażenia w dysypacji jednostkowej.

Na podstawie (2.6) i (2.8) otrzymujemy

$$(4.4) \quad \sigma^{33} = (\delta_K^3 + U_{\parallel K}^3) (\delta_L^3 + U_{\parallel L}^3) S^{KL}.$$

Dla przypadków podanych w tabelicy 3 podstawiając (2.1) do (4.4) oraz pomijając wyrazy dostatecznie małe dochodzi się do zależności

$$(4.5) \quad \sigma^{33} = S^{33} + S^{4r} W_{|A} W_{|r} + 2S^{43} W_{|A}.$$

Wynika stąd, że założenie 4 na ogół nie implikuje znikania normalnej składowej tensora naprężenia Kirchhoffa, lecz określa ją następująco:

$$(4.6) \quad S^{33} = -S^{4r} W_{|A} W_{|r} - 2S^{43} W_{|A}.$$

Korzystając z (4.6) można jednostkową dysypację (4.3) przedstawić wzorem

$$(4.7) \quad D = \int_{-h/2}^{h/2} [S^{4r} (\dot{E}_{4r} - \dot{E}_{33} W_{|A} W_{|r}) + 2S^{43} (\dot{E}_{43} - \dot{E}_{33} W_{|A})] dX^3.$$

W dalszym ciągu, mając na uwadze założenie 3, otrzymujemy

$$(4.8) \quad D = \int_{-h/2}^{h/2} [S^{4r} \dot{E}_{4r} (1 - G^{\theta\phi} W_{|0} W_{|\phi}) + 2S^{43} (\dot{E}_{43} - \dot{E}_{\theta\phi} G^{\theta\phi} W_{|A})] dX^3.$$

Analiza rzędu wielkości poszczególnych składowych prowadzi do wniosku, że dla przypadków a i b z tabelicy 3 wielkość  $G^{\theta\phi} W_{|0} W_{|\phi}$  w porównaniu do jedności oraz wielkość  $\dot{E}_{\theta\phi} G^{\theta\phi} W_{|A}$  w porównaniu do  $\dot{E}_{43}$  są rzędu wyrazów pomijanych w dotychczasowych rozważaniach. Mając to na uwadze oraz korzystając z założenia 2 i zależności (3.7) dochodzimy do następującej postaci wzoru na jednostkową dysypację:

$$(4.9) \quad D = \int_{-h/2}^{h/2} (S^{4r} \dot{\lambda}_{4r} + X^3 S^{4r} \dot{\kappa}_{4r}) dX^3 = N^{4r} \dot{\lambda}_{4r} + M^{4r} \dot{\kappa}_{4r}.$$

Zgodnie ze zwykle stosowaną definicją wypadkowych sił i momentów w powłoce

$$(4.10) \quad N^{4r} = \int_{-h/2}^{h/2} S^{4r} dX^3, \quad M^{4r} = \int_{-h/2}^{h/2} S^{4r} X^3 dX^3, \quad Q^4 = \int_{-h/2}^{h/2} Q^{43} dX^3$$

przedstawiają powierzchniowe tensory sił wewnętrznych odniesione do konfiguracji nieodkształconej. Na podstawie (4.9) wnioskujemy, że  $\dot{\lambda}_{4r}$  i  $\dot{\kappa}_{4r}$  określone na podstawie tabelicy 3 dla przypadków a i b są uogólnionymi prędkościami odkształceń.

Dla przypadku c, który opisuje deformację powłok przy ugięciach o rząd większych od grubości, postać uogólnionych naprężeń i prędkości odkształceń należy odpowiednio zmodyfikować.

Otrzymujemy wówczas

$$(4.11) \quad D = \int_{-h/2}^{h/2} [S^{A\Gamma} (\dot{\lambda}_{A\Gamma} + \dot{\lambda}_{\theta\Phi} G^{\theta\Phi} W_{|A} W_{|\Gamma}) + X^3 S^{A\Gamma} (\dot{\kappa}_{A\Gamma} + \dot{\kappa}_{\theta\Phi} G^{\theta\Phi} W_{|A} W_{|\Gamma}) - \\ - 2S^{A3} \dot{E}_{\theta\Phi} G^{\theta\Phi} W_{|A}] dX^3 = N^{A\Gamma} \dot{\lambda}_{A\Gamma} (1 + G^{\theta\Phi} W_{|\theta} W_{|\Phi}) + \\ + M^{A\Gamma} \dot{\kappa}_{A\Gamma} (1 + G^{\theta\Phi} W_{|\theta} W_{|\Phi}) - 2Q^A \dot{\lambda}_{\theta\Phi} G^{\theta\Phi} W_{|A}$$

gdzie  $N^{A\Gamma}$ ,  $M^{A\Gamma}$ ,  $Q^A$  zdefiniowane są przez (4.10), natomiast  $\dot{\lambda}_{A\Gamma}$  i  $\dot{\kappa}_{A\Gamma}$  odpowiadają  $\lambda_{A\Gamma}$  i  $\kappa_{A\Gamma}$  w przypadku c tablicy 3.

Dążąc do określenia postaci uogólnionych naprężeń i prędkości odkształceń, które zgodnie z definicją związane są z energią dysypowaną przez jednostkę pola powierzchni środkowej związkami

$$(4.12) \quad D = N^{A\Gamma} \dot{\lambda}_{A\Gamma} + M^{A\Gamma} \dot{\kappa}_{A\Gamma} + Q^A \dot{q}_A$$

dochodzimy do następujących wzorów definiujących uogólnione prędkości odkształceń:

$$(4.13) \quad \begin{aligned} \dot{\lambda}^{A\Gamma} &= \dot{\lambda}^{A\Gamma} (1 + G^{\theta\Phi} W_{|\theta} W_{|\Phi}), \\ \dot{\kappa}^{A\Gamma} &= \dot{\kappa}^{A\Gamma} (1 + G^{\theta\Phi} W_{|\theta} W_{|\Phi}), \\ \dot{q}_A &= 2\dot{\lambda}_{\theta\Phi} G^{\theta\Phi} W_{|A}. \end{aligned}$$

Tak więc dla przypadku ugięć o rząd większych od grubości powłoki uogólnione prędkości odkształceń związane są ze zmianą geometrii powłoki, a udział sił poprzecznych w rozpraszaniu energii nie jest dłużej pomijalny. W celu uniknięcia dodatkowej komplikacji zagadnienia spowodowanej zwiększeniem wymiaru przestrzeni sił uogólnionych, należy zmodyfikować założenie 2 oraz zastąpić warunek (2.2) przez wymaganie, aby

$$(4.14) \quad \int_{-h/2}^{h/2} (\dot{E}_{A3} + \dot{q}_A) dX^3 = 0.$$

Warunek ten z kolei powoduje modyfikację postaci  $\beta_\Phi$  w tablicy 2.

Równania równowagi oraz brzegowe wartości sił dla poszczególnych przypadków rozważanych w pracy możemy otrzymać wychodząc ze wzorów (2.9) i (2.10) lub z równania mocy wirtualnej. Dla ściślej teorii obydwie metody muszą prowadzić do tych samych rezultatów, ponieważ związki wyjściowe są sobie równoważne. Natomiast dla teorii przybliżonych, w których uproszczenia dokonujemy w trakcie wyprowadzania poszczególnych grup równań, w wyniku możemy otrzymać wyrażenia nieco się różniące (por. np. [7]).

Z kolei podamy równania równowagi powłok dla teorii określonych w tablicy 3, wychodząc z ogólnej postaci równań równowagi dla ciała trójwymiarowego w opisie Lagrange'a, tzn. z równań (2.9).

Przyjmując pole przemieszczeń w postaci (2.1) oraz korzystając ze wzorów (3.3) możemy przedstawić równania (2.9) w formie pozwalającej ocenić rząd wielkości poszczególnych składowych. Pomijając następnie wyrazy dostatecznie małe otrzymujemy w rezultacie dla przypadku a z tablicy 3 następujący układ równań:

$$(4.15) \quad \begin{aligned} S^{\Phi r}_{|r} - B_r^\Phi S^{3r} + (\beta^\Phi S^{r3})_{|r} + S^{3\Phi}_{|3} &= 0, \\ B_{Ar} S^{Ar} + S^r_{|r} + (W_{|A} S^{Ar})_{|r} + (W_{|A} S^{A3} + S^{33})_{|3} &= 0; \end{aligned}$$

w przypadku b natomiast

$$(4.16) \quad \begin{aligned} S^{\Phi r}_{|r} - B_r^\Phi S^{3r} + (\beta^\Phi S^{3r})_{|r} + S^{3\Phi} &= 0, \\ B_{Ar} S^{Ar} + S^r_{|r} + (W_{|A} S^{Ar})_{|r} + (W_{|A} S^{A3} + B_A^\Phi V_\Phi S^{A3} + S^{33})_{|3} &= 0. \end{aligned}$$

Całkując powyższe równania wzdłuż grubości powłoki oraz korzystając z wypadkowych naprężeń Pioliego-Kirchhoffa zdefiniowanych przez (4.10), dochodzimy do następującej postaci równań równowagi w opisie Lagrange'a:

$$(4.17) \quad \begin{aligned} N^Ar_{|r} - B_r^A Q^r + (\beta^A Q^r)_{|r} + P^A &= 0, \\ B_{Ar} N^{Ar} + Q^r_{|r} + (W_{|A} N^{Ar})_{|r} + P &= 0, \\ M^Ar_{|r} - Q^A &= 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$(4.18) \quad \beta_A = \begin{cases} -W_{|A} & \text{dla przypadku a} \\ -W_{|A} - B_A^\Phi V_\Phi & \text{dla przypadku b} \end{cases}$$

oraz

$$(4.19) \quad \begin{aligned} \rho^A &= S^{3A}]_{-h/2}^{h/2}, \\ p &= \begin{cases} W_{|A} S^{3A}]_{-h/2}^{h/2} + S^{33}]_{-h/2}^{h/2} & \text{dla przypadku a,} \\ W_{|A} S^{3A}]_{-h/2}^{h/2} + S^{33}]_{-h/2}^{h/2} + B_A^\Phi V_\Phi S^{A3}]_{-h/2}^{h/2} & \text{dla przypadku b.} \end{cases} \end{aligned}$$

Analogiczne rozważania zastosowane do przypadku c z tablicy 3 prowadzą do równań równowagi w postaci:

$$(4.20) \quad \begin{aligned} S^Ar_{|r} - B_r^A S^{3r} + (\beta^A S^{3r})_{|r} - (B_\Phi^A S^{\Phi r} W)_{|r} + B_\Phi^A B_r^\Phi S^{3r} W + B_{\Phi r} S^{\Phi r} \beta^A + \\ + (S^{A3} - B_r^A S^{3r} W + \beta^A S^{33})_{|3} &= 0, \\ B_{Ar} S^{Ar} + S^r_{|r} + (W_{|A} S^{Ar})_{|r} - B_r^A S^{3r} W_{|A} + (S^{3A} W_{|A} + S^{33})_{|3} &= 0. \end{aligned}$$

Opisując równowagę przy pomocy wypadkowych naprężeń Pioliego-Kirchhoffa otrzymujemy:

$$(4.21) \quad \begin{aligned} N^Ar_{|r} - B_r^A Q^r + (\beta^A Q^r)_{|r} - (B_\Phi^A N^{\Phi r} W)_{|r} + B_\Phi^A B_r^\Phi Q^r W + B_{\Phi r} N^{\Phi r} \beta^A + P^A &= 0, \\ B_{Ar} N^{Ar} + Q^r_{|r} + (W_{|A} N^{Ar})_{|r} - B_r^A Q^r W_{|A} + P &= 0, \\ M^Ar_{|r} - Q^A - (B_\Phi^A W M^{\Phi r})_{|r} + B_{\Phi r} M^{\Phi r} \beta^A - B_r^A Q^r W - 2\beta^A W_{|r} Q^r &= 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$(4.22) \quad \begin{aligned} P^A &= S^{A3}]_{-h/2}^{h/2} - B_r^A S^{3r} W]_{-h/2}^{h/2} + \beta^A S^{33}]_{-h/2}^{h/2}, \\ p &= S^{A3} W_{|A}]_{-h/2}^{h/2} + S^{33}]_{-h/2}^{h/2}. \end{aligned}$$

## 5. POWIERZCHNIE GRANICZNE

Analiza zachowania się powłok plastycznych przy dużych przemieszczeniach w opisie Lagrange'a wymaga również wyspecyfikowania postaci warunku granicznego zapisanego za pomocą składowych tensora naprężeń Pioliego-Kirchhoffa. Możliwe są przy tym dwa sposoby omówione w [21]. Pierwszy z nich polega na hipotetycznym przyjęciu warunku plastyczności sformułowanego bezpośrednio w przestrzeni naprężeń Pioliego-Kirchhoffa. Przyjąć tu można np. podobną postać jak dla przypadku posługiwania się naprężeniami Cauchy'ego. Jeśli natomiast chcemy się oprzeć na znanych i potwierdzonych doświadczalnie kryteriach plastyczności, sformułowanych w przestrzeni naprężeń Cauchy'ego, to musimy dostosować te kryteria do przestrzeni naprężeń Pioliego-Kirchhoffa. Zastosujemy tu drugi sposób.

W celu wyjaśnienia, w jakim stopniu zmiana geometrii powłoki wpływa na kształt powierzchni granicznej, zajmiemy się bliżej warunkiem plastyczności Hubera-Misesa. Dla zakrzywionej warstwy warunek ten zdefiniowany we współrzędnych Eulera za pomocą naprężeń Cauchy'ego ma postać:

$$(5.1) \quad 3g_{\alpha\delta}g_{\gamma\beta}\sigma^{\alpha\beta}\sigma^{\gamma\delta} - (\sigma^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta})^2 = 2\sigma_0^2,$$

przy czym  $\sigma_0$  oznacza granicę plastyczności materiału. Korzystając ze związku (2.6), wyrażającego zależność między składowymi tensorów naprężeń w opisie przestrzennym i w opisie materialnym, możemy warunek plastyczności (5.1) przedstawić w postaci

$$(5.2) \quad 3g_{\alpha\delta}g_{\gamma\beta}x_{,\Delta}^{\alpha}x_{,\Gamma}^{\beta}x_{,\Theta}^{\gamma}x_{,\Phi}^{\delta}S^{A\Gamma}S^{\Theta\Phi} - (g_{\alpha\beta}x_{,\Delta}^{\alpha}x_{,\Gamma}^{\beta}S^{A\Gamma})^2 = 2\sigma_0^2.$$

Zgodnie z (2.11) zachodzi

$$(5.3) \quad g_{\alpha\beta}x_{,\Delta}^{\alpha}x_{,\Gamma}^{\beta} + g_{33}x_{,\Delta}^3x_{,\Gamma}^3 = G_{A\Gamma} + 2E_{A\Gamma}.$$

Korzystając z (5.3) i (2.8), warunek graniczny (5.2) możemy przedstawić w następującej postaci:

$$(5.4) \quad 3(G_{\Delta\Phi} + 2E_{\Delta\Phi} - U_{\parallel\Delta}^3 U_{\parallel\Phi}^3)(G_{\Gamma\Theta} + 2E_{\Gamma\Theta} - U_{\parallel\Gamma}^3 U_{\parallel\Theta}^3)S^{A\Gamma}S^{\Theta\Phi} - \\ - [(G_{A\Gamma} + 2E_{A\Gamma} - U_{\parallel\Delta}^3 U_{\parallel\Gamma}^3)S^{A\Gamma}]^2 = 2\sigma_0^2.$$

Dla płaskiego płynięcia odpowiednią postać tego związku podali ARCISZ i RYCHLEWSKI [22]. Z powyższej zależności widać bezpośrednio, że dla dużych odkształceń postać warunku plastyczności w opisie Lagrange'a zależy bezpośrednio od tensora deformacji. Oznacza to, że po deformacji materiał staje się anizotropowy.

Oceńmy stopień wpływu odkształceń na postać warunku plastyczności dla powłok. Dla przypadku deformacji wywołujących ugięcia rzędu grubości powłoki a przemieszczenia styczne o rząd mniejsze, tj. dla przypadków a i b z tablicy 3, na podstawie (3.4) otrzymujemy

$$(5.5) \quad O(E_{KL}) \leq O\left(\frac{h}{R}\right).$$

Dla przyjętego stopnia dokładności rozwijanej teorii dla przypadków a i b, wobec pomijalności wyrazów rzędu  $h/R$  w stosunku do jedności oraz wobec (5.5) warunek plastyczności (5.4) upraszcza się do następującej postaci:

$$(5.6) \quad 3G_{A\Phi} G_{r\theta} S^{A\Gamma} S^{\theta\Phi} - (G_{A\Gamma} S^{A\Gamma})^2 = 2\sigma_0^2.$$

Porównując wzory (5.6) i (5.1) widzimy, że dla cienkich powłok odkształcanych zgodnie z założeniami dotyczącymi przypadków a i b postać warunku plastyczności w opisie Lagrange'a pozostaje taka sama jak w opisie Eulera.

Korzystając ze stowarzyszonego prawa płynięcia oraz wprowadzonej definicji (4.10) naprężeń uogólnionych, możemy warunek plastyczności (5.6) przedstawić przy pomocy uogólnionych naprężeń Pioliego-Kirchhoffa w następującej parametrycznej postaci:

$$(5.7) \quad \begin{aligned} N^{A\Gamma} &= (\dot{\lambda}^{A\Gamma} + \dot{\lambda}_0^{\theta} G^{A\Gamma}) I_1 + (\dot{\kappa}^{A\Gamma} + \dot{\kappa}_0^{\theta} G^{A\Gamma}) I_2, \\ M^{A\Gamma} &= (\dot{\lambda}^{A\Gamma} + \dot{\lambda}_0^{\theta} G^{A\Gamma}) I_2 + (\dot{\kappa}^{A\Gamma} + \dot{\kappa}_0^{\theta} G^{A\Gamma}) I_3, \end{aligned}$$

gdzie

$$(5.8) \quad I_i = \frac{1}{3} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{(X^3)^{i-1}}{\nu} dX^3, \quad \nu \geq 0.$$

Powyższa postać warunku plastyczności jest również analogiczna do postaci, jaką otrzymujemy dla opisu Eulera [8].

Dla powłoki, której geometrię i sposób deformacji określają związki podane w tabelicy 3 dla przypadku c, tj. gdy proces deformacji jest na tyle zaawansowany, że ugięcia są o rząd większe od grubości, z analogicznej analizy formuły (5.4) otrzymujemy

$$(5.9) \quad 3G_{A\Phi} (G_{r\theta} - 4B_{r\theta} W) S^{A\Gamma} S^{\theta\Phi} - [(G_{A\Gamma} - 2B_{A\Gamma} W) S^{A\Gamma}]^2 = 2\sigma_0^2.$$

Widzimy więc, że dla tego przypadku zmiany geometrii mają niepomijalny wpływ na postać warunku plastyczności w opisie Lagrange'a.

## 6. PRZYKŁADY

Dla zilustrowania wyprowadzonych w poprzednich punktach ogólnych wzorów opisujących zachowanie się powłok w fazie obciążenia poza nośność graniczną — określimy postać związków geometrycznych oraz równań równowagi dla przypadków powłoki walcowej i kulistej, podlegających kołowo-symetrycznej deformacji. Ograniczymy się przy tym do przypadku b z tabelicy 3. Dla łatwiejszego porównania wyprowadzonych wzorów ze wzorami stosowanymi w literaturze technicznej posłużymy się fizycznymi składowymi tensorów.

*Powłoka walcowa.* Stosując układ współrzędnych walcowych  $x, r, \varphi$  otrzymujemy związki geometryczne podane w tablicy 3 (przypadek b) oraz równania równowagi (4.17) w postaci:

$$(6.1) \quad \begin{aligned} \lambda_{xx} &= V_{x,x} + \frac{1}{2}(W_{,x})^2, & \kappa_{xx} &= -W_{,xx}, \\ \lambda_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{R} W, & \kappa_{\varphi\varphi} &= 0, \\ \lambda_{x\varphi} &= 0, & \kappa_{x\varphi} &= 0, \end{aligned}$$

$$(6.2) \quad \begin{aligned} N_{,x}^{xx} + (M_{,x}^{xx} W_{,x})_{,x} + P^x &= 0, \\ -N^{\varphi\varphi} + RM_{,xx}^{xx} + R(N^{xx} W_{,x}) + RP &= 0, \end{aligned}$$

gdzie przecinek oznacza różniczkowanie cząstkowe. Dla walcowego układu współrzędnych ze względu na znikanie wszystkich symboli Christoffela II rodzaju zachodzi ogólna zależność  $U_{\Delta|\Gamma} = U_{\Delta,\Gamma}$ .

Związki (6.2) różnią się od stosowanych, m.in. w pracach [17 i 20] dla problemu umiarkowanie dużych ugięć, drugim (dodatkowym) wyrazem w pierwszym równaniu równowagi.

*Powłoka kulista.* Przyjmując sferyczny układ współrzędnych  $\varphi, \theta, r$ , gdzie  $\varphi$  oznacza współrzędną równoleżnikową,  $\theta$  współrzędną południkową, otrzymujemy w przypadku teorii b (tablica 3) następującą postać związków geometrycznych dla powłoki kulistej:

$$(6.3) \quad \begin{aligned} \lambda_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{R} (\text{ctg } \theta V_{\theta} + W), & \kappa_{\varphi\varphi} &= -\frac{1}{R^2} (W_{,\theta} + V_{\theta}) \text{ctg } \theta, \\ \lambda_{\theta\theta} &= \frac{1}{R} \left[ V_{\theta,\theta} + W + \frac{1}{2R} (W_{,\theta})^2 \right], & \kappa_{\theta\theta} &= -\frac{1}{R^2} (W_{,\theta\theta} - V_{\theta,\theta}), \\ \lambda_{\theta\varphi} &= 0, & \kappa_{\theta\varphi} &= 0. \end{aligned}$$

Równania równowagi przybierają natomiast postać

$$(6.4) \quad \begin{aligned} (N^{\theta\theta} \sin \theta)_{,\theta} - N^{\varphi\varphi} \cos \theta + Q^{\theta} \sin \theta - \frac{1}{R} [Q^{\theta} (-W_{\theta} + V_{\theta})]_{,\theta} \sin \theta + R \sin \theta P^{\theta} &= 0, \\ -(N^{\varphi\varphi} + N^{\theta\theta}) \sin \theta + (Q^{\theta} \sin \theta)_{,\theta} + \frac{1}{R} (N^{\theta\theta} W_{,\theta} \sin \theta)_{,\theta} + R \sin \theta P &= 0, \\ (M^{\theta\theta} \sin \theta)_{,\theta} - M^{\varphi\varphi} \cos \theta - R Q^{\theta} \sin \theta &= 0. \end{aligned}$$

Dla porównania podamy analogiczne równania dla liniowej teorii powłok kulistych:

$$(6.5) \quad \begin{aligned} \lambda_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{R} (V_{\theta} \text{ctg } \theta + W), & \kappa_{\varphi\varphi} &= -\frac{1}{R^2} (W_{,\theta} + V_{\theta}) \text{ctg } \theta, \\ \lambda_{\theta\theta} &= \frac{1}{R} (V_{\theta,\theta} + W), & \kappa_{\theta\theta} &= -\frac{1}{R^2} (W_{,\theta\theta} - V_{\theta,\theta}), \\ \lambda_{\theta\varphi} &= 0, & \kappa_{\theta\varphi} &= 0; \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 (6.6) \quad & (N^{\theta\theta} \sin \theta)_{,\theta} - N^{\varphi\varphi} \cos \theta + Q^{\theta} \sin \theta + R \sin \theta P^{\theta} = 0, \\
 & -(N^{\varphi\varphi} + N^{\theta\theta}) \sin \theta + (Q^{\theta} \sin \theta)_{,\theta} + R \sin \theta P = 0, \\
 & (M^{\theta\theta} \sin \theta)_{,\theta} - M^{\varphi\varphi} \cos \theta - R Q^{\theta} \sin \theta = 0.
 \end{aligned}$$

## 7. UWAGI KOŃCOWE

Na podstawie przytoczonych rozważań dotyczących cienkich powłok plastycznych możemy wnioskować, że dla przemieszczeń rzędu grubości (powszechnie są one określane jako «umiarkowanie duże») zarówno warunek plastyczności, jak uogólnione naprężenia możemy przyjąć w tej samej postaci, co dla przemieszczeń nieskończenie małych. Równania równowagi i związki geometryczne natomiast wymagają odpowiednich uzupełnień. Dodatkowe wyrazy występujące przy tym w równaniach odkształceniowo-przemieszczeniowych są nieliniowe, w równaniach równowagi zaś zależą od przemieszczeń. Postać zmodyfikowanych równań, jak widać na podstawie tablicy 2, zależy od geometrii powłoki oraz sposobu jej deformacji, na który z kolei mają wpływ zarówno sposób obciążenia, jak i warunki brzegowe.

Przy deformacji natomiast na tyle zaawansowanej, że ugięcia przekraczają wielokrotnie grubość powłoki, związki teorii powłok plastycznych znacznie się komplikują. Rozważany przypadek c jest tego typu stosunkowo najprostszym przykładem. Wydaje się, że w tym przypadku na uzyskanie rozwiązań możemy liczyć jedynie wprowadzając dodatkowe założenia upraszczające, np. przyjmując stan bezmomentowy. Dla wielu zadań tego typu uproszczenia są uzasadnione, gdyż rozwiązania uzyskiwane na podstawie teorii umiarkowanych ugięć wykazują, że stan zgięciowy szybko zanika ze wzrostem przemieszczeń [17–19].

## LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. W. T. KOITER, *On the nonlinear theory of thin elastic shells*, Proc. Kon. Ned. Ak. Wet., B 69, 1–54, 1966.
2. W. T. KOITER, *A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells*, Proc. IUTAM Symp. Theory Thin Shell, (Delf 1959) North Holland, 12–33, Amsterdam 1960.
3. F. JOHN, *Estimates for the derivatives of the stresses in a thin shell and interior shell equations*, Comm. Pure Appl. Math. 18, 235–267, 1965.
4. J. L. SANDERS, *Nonlinear theories for thin shells*, Quart. Appl. Math., 21, 21–36, 1963.
5. P. M. NAGHDI, *Foundations of elastic shell theory*, Progress in Solid Mechanics, 4, 1–90, North Holland, Amsterdam 1963.
6. CZ. WOŹNIAK, *Nieliniowa teoria powłok*, PWN, Warszawa 1966.
7. P. G. HODGE, Jr., *Plastic analysis of rotationally symmetric shells*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J. 1963.
8. M. DUSZEK, A. SAWCZUK, *O związkach podstawowych teorii powłok plastycznych*, Rozpr. Inżyn., 18, 715–732, 1970.

9. Ю. Р. Лепик, *Равновесие упруго-пластических и жестко-пластических пластин и оболочек*, Инж. Журн., 4, 601 – 616, 1964.
10. Z. WASZCZYŹYŹN, *Obliczanie skończonych ugięć sprężysto-plastycznych płyt i powłok obrotowo-symetrycznych*, Polit. Krak., Kraków 1970.
11. A. SAWCZUK, *Lagrangean formulation of large deflection theory for plastic shells*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 19, 6, 1971
12. Y. C. FUNG, *Fundations of solid mechanics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. 1965.
13. L. J. HART-SMITH, *The linear and non-linear equilibrium equations for thin elastic shells according to the Kirchhoff-Love hypotheses*, Int. J. Mech. Sci., 12, 1 – 16, 1970.
14. W. T. KOITER, *Comment on: The linear and non-linear equilibrium equations for thin elastic shells according to the Kirchhoff-Love hypotheses*, Int. J. Mech. Sci., 12, 1970.
15. W. Z. CHIEN, *The intrinsic theory of thin shells and plates*, Quart. Appl. Math., 1, 297 – 327, 1944.
16. H. L. DONNELL, *General thin shell displacement — strain relations*, Proc. 4th U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., 1962 ASME, 529 – 536, New York 1963.
17. M. DUSZEK, *Plastic analysis of cylindrical shells subjected to large deflections*, Arch. Mech. Stos., 18, 599 – 614, 1966.
18. M. DUSZEK, *Plastic analysis of shallow spherical shells at moderately large deflections IUTAM Symposium Theory Thin Shells*, (Copenhagen 1967), Springer 374 – 388, Berlin 1969.
19. M. DUSZEK, A. SAWCZUK, *Load-deflexion relations for rigid-plastic cylindrical shells beyond the incipient collapse load*, Int. J. Mech. Sci., 12, 839 – 848, 1970.
20. R. H. LANCE, J. E. SOECHTING, *A displacement bounding principle in finite plasticity*, Int. J. Solid Structures, 6, 1103 – 1118, 1970.
21. A. SAWCZUK, *Zagadnienia teorii umiarkowanie dużych ugięć powłok sztywno-plastycznych*, Mech. Teoret. Stos., 9, 335 – 354, 1971.
22. M. ARCISZ, J. RYCHLEWSKI, *Lagrangean description of plane plastic flow*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 17, 1969.
23. А. А. Колесников, *К установлению пределов применимости уравнений Кармана изгиба пластин*, Расчет Пространственных Конструкций, вып. VII, 1962.
24. E. REISSNER, *Rotationally symmetric problems in the theory of thin plastic shells*, Proc. 3-rd U. S. Nat. Congress of Appl. Mech. 1958.
25. Ю. Р. Лепик, *Большие прогибы жестко-пластической цилиндрической оболочки под действием внутреннего давления*, VI Всесоюзная Конф: по теориям оболочек и пластинок, 1966.

### Резюме

#### УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ КОНЕЧНЫХ ПРОГИБОВ ПЛАСТИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Целью работы является вывод уравнений теории пластических оболочек из несжимаемого материала, с учетом изменений геометрии, вызванных пластическим течением оболочки.

В лагранжевом описании, связанном с начальной конфигурацией оболочки, произведена систематическая классификация геометрических зависимостей деформации — перемещения, основанная на типе геометрии рассматриваемой оболочки и на допустимых величинах отдельных составляющих вектора перемещений.

Далее в рамках некоторых теорий дается оценки величин обобщенных переменных и слагаемых в уравнениях равновесия, а также обсуждаются принципы формулировки условия текучести для теории конечных прогибов.

В заключение выводятся основные уравнения для частных случаев цилиндрических и сферических оболочек.

## SUMMARY

## EQUATIONS OF PLASTIC SHELLS AT LARGE DEFLECTIONS

The paper is aimed at the determination of the equations of the theory of plastic, incompressible shells, account being taken of the geometry changes produced by plastic deformation. Using the Lagrangean description (referred to the initial configuration) a systematic classification of the stress-strain relations has been done, their form being specified in dependence of the shell geometry assumed and of the admissible values of the individual displacement vector components.

The estimation of the generalized variables and the equilibrium equations are then discussed, as also the principles of formulation of the yield conditions in the theory of large deflections.

Finally, the fundamental relations concerning certain particular cases of cylindrical and spherical shells are given.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI  
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

*Praca została złożona w Redakcji dnia 23 listopada 1971 r.*

---